

Appunti delle lezioni del corso di
Analisi Complessa

tenuto dal **Prof. Giovanni Alessandrini**
(a.a. 2011-2012)

appunti redatti da Andrea Scapin

Versione (perennemente) provvisoria, corretta e aggiornata al:

11 marzo 2015

Indice

1 Numeri complessi	4
1.1 Generalità sui numeri complessi	4
1.2 Rappresentazione in coordinate polari.	5
1.3 Successioni e serie nel campo complesso	6
1.4 Successioni e serie di funzioni	7
1.5 Radici m -sime	9
1.6 Logaritmo complesso	10
2 Funzioni olomorfe	11
2.1 Funzioni di variabile complessa	11
2.2 Derivata complessa	12
2.3 Equazioni di Cauchy-Riemann	12
2.4 Funzioni olomorfe	14
2.5 Serie di potenze e loro derivata	18
2.5.1 Un criterio di rappresentabilità in serie di potenze	19
2.6 Curve, cammini, integrali su cammini	22
2.6.1 Integrali su cammini	22
2.6.2 Numero di avvitamento	23
2.6.3 Formule di Gauss-Green	26
2.7 Identità di Cauchy e Formula di Cauchy	28
2.8 Teorema di Morera	30
2.9 Teorema di Goursat	32
2.9.1 Formula per le derivate successive	35
2.9.2 Formula di Cauchy, variante	37
2.10 Teorema degli zeri	38
2.10.1 Determinazione olomorfa della radice m -esima	40
2.11 Teorema della mappa aperta	41
2.12 Principio del massimo modulo	44
2.13 Teorema di Liouville	45
2.14 Convergenza uniforme e successioni di funzioni olomorfe	48

3	Singularità isolate	51
3.1	Singularità rimosibili, polari, essenziali	51
3.2	Serie di Laurent	54
3.3	Rappresentazione in serie di Laurent	55
4	Calcolo dei residui	60
4.1	Teorema dei residui	61
4.2	Regole di calcolo dei residui	63
4.3	Integrali impropri e calcolo dei residui	64
4.4	Funzioni meromorfe	66
4.5	Teorema di Rouchè	68
5	Funzioni armoniche	70
5.1	Armonica coniugata	71
5.1.1	Esistenza locale dell'armonica coniugata	72
5.2	Formula di Poisson	73
5.2.1	Formula di Poisson per funzioni olomorfe	73
5.2.2	Formula di Poisson per funzioni armoniche	76
5.2.3	Proprietà del nucleo di Poisson	77
5.3	Problema di Dirichlet nel disco	78
5.3.1	Teorema di Schwarz	79
5.4	Proprietà del valor medio	81
5.5	Principio di riflessione di Schwarz	83
6	Mappe conformi	89
6.1	Automorfismi del disco	93
6.2	Trasformazioni di Möbius	95
6.3	Invarianza del birapporto	97
6.4	Automorfismi del semipiano	98
6.5	Teorema della mappa di Riemann	99

Capitolo 1

Numeri complessi

In questo capitolo si dà una ricapitolazione sommaria delle nozioni di base sui numeri complessi.

1.1 Generalità sui numeri complessi

Denotiamo con \mathbb{C} l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con la struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} . Definiamo su \mathbb{C} un'operazione di prodotto secondo la seguente regola. Presi $z = (x, y), w = (u, v)$ si pone

$$z \cdot w = (xu - yv, xv + yu) .$$

Osserviamo che questa operazione è commutativa e che, posto $1 = (1, 0)$, questo ne è l'elemento neutro. Inoltre per $z \neq (0, 0)$ esiste un inverso

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) .$$

Si verificano inoltre le proprietà associativa

$$(zw)\zeta = z(w\zeta)$$

e distributiva di somma e prodotto

$$(z + w)\zeta = z\zeta + w\zeta .$$

Risulta quindi che $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo. Si indica con $i = (0, 1)$, e si chiama questo elemento *unità immaginaria*, risulta

$$i \cdot i = -1 .$$

Preso $z = (x, y)$ risulta

$$z = 1 \cdot x + i \cdot y$$

e, per semplicità sarà conveniente scrivere un generico numero complesso con la notazione

$$z = x + iy$$

sottintendendo x e y reali. Si dirà che x è la *parte reale* di z e y è la *parte immaginaria*. Si scriverà anche

$$x = \Re z, \quad y = \Im z.$$

Si intenderà \mathbb{R} come sottoinsieme di \mathbb{C} identificandolo come la retta (detta *retta reale*)

$$\{z = x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

si chiamerà *retta immaginaria* la retta

$$i\mathbb{R} = \{z = 0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si definisce *coniugato* di $z = x + iy$ il numero complesso $\bar{z} = x - iy$. Si verifica che $z = \bar{\bar{z}}$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$, inoltre si ha $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$ e $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. Risulta anche:

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si chiama modulo di $z = x + iy$ il numero $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ovvero la lunghezza euclidea del vettore (x, y) . Si verificano le seguenti proprietà

$$|z|^2 = z\bar{z},$$

$$|zw| = |z||w|,$$

$$|z| = |\bar{z}|.$$

Vale poi l'identità

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2$$

da cui segue la disuguaglianza triangolare

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Il modulo $|\cdot|$ induce una struttura metrica su \mathbb{C} , che è la stessa metrica euclidea su \mathbb{R}^2 , di conseguenza \mathbb{C} eredita la struttura topologica di \mathbb{R}^2 .

1.2 Rappresentazione in coordinate polari.

Preso $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, z si può rappresentare

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove $r = |z| > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. θ è determinato a meno di multipli interi di 2π .

Definizione 1.1. Per ogni $z \neq 0$ si definisce argomento di z l'insieme

$$\arg z = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)\} .$$

Sottolineiamo che l'applicazione $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \rightarrow \arg z$ non è una funzione a un valore, ma una applicazione a valori *insiemi*. Osserviamo anche che fissato un qualunque elemento $\theta_0 \in \arg z$ abbiamo

$$\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

In alcune circostanze è conveniente individuare una particolare determinazione dell'argomento. Qui stabiliamo la seguente convenzione.

Definizione 1.2. Per ogni $z \neq 0$ si definisce argomento principale di z il numero

$$\text{Arg } z = \theta$$

tale che $\theta \in \arg z$ e $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Si nota che $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \rightarrow \text{Arg } z$ è una *funzione*, discontinua sulla semiretta reale negativa $\{z = x + i0 \mid x < 0\}$.

1.3 Successioni e serie nel campo complesso

Con la metrica ereditata da \mathbb{R}^2 abbiamo su \mathbb{C} una naturale nozione di convergenza. Presa una successione $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ si dirà che $\{z_n\}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ se e solo se $|z_n - z| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Dalla completezza di \mathbb{R}^2 come spazio metrico, segue che per successioni $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ vale il criterio di Cauchy.

Diremo poi che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ è convergente, se e solo se è convergente la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n z_k$. Per serie di numeri complessi, il criterio di Cauchy si può esprimere nel seguente modo: la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ è convergente, se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \left| \sum_{k=n}^m z_k \right| < \epsilon \quad \forall n, m, \quad m \geq n \geq N .$$

Diremo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ è *assolutamente* convergente, se converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$. Per il suddetto criterio di Cauchy, la convergenza assoluta è una condizione sufficiente (non necessaria) per la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$. Ricordiamo poi che, se vale la convergenza assoluta, allora la somma della serie è indipendente dall'ordine degli addendi. Inoltre, se $\sum_{k=0}^{\infty} z_k, \sum_{k=0}^{\infty} w_k$ sono due serie assolutamente convergenti, allora valgono le regole

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} z_k + \sum_{k=0}^{\infty} w_k &= \sum_{k=0}^{\infty} (z_k + w_k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} z_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} w_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k} . \end{aligned}$$

1.4 Successioni e serie di funzioni

Sia $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni.

Definizione 1.3. Si dice che f_n converge puntualmente a una funzione $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se

$$f_n(z) \rightarrow f(z), \text{ per } n \rightarrow \infty, \forall z \in A.$$

Si dice che f_n converge uniformemente a f se

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Analoghe nozioni conseguono per serie di funzioni.

Consideriamo qui una particolare categoria di serie di funzioni: le serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}.$$

D'ora in avanti, per ogni $r > 0$ e per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ indicheremo con

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

la palla (disco) aperta di raggio r e centro z_0 .

Teorema 1.4. Se esiste $z_0 \neq 0$ tale che la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge, allora per ogni r , $0 < r < |z_0|$ la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente e uniformemente nella palla chiusa $\overline{B_r(0)}$.

Dimostrazione. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge, allora il termine generale $a_n z_0^n$ di questa serie tende a zero, in particolare esisterà $M > 0$ tale che

$$|a_n z_0^n| \leq M \quad \forall n.$$

Sia r tale che $0 < r < |z_0|$ e sia $z \in \overline{B_r(0)}$, si ha $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$. Allora posto $\delta = \frac{r}{|z_0|}$ e osservato che $\delta < 1$ si ottiene

$$\sup_{z \in \overline{B_r(0)}} \sum_{k=n}^m |a_k z^k| \leq M \sum_{k=n}^m \delta^k \rightarrow 0 \text{ per } n, m \rightarrow \infty.$$

Quindi, per il criterio di Cauchy, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente e uniformemente nella palla chiusa $\overline{B_r(0)}$. \square

Definizione 1.5. Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ si definisce raggio di convergenza della serie il numero

$$R = \sup \left\{ |z_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \text{ è convergente} \right\}.$$

Analisi Complessa

Dal Teorema precedente si ricava che se R è il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ allora la serie converge per ogni z tale che $|z| < R$, non converge per nessun z tale che $|z| > R$ e la convergenza è assoluta e uniforme in ogni palla chiusa $\overline{B_r(0)}$ con $r < R$.

Ricordiamo anche la seguente caratterizzazione del raggio di convergenza, nota come *criterio della radice*.

Teorema 1.6. *Il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è dato da*

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Nel seguito sarà utile considerare serie di potenze di $(z - z_0)$ invece che z , in questo caso l'insieme di convergenza sarà una palla (compresi o meno i punti sul suo bordo) di centro z_0 anziché 0.

Esempi.

- $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ converge solo in $z = 0$ cioè ha raggio di convergenza zero.
- $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$, non converge per nessun z , $|z| \geq 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$, non converge per nessun z , $|z| > 1$, converge per $z = -1$, non converge per $z = 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$, converge su tutto $\overline{B_1(0)}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ha raggio di convergenza $R = \infty$.

Definizione 1.7. *Si chiama esponenziale complesso la funzione somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

e la si indica $\exp z$ o anche e^z .

Dalle proprietà del prodotto tra serie, e dalla formula del binomio di Newton, si ricava la regola di addizione dell'esponenziale

$$e^{z+w} = e^z e^w .$$

Introduciamo poi le funzioni coseno e seno iperbolico

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} , \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

e risulterà

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} , \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

e tali serie hanno raggio di convergenza ∞ . Ricordando gli sviluppi di Taylor reali delle funzioni trigonometriche, estendiamo le funzioni coseno e seno a tutto \mathbb{C} , ponendo

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e anche qui il raggio di convergenza è ∞ . Si ricava

$$\begin{aligned} \cos z &= \cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \sin z &= \frac{\sinh(iz)}{i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

Altra formula notevole si ottiene separando parte reale e immaginaria nell'argomento dell'esponenziale:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Ricordiamo in particolare la formula di Eulero

$$e^{i\pi} = -1.$$

1.5 Radici m -sime

Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, preso m intero positivo, se ne vogliono individuare le radici m -sime, ovvero le soluzioni dell'equazione

$$z^m = w.$$

Scriviamo w, z in coordinate polari

$$w = \rho e^{i\phi}, \quad z = r e^{i\theta}$$

quindi avremo

$$r^m e^{im\theta} = \rho e^{i\phi}.$$

Questa equazione è soddisfatta se e solo se

$$r^m = \rho, \quad m\theta = \phi + 2k\pi, \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}$$

Quindi

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[m]{\rho} \\ \theta &= \frac{\phi}{m} + \frac{2k\pi}{m}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ora, ogni intero k si può scrivere in modo unico nella forma

$$k = mj + l, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad l = 0, 1, \dots, m-1$$

quindi

$$\theta = \frac{\phi}{m} + \frac{2l\pi}{m} + 2j\pi, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Se ne ricava che w ha m radici distinte date da

$$z_l = \sqrt[m]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{m} + \frac{2l\pi}{m}\right)}, \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

Ovvero le radici m -sime di w sono m punti che si trovano sulla circonferenza di raggio $\sqrt[m]{|w|}$ e centro l'origine, tra loro equispaziati da un angolo di ampiezza $\frac{2\pi}{m}$.

1.6 Logaritmo complesso

La funzione esponenziale complessa prima introdotta non è iniettiva, infatti $e^z = e^w$ se e solo se $\Im m(z - w) = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo inoltre che la formula

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

chiarisce che l'insieme immagine dell'esponenziale è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la retroimmagine mediante l'esponenziale non è un solo punto ma un insieme, poniamo

$$\log z = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid e^\zeta = z\},$$

osserviamo poi che si può scrivere

$$z = e^{\log |z| + i\theta} \quad \forall \theta \in \arg z.$$

Qui, per il numero reale positivo $|z|$, $\log |z|$ va inteso nel senso consueto della funzione reale di variabile reale, inversa dell'esponenziale reale. Si ottiene

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

dove si sottintende

$$\log |z| + i \arg z = \{\zeta = \log |z| + i\theta \mid \theta \in \arg z\}.$$

Come per l'argomento è utile introdurre una specifica determinazione del logaritmo complesso.

Definizione 1.8. Per ogni $z \neq 0$ si definisce logaritmo principale di z il numero

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z.$$

Capitolo 2

Funzioni olomorfe

2.1 Funzioni di variabile complessa

Se prendiamo funzioni $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la nozione di continuità è la stessa di quella che abbiamo interpretando f come un'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, perché la topologia di \mathbb{C} è la stessa identica topologia che abbiamo su \mathbb{R}^2 . La cosa si fa più complessa se si considera la nozione di funzioni differenziabili. In breve, un'applicazione si dice differenziabile in un punto se si approssima bene con un'applicazione lineare; e qui interviene il discriminante, perché su \mathbb{C} abbiamo due strutture di spazio vettoriale: una struttura di spazio vettoriale di dimensione 2 che ci viene identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 sul campo \mathbb{R} , oppure interpretando \mathbb{C} come spazio vettoriale su se stesso, e, in questo senso, \mathbb{C} ha dimensione 1. Quindi abbiamo due nozioni di linearità: rispetto ad \mathbb{R} e rispetto a \mathbb{C} . Questo significa che le applicazioni lineari $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se le interpretiamo come applicazioni lineari sul campo \mathbb{R} sono una certa classe, e se invece le interpretiamo come applicazioni lineari sul campo \mathbb{C} sono una classe più ristretta. In dettaglio:

Definizione 2.1. $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è \mathbb{R} -lineare se e solo se $Tz = ax + by$, con $a, b \in \mathbb{C}$, dove $T(1) = a$ e $T(i) = b$.

Definizione 2.2. $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è \mathbb{C} -lineare se e solo se $Tz = \alpha z$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. In questo caso: $T(1) = \alpha$.

Se il campo sottostante è \mathbb{C} e si conosce T in un punto qualsiasi $z \neq 0$, allora la si conosce ovunque (infatti qualsiasi elemento $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ costituisce una base di \mathbb{C}).

Il coniugio $Tz = \bar{z}$ è un esempio di una funzione \mathbb{R} -lineare ma non \mathbb{C} -lineare.

2.2 Derivata complessa

Definizione 2.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto ed $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice che f è derivabile, in senso complesso, in un punto $z_0 \in \Omega$ se esiste finito il limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se tale limite esiste lo si chiama derivata complessa di f in z_0 e lo si indica con $f'(z_0)$ oppure $\frac{d}{dz} f$.

Osservazione. Se f è derivabile in z_0 , allora:

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (2.1)$$

$f'(z_0)(z - z_0)$ è una funzione \mathbb{C} -lineare di $(z - z_0)$. Allora è anche \mathbb{R} -lineare e quindi f è differenziabile nel senso reale nello stesso punto; è differenziabile cioè come $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Questo significa che esistono in quel punto le derivate parziali e deve valere la formula del differenziale reale. Indicando ∂_x, ∂_y le derivate parziali rispetto alle variabili reali x e y , sappiamo che:

$$f(z) - f(z_0) = \partial_x f(z_0)(x - x_0) + \partial_y f(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|) \quad (2.2)$$

Quindi se vale la formulazione (2.1), vale anche (2.2). Cerchiamo ora di capire che relazione c'è tra questi oggetti e la derivata complessa che abbiamo introdotto.

Osserviamo che si può sempre scrivere un'espressione \mathbb{R} -lineare come una combinazione lineare a coefficienti complessi di z e \bar{z} (in questo caso $z - z_0$ e $\overline{z - z_0}$). Esprimendo $x - x_0$ e $y - y_0$ in termini di $z - z_0$ e $\overline{z - z_0}$, dalla (2.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \partial_x f(z_0)(x - x_0) + \partial_y f(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) - i\partial_y f(z_0))(z - z_0) + \frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) + i\partial_y f(z_0))\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|). \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.3 Equazioni di Cauchy-Riemann

Se f è derivabile in senso complesso, deve aversi che i termini lineari in (2.1) e in (2.3) sono coincidenti (perché i resti sono di ordine superiore). Quindi:

$$\frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) - i\partial_y f(z_0)) = f'(z_0) \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) + i\partial_y f(z_0)) = 0 \quad (2.5)$$

Questo significa che, se f è derivabile in senso complesso, le derivate parziali di f non sono indipendenti, ma sono vincolate tra loro mediante queste equazioni. Quindi le funzioni derivabili in senso complesso sono una classe strettamente più ridotta della classe delle funzioni differenziabili in senso reale; infatti la differenziabilità in senso complesso ci dà dei vincoli sulle derivate parziali (equazione (2.5)) che altrimenti non avremmo. Siccome questi oggetti che abbiamo introdotto qui appariranno spesso d'ora in avanti è conveniente dar loro un nome.

Definizione 2.4. *Introduciamo i seguenti operatori:*

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

Teorema 2.5. *Se $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è differenziabile in senso complesso in $z_0 \in \Omega$, allora f è differenziabile in senso reale in z_0 e inoltre:*

$$\partial_z f(z_0) = f'(z_0) \tag{2.6}$$

$$\boxed{\partial_{\bar{z}} f(z_0) = 0} \tag{2.7}$$

La dimostrazione è immediata dato che (2.6), (2.7) non sono altro che la riscrittura delle formule (2.4), (2.5), una volta introdotti gli operatori ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$. L'equazione (2.7) è fondamentale in tutta la teoria e prende il nome di *equazione di Cauchy-Riemann* (abbreviato C-R). Si tratta di un'equazione complessa, quindi si scompone in due equazioni reali che legano le derivate parziali delle parti reali e immaginarie di f . Scomponiamo f in parte reale e immaginaria $f = u + iv$ e riformuliamo C-R per le componenti.

$$\partial_{\bar{z}} f = 0$$

significa:

$$\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = 0$$

cioè:

$$(\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_y u + \partial_x v) = 0$$

che dà luogo al sistema di equazioni:

$$\partial_x u = \partial_y v \tag{2.8}$$

$$\partial_y u = -\partial_x v \tag{2.9}$$

Vediamolo in termini più geometrici:

Indichiamo con $\nabla u = \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{bmatrix}$ il gradiente di u e indico con $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ la

rotazione del piano di 90 gradi in senso antiorario.

Allora il sistema di equazioni di C-R si può scrivere come:

$$\nabla v = J\nabla u .$$

Questo chiarisce il vincolo dato dalle equazioni di Cauchy-Riemann: parte reale e parte immaginaria hanno gradiente della stessa lunghezza e ∇v si può ottenere ruotando ∇u di 90 gradi.

In termini della matrice jacobiana:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}^T = \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix}$$

Dove $\nabla u \neq 0$, ∇u lo si può scrivere come $\nabla u = |\nabla u| \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}^T = |\nabla u| \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Cioè, valgono le equazioni di C-R se e solo se la matrice Jacobiana è data dalla composizione di una dilatazione con una rotazione.

2.4 Funzioni olomorfe

Definizione 2.6. *Preso $\Omega \subset \mathbb{C}$, si definisce $H(\Omega)$ la classe delle funzioni f derivabili in senso complesso in ogni punto di Ω e tali che f' è continua in Ω . Tali funzioni si dicono olomorfe (o analitiche complesse).*

Nota: Se la funzione f è derivabile in ogni punto si dimostrerà più avanti (Teorema 2.37, di Goursat) che automaticamente f' è continua. Per il momento, però, è conveniente mettere questa ipotesi.

La nozione di analiticità ha un'origine diversa rispetto a quella di olomorfia ed è legata alla rappresentabilità in serie di potenze: una funzione si dice analitica se, in un intorno di ogni punto, la funzione è rappresentabile come somma di una serie di potenze convergente centrata in quel punto. Quello che mostreremo più avanti, Teorema 2.35, è che le due nozioni sono coincidenti.

Per prima cosa studiamo alcune proprietà della classe delle funzioni olomorfe.

Osservazione. Se f è olomorfa, $f = u + iv$:

$$f' = \partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_y u) + \frac{i}{2}(\partial_x v - i\partial_y v)$$

Usando le eq. di C-R:

$$= \partial_x u - i\partial_y u = 2\partial_z u = 2i\partial_{\bar{z}} v$$

da cui:

$$|f'|^2 = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_x v)^2 + (\partial_y v)^2$$

Osservazione. Per la linearità di ∂_z e di $\partial_{\bar{z}}$ si ha:

$$\partial_z(fg) = (\partial_z f)g + f(\partial_z g)$$

$\partial_{\bar{z}}(fg)$ analogamente.

Valgono:

$$\begin{aligned}\partial_z(\bar{f}) &= \overline{\partial_{\bar{z}}(f)} \\ \partial_{\bar{z}}(f) &= \overline{\partial_z(\bar{f})}\end{aligned}$$

Supponiamo di avere due funzioni $g = g(w)$, $f = f(z)$ e ammettiamo di poterle comporre. Nel seguito ci sarà utile calcolare $\partial_z(g \circ f)$ e $\partial_{\bar{z}}(g \circ f)$. Valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\partial_z(g \circ f) &= \partial_w g(f) \partial_z f + \partial_{\bar{w}} g(f) \partial_z \bar{f} \\ \partial_{\bar{z}}(g \circ f) &= \partial_w g(f) \partial_{\bar{z}} f + \partial_{\bar{w}} g(f) \partial_{\bar{z}} \bar{f}\end{aligned}$$

la dimostrazione è lasciata per esercizio.

Proposizione 2.7. *Siano $f, g \in H(\Omega)$. Allora $f + g \in H(\Omega)$, $f \cdot g \in H(\Omega)$.*

Dimostrazione. Immediata (basta verificare C-R). □

Proposizione 2.8. *Sia $f \in H(\Omega)$ e $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$. Allora $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$.*

Proposizione 2.9. *Sia $f \in H(\Omega)$, e sia $f(\Omega) \subset G$ aperto di \mathbb{C} . Sia $g \in H(G)$.*

Allora $g \circ f \in H(\Omega)$.

Dimostrazione.

$$\partial_{\bar{z}}(g \circ f) = \partial_w g(f) \partial_{\bar{z}} f + \partial_{\bar{w}} g(f) \partial_{\bar{z}} \bar{f} = 0$$

essendo per ipotesi $\partial_{\bar{z}} f = 0$ e $\partial_{\bar{w}} g(f) = 0$. □

Analisi Complessa

Proposizione 2.10. Sia $f \in H(\Omega)$, sia $z_0 \in \Omega$ tale che $f'(z_0) \neq 0$. Allora $\exists r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset \Omega$ e f è invertibile in $B_r(z_0)$ e la sua inversa f^{-1} è olomorfa e vale che:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Dimostrazione. $f = u + iv$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \end{pmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = |f'|^2$$

Quindi la mappa $(x, y) \rightarrow (u, v)$ ha jacobiana non singolare nel punto (x_0, y_0) . Per il teorema di inversione locale $(u(x, y), v(x, y))$ è un diffeomorfismo in un intorno di (x_0, y_0) . Cioè $f : B_r(z_0) \rightarrow G$ è un diffeomorfismo in senso reale. Indichiamo con $g : G \rightarrow B_r(z_0)$ l'applicazione inversa, cioè $g \circ f(z) = z, \forall z \in B_r(z_0)$.

$$\partial_{\bar{z}}(g \circ f)(z) = \partial_{\bar{z}}(z) = 0$$

quindi:

$$\partial_w g(f) \partial_{\bar{z}} f + \partial_{\bar{w}} g(f) \partial_{\bar{z}} \bar{f} = 0$$

Per ipotesi $\partial_{\bar{z}} f = 0$, quindi rimane:

$$0 + \partial_{\bar{w}} g(f) \partial_{\bar{z}} \bar{f} = \partial_{\bar{w}} g(f) \overline{\partial_z f} = 0$$

ed essendo $\overline{\partial_z f} \neq 0$ troviamo:

$$\partial_{\bar{w}} g(f) = 0$$

g verifica C-R rispetto alla sua variabile w .

$$\partial_z(g \circ f)(z) = \partial_z(z) = 1$$

per le formule viste prima:

$$\partial_w g(f) \partial_z f + \partial_{\bar{w}} g(f) \partial_z \bar{f} = 1$$

ricordando che $\partial_{\bar{w}} g(f) = 0$:

$$\partial_w g(f) \partial_z f = 1$$

$$\partial_w g(w) = \frac{1}{\partial_z f(f^{-1}(w))}$$

cioè

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

□

Proveremo più avanti che in effetti, se f è olomorfa e invertibile, allora si ha $f' \neq 0$ in ogni punto.

Esempi di funzioni olomorfe.

1) $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, $P(z) \in H(\mathbb{C})$

Un polinomio della variabile z è ottenuto come combinazione lineari di potenze di z .

2) Preso $z = x + iy$ ricordiamo la funzione esponenziale $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Verifichiamo che $\exp \in H(\mathbb{C})$. Vediamolo attraverso la definizione di derivabilità, cioè calcoliamo il rapporto incrementale nel punto z .

$$\begin{aligned} & \frac{e^{z+w} - e^z}{w} \\ &= e^z \frac{e^w - 1}{w} \\ &= e^z \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} - 1}{w} \\ &= e^z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^{n-1}}{n!} \rightarrow e^z \end{aligned}$$

per $w \rightarrow 0$. Quindi la funzione è differenziabile e la sua derivata è l'esponenziale stesso; e la derivata è una funzione continua, quindi $\exp \in H(\mathbb{C})$.

Abbiamo visto che se $f = u + iv$ è olomorfa allora verifica l'equazione di Cauchy-Riemann. Vale anche il viceversa.

Proposizione 2.11. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con componenti $u, v \in C^1(\Omega)$ nel senso reale. Se f verifica*

$$\partial_z f = 0 \text{ in } \Omega$$

allora f è olomorfa.

Dimostrazione. f è differenziabile in senso reale in ogni punto $z_0 \in \Omega$, l'equazione di Cauchy-Riemann ci da

$$f(z) - f(z_0) = \partial_z f(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \text{ per } z \rightarrow z_0$$

ovvero f è differenziabile in senso complesso. □

Definizione 2.12. $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice antiolomorfa se $z \rightarrow \overline{f(z)}$ è olomorfa.

E' evidente che una funzione f è antiolomorfa se e solo se è C^1 in senso reale e verifica

$$\partial_z f = 0 .$$

2.5 Serie di potenze e loro derivata

Osservazione. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di potenze che ha raggio di convergenza $R > 0$, allora anche la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ ha raggio di convergenza R . Usando la teoria delle serie di potenze si può vedere che la somma f verifica C-R e che si ha proprio $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$. Diamo una dimostrazione alternativa.

Teorema 2.13. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, dove la serie a secondo membro ha raggio di convergenza $R > 0$. Allora $f \in H(B_R(0))$ e $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Dimostrazione. Studiamo il seguente limite

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

Sia r tale che $|z| < r < R$; supponiamo anche $|w| < r$.

$$\begin{aligned} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} &= \frac{1}{w - z} \left(\sum a_n w^n - \sum a_n z^n \right) \\ &= \sum a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} \\ &= \sum a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1}) \\ w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1} &\rightarrow n z^{n-1} \quad (\text{per } w \rightarrow z) \\ w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1} &= n z^{n-1} + r_n \end{aligned}$$

dove il resto r_n è dato da

$$\begin{aligned} r_n &= (w^{n-1} - z^{n-1}) + (w^{n-2}z - z^{n-1}) + \dots + (wz^{n-2} - z^{n-1}) + (z^{n-1} - z^{n-1}) \\ r_n &= (w - z)(w^{n-2} + \dots + z^{n-2}) + z(w - z)(w^{n-3} + \dots + z^{n-3}) + \dots + (w - z)z^{n-2} \end{aligned}$$

ovvero

$$r_n = (w - z)((w^{n-2} + \dots + z^{n-2}) + z(w^{n-3} + \dots + z^{n-3}) + \dots + z^{n-2})$$

e tornando al rapporto incrementale:

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1})$$

sostituendo l'espressione appena ricavata:

$$= \sum a_n(nz^{n-1} + r_n)$$

scriviamo una maggiorazione del resto:

$$\begin{aligned} |r_n| &\leq |w - z|((n-1)r^{n-2} + (n-2)r^{n-2} + \dots + 1 \cdot r^{n-2}) \\ &\leq |w - z|r^{n-2}(1 + 2 + \dots + (n-1)) \\ &= |w - z|r^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

consideriamo la serie:

$$\begin{aligned} &\sum a_n r_n \\ |a_n r_n| &\leq |w - z| |a_n| r^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

converge perché $r < R$. Quindi:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r_n \right| \leq C |w - z|$$

perciò:

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r_n \right| \leq C |w - z| \rightarrow 0$$

per $w \rightarrow z$. □

Definizione 2.14. Una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice rappresentabile in serie di potenze se $\forall z \in \Omega, \exists B_r(z_0) \subset \Omega$ tale che $\forall z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dove la serie di potenze a secondo membro ha raggio di convergenza $R \geq r$.

E' evidente, per quanto visto prima, che una funzione rappresentabile in serie di potenze è olomorfa e tutte le sue derivate sono ancora olomorfe.

2.5.1 Un criterio di rappresentabilità in serie di potenze

Teorema 2.15. Siano $\rho, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue (a tratti).

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto tale che $\Omega \cap \phi([a, b]) = \emptyset$, allora la funzione:

$$f(z) = \int_a^b \frac{\rho(x) dx}{\phi(x) - z}$$

è rappresentabile in serie di potenze.

Analisi Complessa

Dimostrazione. Sia $K = [a, b]$, K è compatto in \mathbb{R} . Essendo ϕ continua, ne segue che $\phi(K)$ è un compatto di \mathbb{C} contenuto nel complementare di Ω .

Sia $z_0 \in \Omega$, quindi $z_0 \notin \phi(K)$ pertanto esiste $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \cap \phi(K) = \emptyset$.

Cioè $|z_0 - \phi(x)| \geq r, \forall x \in [a, b]$.

Sia $z \in B_r(z_0)$. Consideriamo:

$$\left| \frac{z - z_0}{\phi(x) - z_0} \right| < \frac{r}{|\phi(x) - z_0|} < 1$$

Poniamo:

$$p = \frac{z - z_0}{\phi(x) - z_0}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\phi(x) - z_0)^{n+1}} &= \frac{1}{\phi(x) - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\phi(x) - z_0} \right)^n \\ &= \frac{1}{\phi(x) - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} (p)^n \\ &= \frac{1}{\phi(x) - z_0} \frac{1}{1 - p} \\ &= \frac{1}{\phi(x) - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\phi(x) - z_0}} = \frac{1}{\phi(x) - z} \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$f(z) = \int_a^b \rho(x) \cdot \frac{1}{\phi(x) - z} dx = \int_a^b \rho(x) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\phi(x) - z_0)^{n+1}} \right) dx$$

Per scambiare integrale e serie dobbiamo avere la garanzia che la serie sotto il segno di integrale converga uniformemente rispetto alla variabile x (pensiamo z fissata).

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\phi(x) - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|\phi(x) - z_0|} |p|^n \leq \frac{1}{r} |p|^n$$

E' verificato il criterio di convergenza totale, e quindi vale la convergenza uniforme.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b \rho(x) \cdot \frac{1}{(\phi(x) - z_0)^{n+1}} dx \right) (z - z_0)^n \quad (2.10)$$

□

Osservazione. Osservando la (2.10), notiamo che, se si pone

$$a_n = \left(\int_a^b \rho(x) \cdot \frac{1}{(\phi(x) - z_0)^{n+1}} dx \right)$$

si può valutare

$$|a_n| \leq \frac{\int_a^b |\rho(x)| dx}{r^{n+1}}$$

da cui si deduce che la serie in (2.10) ha raggio di convergenza $R \geq r$. Notiamo anche che derivando termine a termine nella (2.10) e calcolando le derivate in z_0 si ricava

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

cioè la serie in (2.10) è proprio la serie di Taylor per f .

2.6 Curve, cammini, integrali su cammini

Definizione 2.16. Un'applicazione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *curva*.

Una curva si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Una curva si dice \mathcal{C}^1 a tratti se esiste una partizione di $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ tale che γ ristretto a $[t_j, t_{j+1}]$ è continua con la derivata prima per ogni $j = 0, \dots, k-1$. Una curva \mathcal{C}^1 a tratti si chiama anche cammino.

Una curva si dice regolare a tratti se è \mathcal{C}^1 a tratti e in ogni tratto $[t_j, t_{j+1}]$, $\gamma' \neq 0$.

Nota: la condizione $\gamma' \neq 0$ garantisce che su ogni tratto la curva è dotata di retta tangente.

Definizione 2.17. Presa una curva γ , si chiama sostegno di γ l'immagine di $[a, b]$ mediante γ e si indica: $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

2.6.1 Integrali su cammini

Definizione 2.18. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ tale che $\gamma^* \subset \Omega$. Presa f continua su Ω ($f \in C(\Omega)$). Poniamo per definizione:

$$\int_{\gamma} f(z) dz =_{def.} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Osservazione. L'oggetto al secondo membro è ben definito, perché $\gamma'(t)$ è una funzione continua a tratti, mentre $f(\gamma(t))$ è la composizione di funzioni continue. Nel complesso abbiamo una funzione della variabile t , continua a tratti e a valori in \mathbb{C} ; quindi, come integrale di Riemann, è ben definito.

Questo è un particolare tipo di integrale curvilineo di una forma differenziale lineare su \mathbb{C} . Ricordiamo che in generale, prese $A, B \in C(\Omega)$, l'integrale della forma $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ è dato da:

$$\int_{\gamma} A(x, y)dx + B(x, y)dy =_{def.} \int_a^b (A(x, y)x'(t) + B(x, y)y'(t))dt$$

Le due definizioni coincidono se, formalmente, interpretiamo $dz = dx + idy$ e poniamo $A = f$, $B = if$; dando per sottointeso che $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Definizione 2.19. Siano γ, γ_1 due cammini in \mathbb{C} .

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$$

Allora γ e γ_1 si dicono equivalenti se esiste $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, continua e \mathcal{C}^1 a tratti, verificante $\phi' > 0$ su ogni tratto, e per cui vale $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$.

Cioè l'invarianza a meno di un diffeomorfismo (a meno dei tratti) che conserva l'orientazione.

Proposizione 2.20. *Se γ e γ_1 sono cammini equivalenti, allora*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(\phi(s))]\gamma'(\phi(s)) \phi'(s) ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f[\gamma_1(s)]\gamma_1'(s) ds = \int_{\gamma_1} f(z)dz \end{aligned}$$

□

Definizione 2.21. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino. Poniamo $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dato da $\gamma_1(t) = \gamma(a + b - t)$.*

γ_1 si chiama cammino opposto a γ e lo possiamo indicare con $\gamma_1 = -\gamma$.

Lemma 2.22. *Sia $f \in H(\Omega)$ e sia γ un cammino chiuso tale che $\gamma^* \subset \Omega$. Allora*

$$\int_{\gamma} f'(z)dz = 0 .$$

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ e sia $\gamma(a) = \gamma(b)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(z)dz &= \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = 0 . \end{aligned}$$

□

Vedremo più avanti che se $f \in H(\Omega)$ allora anche $f' \in H(\Omega)$. Alla luce del Lemma abbiamo che se una funzione olomorfa è dotata di primitiva (cioè è la derivata di un'altra funzione olomorfa) allora ogni suo integrale lungo cammini chiusi è nullo. Questa proprietà non è vera per tutte le funzioni olomorfe. Nel seguente paragrafo esamineremo in dettaglio gli integrali curvilinei della funzione $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ che è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

2.6.2 Numero di avvitamento

Definizione 2.23. *Sia γ un cammino chiuso e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. $\forall z \in \Omega$ poniamo per definizione:*

$$Ind_{\gamma}(z) =_{def.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Questa funzione si chiama indice del punto z rispetto a γ , o numero di avvitamento di γ rispetto a z .

Esempio.

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{iNt}, \quad N \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Calcoliamo:

$$Ind_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{iNt}} \cdot iN e^{iNt} dt = N$$

cioè il numero di giri che la curva gli fa intorno (da qui il nome di numero di avvolgimento di γ rispetto a z).

$Ind_\gamma(z)$, dove definita (fuori dal sostegno di γ), è una funzione olomorfa di z , si veda il Teorema 2.15.

Teorema 2.24.

$$Ind_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

è una funzione a valori in \mathbb{Z} , costante in ogni componente connessa di Ω .

$Ind_\gamma = 0$ sulla componente illimitata di Ω .

Dimostrazione. Proviamo che, fissato $z \in \Omega$, si ha che $w = Ind_\gamma \in \mathbb{Z}$. Osserviamo il seguente fatto:

$w \in \mathbb{C}$ è intero se e solo se $e^{2\pi iw} = 1$.

Dobbiamo far vedere che vale:

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = 1$$

per definizione:

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = \exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z}\right).$$

Poniamo:

$$\phi(s) = \exp\left(\int_a^s \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z}\right) \quad \forall s \in [a, b]$$

derivando:

$$\phi'(s) = \phi(s) \cdot \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}$$

dividendo ambo i membri per $\gamma(s) - z$ e riportando tutto a primo membro:

$$\frac{\phi'(s)}{\gamma(s) - z} - \phi(s) \cdot \frac{\gamma'(s)}{(\gamma(s) - z)^2} = 0$$

a primo membro si riconosce una derivata, quindi:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\phi(s)}{\gamma(s) - z} \right) = 0.$$

Quindi, poiché $\frac{\phi(s)}{\gamma(s) - z}$ è \mathcal{C}^1 a tratti, $\frac{\phi(s)}{\gamma(s) - z}$ è costante. Allora:

$$\frac{\phi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\phi(b)}{\gamma(b) - z}$$

ma γ è chiusa, quindi i denominatori sono uguali, per cui:

$$\phi(a) = \phi(b)$$

$$1 = \exp\left(\int_a^a \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z}\right) = \phi(a) = \phi(b) = \exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z}\right).$$

Quindi $Ind_\gamma \in \mathbb{Z}$. Ora, siccome Ind_γ è rappresentabile mediante serie di potenze, $Ind_\gamma(\cdot) \in H(\Omega)$ e in particolare è continua. Se Ω è

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i$$

dove Ω_i sono aperti connessi disgiunti (ricordiamo che un aperto del piano si scompone sempre in un insieme al più numerabile di componenti connesse, le quali sono anche loro aperte). $Ind_\gamma|_{\Omega_i}$ è continua e a valori in \mathbb{Z} , quindi necessariamente è costante, perché l'immagine deve essere connessa. Ora facciamo vedere che sulla componente illimitata l'indice è 0.

Sia $R > 0$ tale che $\gamma^* \subset B_R(0)$ (il sostegno di γ è compatto, quindi sta dentro una palla abbastanza grande). Allora sia Ω_1 la componente connessa di Ω tale che $\Omega_1 \supset$ il complementare di $B_R(0)$.

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega_1$$

poiché $\zeta \in \gamma$:

$$|\zeta - z| \geq |z| - |\zeta| \geq |z| - R$$

e usiamo questa disuguaglianza per valutare l'integrale:

$$|Ind_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^b \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b |\gamma'(t)| dt \cdot \left(\frac{1}{|z| - R} \right) \leq \frac{M}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{|z| - R} \right)$$

Per $|z| \rightarrow \infty$, l'ultimo membro della disuguaglianza tende a 0. Questo significa che per valori grandi l'indice può solo essere 0, perché essendo Ind_γ a valori interi e sapendo che sta in vicinanza di 0, l'unica possibilità è che valga proprio 0.

In altri termini $\exists R_1 > R$ tale che se $|z| > R_1$, $|Ind_\gamma(z)| < \frac{1}{2}$, ma essendo $Ind_\gamma \in \mathbb{Z}$ segue che $Ind_\gamma(z) = 0$, $\forall z \in$ complementare di $B_R(0)$ e, per continuità, $\forall z \in \Omega_1$. \square

Introduciamo alcune nozioni e una maggiorazione che ci saranno utili in seguito.

Lemma 2.25. Sia $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua a valori complessi. Allora:

$$\left| \int_a^b \phi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\phi(t)| dt$$

Dimostrazione. E' sufficiente approssimare gli integrali con somme di Riemann, dalla disuguaglianza triangolare abbiamo:

$$\left| \sum_{k=1}^N \phi(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^N |\phi(t_k)|(t_k - t_{k-1}) \leq$$

quando il passo della partizione tende a zero, si ottiene la tesi. \square

Definizione 2.26. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino. Poniamo:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

e la chiamiamo lunghezza di γ .

Definizione 2.27. Presi due punti $z, w \in \mathbb{C}$ indichiamo con $[z, w]$ il segmento orientato che congiunge z a w dato dal cammino $\gamma(t) = (1-t)z + tw, t \in [0, 1]$.

Notiamo in particolare che, per un segmento orientato, la nozione appena introdotta di lunghezza coincide con quella elementare: $L([z, w]) = |w - z|$.

Lemma 2.28. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino. f continua in Ω aperto di \mathbb{C} tale che $\gamma^* \subset \Omega$. Allora:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{\gamma^*} |f|$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt \cdot \max_{\gamma^*} |f| = \\ &= L(\gamma) \cdot \max_{\gamma^*} |f|. \end{aligned}$$

\square

2.6.3 Formule di Gauss-Green

Richiamiamo senza dimostrazione delle formule che riguardano integrali multipli: le formule di Gauss-Green e il teorema della divergenza. C'è bisogno intanto una nozione.

Definizione 2.29. Preso G aperto di \mathbb{R}^2 ($\sim \mathbb{C}$) si dice che G ha frontiera regolare a tratti se $\forall z_0 \in \partial G$, $\exists r > 0$ tale che $\partial G \cap B_r(z_0) = \gamma^*$ dove γ è una curva regolare a tratti tale che $B_r(z_0) \setminus \gamma^*$ ha esattamente due componenti connesse di cui una coincide con $G \cap B_r(z_0)$ e l'altra sta nel complementare di \overline{G} .

Convenzione: diremo che γ è orientato positivamente se il versore normale $\nu = -i \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ punta verso l'esterno a G (la moltiplicazione per $-i$ fa ruotare in senso orario di 90 gradi il versore tangente $\frac{\gamma'}{|\gamma'|}$).

Preso $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$, indicheremo con

$$\int_{\partial G} f(z) dz$$

l'integrale curvilineo fatto su ∂G prendendo l'orientazione positiva.

Esempio 1. $G = B_R(0)$

$$\int_{\partial B_R(0)} f(z) dz, \quad z = Re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\partial B_R(0)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

Esempio 2. $G = B_3(0) \setminus \overline{B_1(-1)}$

Convenzionalmente:

$$\partial G = \partial B_3(0) - \partial B_1(-1)$$

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \int_{\partial B_3(0)} f(z) dz - \int_{\partial B_1(-1)} f(z) dz$$

Teorema 2.30 (Formule di Gauss-Green). Sia G aperto limitato in \mathbb{C} con la frontiera regolare a tratti. Sia $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G}, \mathbb{R})$. Vale:

$$\boxed{\int_G \partial_x u(x, y) dx dy = \int_{\partial G} u(x, y) dy}$$

$$\boxed{\int_G \partial_y u(x, y) dx dy = - \int_{\partial G} u(x, y) dx}$$

Teorema 2.31 (Teorema della divergenza). *Sia G aperto limitato in \mathbb{C} con la frontiera regolare a tratti. Siano $u, v \in C^1(G, \mathbb{R})$. Allora:*

$$\int_G (\partial_x u + \partial_y v) dx dy = \int_{\partial G} u dy - v dx$$

E' una semplice riformulazione delle formule di Gauss-Green. Qui u, v sono a valori reali. Se le prendiamo a valori complessi non cambia nulla.

Teorema 2.32 (Formule di Gauss-Green in versione complessa).

$$\int_G \partial_z u dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial G} u d\bar{z}$$

$$\int_G \partial_{\bar{z}} u dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial G} u dz$$

Dimostrazione.

$$\partial_z u = \frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_y u)$$

$$= \partial_x \left(\frac{u}{2}\right) + \partial_y \left(-\frac{i u}{2}\right)$$

$$\int_G \partial_z u dx dy = \int_{\partial G} \left(\frac{u}{2}\right) dy - \left(-\frac{i u}{2}\right) dx = \int_{\partial G} \frac{u}{2} (dy + i dx)$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Regola di calcolo formale:

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

si ha che

$$\int_{\partial G} \frac{u}{2} (dy + i dx) = \int_{\partial G} i \frac{u}{2} d\bar{z} = -\frac{1}{2i} \int_{\partial G} u d\bar{z}$$

□

La seconda formula ci dà un'informazione molto forte su quando si ha a che fare con funzioni olomorfe, perché in questo caso $\partial_{\bar{z}}$ è sempre 0.

2.7 Identità di Cauchy e Formula di Cauchy

Conseguenza immediata delle formule di Gauss-Green è il seguente.

Teorema 2.33 (Identità di Cauchy). *Sia G aperto limitato con frontiera regolare a tratti in \mathbb{C} .*

Sia $f \in \mathcal{C}^1(\overline{G}) \cap H(G)$, allora vale che:

$$\boxed{\int_{\partial G} f(z) dz = 0}$$

Questa formula prende il nome di identità di Cauchy.

Da questa identità ricaviamo una formula che si chiama *formula di Cauchy*.

Teorema 2.34 (Formula di Cauchy). *Siano G ed f come prima; per ogni $z_0 \in G$ vale che:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Notare: prendiamo z_0 dentro l'aperto, quindi questo punto sarà a una distanza positiva dal bordo. Se guardiamo l'espressione:

$$\frac{f(z)}{z - z_0},$$

quando z percorre la frontiera, $z - z_0$ non si annulla mai, $f(z)$ è continua fin sul bordo, quindi la funzione sotto il segno di integrale è continua.

Per una funzione olomorfa, quindi, possiamo rappresentare i valori all'interno esclusivamente in termini di quelli sul bordo.

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset G$. Allora $\overline{B_\epsilon(z_0)} \subset G$ per ogni $0 < \epsilon < r$.

Definiamo $G_\epsilon = G \setminus (\overline{B_\epsilon(z_0)})$. G_ϵ ha frontiera regolare a tratti, $\partial G_\epsilon = \partial G - \partial B_\epsilon(z_0)$.

Poniamo:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0},$$

$g(z)$ è olomorfa in $G \setminus \{z_0\}$, quindi, a maggior ragione, è olomorfa in G_ϵ . Ed è \mathcal{C}^1 su $\overline{G_\epsilon}$.

Quindi a $g(z)$ possiamo applicare l'identità di Cauchy.

$$\int_{\partial G_\epsilon} g(z) dz = 0$$

Ovvero

$$\int_{\partial G} g(z) dz - \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} g(z) dz = 0$$

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$= \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz}_{= 2\pi i f(z_0)} + \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

Stimiamo

$$\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

facendo vedere che è piccolo quando ϵ è piccolo.

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + o(1)$$

Quindi esiste $C > 0$ tale che: $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq C$.

$$\left| \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq L(\partial B_\epsilon(z_0)) \cdot C = 2\pi\epsilon \cdot C \rightarrow 0$$

per $\epsilon \rightarrow 0$. Allora:

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) + O(\epsilon)$$

□

Introduciamo la seguente notazione

$$f^{(k)} = \left(\frac{d}{dz} \right)^k f$$

Teorema 2.35. *Sia $f \in H(\Omega)$ allora è rappresentabile in serie di potenze e ogni sua derivata $f^{(k)}$ è ancora olomorfa.*

Dimostrazione. Per ogni $z_0 \in \Omega$ si fissi $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Per la formula di Cauchy, per ogni $z \in B_r(z_0)$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e per il Teorema 2.15 f è rappresentabile in serie di potenze. □

2.8 Teorema di Morera

L'identità di Cauchy si può riformulare così:

Sia $f \in H(\Omega)$. Per ogni D aperto con frontiera regolare a tratti tale che $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ vale:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

Nel seguente teorema mostriamo che questa condizione integrale è in effetti coincidente con l'olomorfia.

Teorema 2.36 (Teorema di Morera). *Sia $f \in C(\Omega)$ tale che per ogni D , aperto con frontiera regolare a tratti, tale che $D \subset \bar{D} \subset \Omega$ vale:*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

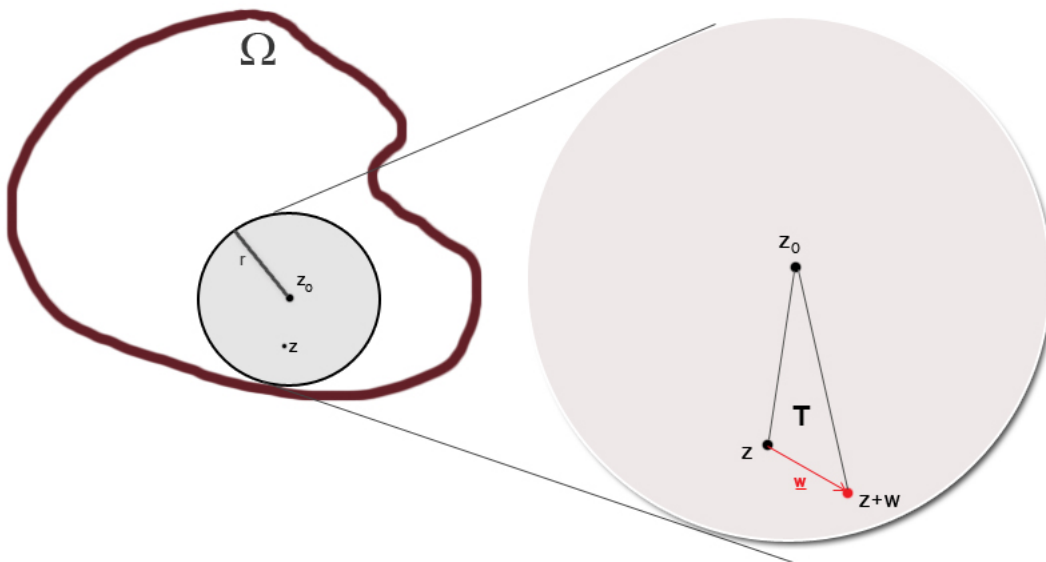
Allora $f \in H(\Omega)$.

Dimostrazione. Introduciamo una nuova funzione. Sia $z_0 \in \Omega$ e sia r tale che $B_r(z_0) \subset \Omega$. Prendiamo un altro punto z all'interno della palla e consideriamo il segmento che da z_0 porta a z ; questo è un segmento che sta dentro alla palla, e dentro Ω .

Poniamo:

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta)d\zeta$$

$\forall z \in B_r(z_0)$.



Proviamo che $f \in H(B_r(z_0))$. Cerchiamo di calcolarci la sua derivata complessa: per fare questo ci scriviamo il rapporto incrementale:

$$\frac{F(z+w) - F(z)}{w}$$

Cominciamo scrivendo l'integrale di f esteso al bordo del triangolo T (vd. figura):

$$0 = \int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = \int_{[z_0, z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z, z+w]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z+w, z_0]} f(\zeta)d\zeta$$

$$= F(z) + \int_{[z, z+w]} f(\zeta) d\zeta + (-F(z+w))$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+w) - F(z)}{w} &= \frac{1}{w} \cdot \int_{[z, z+w]} f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{f(z)}{w} \cdot \int_{[z, z+w]} d\zeta + \frac{1}{w} \cdot \int_{[z, z+w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \end{aligned}$$

Valutiamo il primo integrale. Scegliamo una parametrizzazione per il segmento $[z, z+w]$: $\zeta = z + tw$, $t \in [0, 1]$. Quindi:

$$\frac{f(z)}{w} \cdot \int_{[z, z+w]} d\zeta = \frac{f(z)}{w} \cdot \int_0^1 w dt = f(z)$$

Il secondo termine vedremo che tende a 0.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{w} \cdot \int_{[z, z+w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| &\leq \frac{1}{|w|} L([z, z+w]) \cdot \max_{\zeta \in [z, z+w]} |f(\zeta) - f(z)| \\ &= \frac{1}{|w|} |w| \cdot \max_{\zeta \in [z, z+w]} |f(\zeta) - f(z)| = \max_{\zeta \in [z, z+w]} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $|w| \rightarrow 0$, sfruttando la continuità di f nel punto z . In conclusione:

$$\frac{F(z+w) - F(z)}{w} = \frac{1}{w} \cdot \int_{[z, z+w]} f(\zeta) d\zeta \rightarrow f(z)$$

per $w \rightarrow 0$.

Quello che abbiamo ottenuto è che f , quella da cui siamo partiti, è la derivata di una funzione olomorfa. Per il Teorema 2.35 otteniamo che anche f è olomorfa. \square

Osservazione. Nell'enunciato del teorema di Morera è sufficiente supporre:

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

per ogni triangolo T , $T \subset \bar{T} \subset \Omega$,

perché questo è quello che abbiamo usato nella dimostrazione del teorema.

2.9 Teorema di Goursat

Sfrutteremo il teorema di Morera per verificare che, se quando noi si definisce le funzioni olomorfe si rinuncia alla richiesta che la derivata sia continua, non si perde assolutamente nulla.

Teorema 2.37 (Teorema di Goursat). *Se f è derivabile in senso complesso in ogni punto di Ω , allora $f \in H(\Omega)$.*

Dimostrazione. $f \in C(\Omega)$ perché f è derivabile in senso complesso e quindi è differenziabile in senso complesso e quindi è continua in Ω (questo ci permetterà di applicare il teorema di Morera).

Sia T un triangolo tale che $\bar{T} \subset \Omega$. Proviamo che:

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0 .$$

Prendiamo ogni lato del triangolo T e lo dividiamo a metà e congiungiamo tra loro questi punti medi. In questo modo suddividiamo il triangolino in quattro triangolini che sono tutti simili a quello di partenza. Quindi ciascuno di questi ha dimensioni che sono la metà del triangolo di partenza: passando dal triangolo grande a questi triangolini il diametro si dimezza (o il perimetro...).

Siano T_1, T_2, T_3, T_4 i quattro triangolini ottenuti in questo modo.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| &\leq \left| \int_{\partial T_1} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial T_2} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial T_3} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial T_4} f(z)dz \right| \\ &\leq 4 \max_i \left| \int_{\partial T_i} f(z)dz \right| \end{aligned}$$

Esiste $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che:

$$\left| \int_{\partial T_i} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f(z)dz \right|$$

Poniamo $D_0 = T$, $D_1 = T_i$. Suddividendo successivamente D_1 in 4 triangoli, ne esisterà uno (D_2) tale che:

$$\left| \int_{\partial D_2} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial D_1} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4^2} \left| \int_{\partial D_0} f(z)dz \right|$$

Troviamo una successione $\{D_k\}$ di triangoli simili tali che:

$$D_{k+1} \subset D_k \quad \forall k$$

e $\text{diam } D_k = 2^{-k} \text{ diam } D_0$.

$$\left| \int_{\partial D_k} f(z)dz \right| \geq 4^{-k} \left| \int_{\partial D_0} f(z)dz \right|$$

Si può pensare che per ciascuno di questi D_k selezioniamo un vertice, quindi abbiamo una successione di punti che sta dentro un compatto; allora questa successione ha almeno una sottosuccessione convergente. Quindi, eventualmente passando alla sottosuccessione, questa successione di vertici ha un punto limite

Analisi Complessa

che sta dentro al triangolo e siccome il diametro di questi triangolini tende a 0, esisterà $z_0 \in \overline{D_0} = \overline{T}$ tale che:

$$\bigcap_k \overline{D_k} = \{z_0\}$$

Allora

$$\int_{\partial D_k} f(z) dz = \int_{\partial D_k} f(z_0) dz + \int_{\partial D_k} (f(z) - f(z_0)) dz$$

Il primo termine del secondo membro ($\int_{\partial D_k} f(z_0) dz$) è $= 0$ per l'identità di Cauchy (infatti $f(z_0)$ è una funzione costante, quindi è olomorfa in D_k). Adesso usiamo l'ipotesi che $f(z)$ sia una funzione derivabile in senso complesso. Si ha quindi:

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_k} f(z) dz &= 0 + \int_{\partial D_k} (f(z) - f(z_0)) dz \\ &= \int_{\partial D_k} f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) dz \\ &= \underbrace{\int_{\partial D_k} f'(z_0)(z - z_0)}_{=0} + \int_{\partial D_k} o(|z - z_0|) dz \end{aligned}$$

e poiché

$$\begin{aligned} |z - z_0| &\leq \text{diam}(D_k) \\ &= o(\text{diam}(D_k)^2) \end{aligned}$$

allora:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D_k} f(z) dz \right| &= o(\text{diam}(D_k)^2) \\ &= o(4^{-k} \text{diam}(D_0)^2) \end{aligned}$$

Ma $\text{diam}(D_0)^2$ è costante rispetto a k . Quindi:

$$\left| \int_{\partial D_0} f(z) dz \right| \leq 4^k o(4^{-k}) = o(1)$$

per $k \rightarrow \infty$. Quindi:

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

□

2.9.1 Formula per le derivate successive

Sia $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Per questa palla possiamo usare la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Consideriamo F

$$F(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

per ogni $\rho < r$, le funzioni $F, \partial_z F, \partial_{\bar{z}} F$ sono uniformemente continue su $\partial B_r(z_0) \times \overline{B_\rho(z_0)}$, di conseguenza si può applicare la derivazione sotto il segno di integrale, ovvero per ogni $z \in \overline{B_\rho(z_0)}$:

$$\partial_z \int_{\partial B_r(z_0)} F(\zeta, z) d\zeta = \int_{\partial B_r(z_0)} \partial_z F(\zeta, z) d\zeta$$

$$\partial_{\bar{z}} \int_{\partial B_r(z_0)} F(\zeta, z) d\zeta = \int_{\partial B_r(z_0)} \partial_{\bar{z}} F(\zeta, z) d\zeta = 0$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\rho < r$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

Possiamo ripetere la derivazione. $\forall k = 1, 2, 3, \dots$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k f(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

Quindi, dalla formula di Cauchy, ricaviamo delle formule che ci permettono di individuare tutte le derivate successive della nostra funzione. ossia, abbiamo ottenuto il seguente.

Teorema 2.38. *Sia $f \in H(\Omega)$, sia $z_0 \in \Omega$ e $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Allora f è derivabile infinite volte e $\forall z \in B_r(z_0)$ vale:*

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k f(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

Possiamo ottenere anche delle valutazioni di queste derivate.

Corollario 2.39. *Posto*

$$M = \max_{\partial B_r(z_0)} |f|$$

vale:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{M k!}{r^k}$$

Analisi Complessa

Dimostrazione.

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$
$$\zeta = z_0 + re^{i\theta}$$

allora:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{k+1} e^{i(k+1)\theta}} ire^{i\theta} d\theta$$

quindi:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^k} d\theta = \frac{Mk!}{r^k}$$

□

Da un'altro punto di vista, ovvero riprendendo l'argomento usato nel Teorema 2.15 nella formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta$$

raccogliamo $(\zeta - z_0)$:

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta \quad (2.11)$$

Ma, poiché ζ sta dentro la palla e z sta sul bordo, posto:

$$w(\zeta) = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$$

si ha

$$|w(\zeta)| < 1$$

quindi possiamo interpretare la frazione

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

che compare sotto il segno di integrale in (2.11) come la somma di una serie geometrica, quindi:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} [w(\zeta)]^k d\zeta .$$

Infatti, fissato $\rho : 0 < \rho < r$ e preso $z \in B_\rho(z_0)$,

$$|w(\zeta)| \leq \frac{\rho}{r} < 1$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [w(\zeta)]^k$$

converge uniformemente per $\zeta \in \partial B_r(z_0)$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k . \end{aligned}$$

2.9.2 Formula di Cauchy, variante

Facciamo una precisazione sulla formula di Cauchy che conosciamo.

Teorema 2.40. *Sia $f \in H(B_R(z_0)) \cap C^0(\overline{B_R(z_0)})$. Per ogni $z \in B_R(z_0)$ abbiamo:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Osservazione. La diversità rispetto a quella dimostrata in precedenza è che stavolta prendiamo la funzione olomorfa proprio nella palla aperta e che si estenda con continuità fin sul bordo.

Dimostrazione. $\forall z \in B_R(z_0)$ sia $\epsilon > 0$ tale che $|z - z_0| < R - \epsilon$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{R-\epsilon}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f((R-\epsilon)e^{i\theta} + z_0)}{(R-\epsilon)e^{i\theta} - z} \cdot i(R-\epsilon)e^{i\theta} d\theta$$

Osserviamo che la funzione integranda è uniformemente continua sia rispetto ad ϵ che a θ . Quindi possiamo passare al limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$ sotto il segno di integrale.

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f((R-\epsilon)e^{i\theta} + z_0)}{(R-\epsilon)e^{i\theta} - z} \cdot i(R-\epsilon)e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta} + z_0)}{Re^{i\theta} - z} \cdot iRe^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

□

2.10 Teorema degli zeri

Una importante conseguenza che ricaviamo ora dalla sviluppabilità in serie di potenze delle funzioni olomorfe è quello che si chiama il teorema degli zeri, che, in sintesi, ci dice che localmente una funzione olomorfa si comporta come un polinomio.

Richiamiamo alcuni concetti topologici.

Definizione 2.41. *Un insieme $E \subset \Omega$ aperto di \mathbb{C} si dice che è composto di punti isolati se $\forall z_0 \in E$, esiste $r > 0$ tale che $E \cap B_r(z_0) = \{z_0\}$.*

Definizione 2.42. *Un insieme $E \subset \mathbb{C}$ si dice connesso se per ogni $A \subset E$ tale che A ed $E \setminus A$ sono aperti nella topologia indotta, allora $A = \emptyset$ oppure $A = E$.*

Teorema 2.43 (Teorema degli zeri). *Sia Ω aperto connesso di \mathbb{C} . Sia $f \in H(\Omega)$ non identicamente nulla. Allora gli zeri di f sono isolati. Inoltre, se $z_0 \in \Omega$ è uno zero per f , allora esiste un naturale $m \geq 1$ e una funzione $g \in H(\Omega)$ tale che:*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad , \quad g(z_0) \neq 0 . \quad (2.12)$$

Cioè f si può fattorizzare localmente come un polinomio per una funzione olomorfa che non si annulla.

Dimostrazione. Introduciamo i seguenti insiemi: per ogni $m = 0, 1, 2, \dots$ sia

$$N_m = \{z \in \Omega \mid f^{(m)}(z) = 0\}$$

cioè l'insieme degli zeri della derivata m -esima. Questo è un chiuso perché è l'insieme degli zeri di una funzione continua (f ha infinite derivate e queste sono tutte funzioni olomorfe, in particolare sono continue). Chiamiamo

$$N = \bigcap_{m=0}^{+\infty} N_m$$

anche N è chiuso.

$$N = \{z \in \Omega \mid f^{(m)}(z) = 0, \forall m = 0, 1, 2, \dots\}$$

Ora facciamo vedere che N è anche aperto. Sia $z_0 \in N$. Allora esiste $r > 0$ tale che $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ (perché Ω è aperto), e la serie

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

converge nella palla aperta e ha somma $f(z)$. Ma visto che $z_0 \in N$, si ha:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} 0 = 0, \quad \forall z \in B_r(z_0) .$$

Quindi anche le derivate di f sono zero in tutta questa palla:

$$f^{(m)}(z) = 0, \forall m, \forall z \in B_r(z_0)$$

dunque $B_r(z_0) \subset N$. Cioè ogni punto di N è interno a N , ovvero N è aperto e chiuso. Quindi, dato che Ω è connesso, $N = \emptyset$ oppure $N = \Omega$. Se $N = \Omega$, f è identicamente nulla, contro l'ipotesi. Quindi vale $N = \emptyset$; cioè per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste $m = 0, 1, 2, \dots, k$ tale che

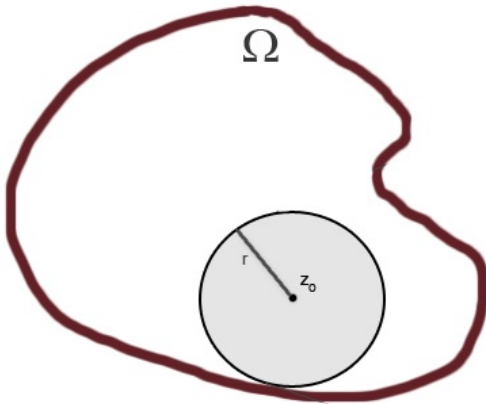
$$f^{(m)}(z_0) \neq 0, \quad f^{(k)}(z_0) = 0, \quad \forall k < m.$$

Cioè se fissiamo un punto z_0 , lì c'è almeno una derivata che in quel punto non si annulla (sia m il primo ordine di derivata per cui si verifica questa condizione). Esaminiamo la serie di Taylor di f centrata in z_0 :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \\ &= (z - z_0)^m \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m} \end{aligned}$$

Quando $z \neq z_0$, possiamo dividere per $(z - z_0)^m$ da tutt'e due le parti. Quindi poniamo:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & \text{quando } z \neq z_0 \\ \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m} & \text{quando } |z - z_0| < r \end{cases}$$



$g(z)$ è definita fuori dal punto z_0 come:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$$

ed è una funzione olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Nella palla $B_r(z_0)$ è definita come:

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}$$

Nella palla bucata $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ le due definizioni sono coincidenti. Quindi g , nel complesso, è univocamente definita ed è olomorfa.

$$g \in H(\Omega) \quad e \quad g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

Moltiplicando per $(z - z_0)^m$ otteniamo:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad , \quad \forall z \in \Omega.$$

Per continuità si trova $\rho, 0 < \rho \leq r$ tale che $g(z) \neq 0$ in $B_\rho(z_0)$, quindi in $B_\rho(z_0)$, f si annulla solo in z_0 . Cioè z_0 è un punto isolato. \square

Corollario 2.44 (Principio di unicità). *Sia Ω connesso ed $f, g \in H(\Omega)$. Se*

$$E = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$$

ha almeno un punto di accumulazione in Ω , allora $f = g$ (coincidono).

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata: si applica il teorema degli zeri a $f - g$. Consideriamo la funzione $f - g$, la quale è olomorfa. Allora $f - g$ o è identicamente nulla (e allora segue la tesi) oppure $f - g$ ha solo zeri isolati. Se $f - g$ ha solo zeri isolati, significa che E non ha punti di accumulazione. \square

2.10.1 Determinazione olomorfa della radice m -esima

Osservazione. Calcoliamo la radice m -esima di $1 + t$, con t reale, $|t| < 1$. Si trova la nota formula di Taylor:

$$\sqrt[m]{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{m}}{k} t^k \tag{2.13}$$

dove il coefficiente binomiale generalizzato è dato da

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Consideriamo la serie in (2.13) come funzione di una variabile complessa

$$r_m(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{m}}{k} z^k. \tag{2.14}$$

Questa converge nella palla di centro 0 e raggio 1. Nel caso reale, $z = t$ questa serie produce una radice m -esima di $1 + t$. Verifichiamo che la funzione $r_m(z)$ ha

lo stesso effetto. Sappiamo che nel campo complesso, per ogni numero diverso da 0, troviamo m radici distinte. Se abbiamo radici di un numero che dipende da un parametro, otterrò m funzioni distinte di questo parametro. Mostriamo che la funzione $r_m(z)$ ci dà una radice m -esima di $1+z$, quando $|z| < 1$ ed è al tempo stesso olomorfa.

Proviamo che $(r_m(z))^m = 1+z$, $\forall z \in B_1(0)$. Prendiamo $\Omega = B_1(0)$ (aperto connesso), e prendiamo $f(z) = 1+z \in H(\Omega)$, e poi considero:

$$g(z) = (r_m(z))^m \in H(\Omega)$$

Ma quando $z = t \in \mathbb{R}$, $f(z) = g(z)$, $\forall z \in B_1(0) \cap \{Im(z) = 0\}$, cioè:

$$E = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$$

ha infiniti punti di accumulazione dentro Ω . Quindi $f = g$.

Osservazione. Se z_0 è uno zero di una funzione olomorfa non identicamente nulla possiamo scrivere:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g(z_0) \neq 0$. d'altra parte:

$$g(z) = g(z_0) + O(|z - z_0|)$$

quindi:

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^m + O(|z - z_0|^{m+1}).$$

Questa formula ci dice che il comportamento in vicinanza di uno zero di una funzione olomorfa è lo stesso di un polinomio: cioè una potenza di $(z - z_0)$. Quello che resta è un infinitesimo di un ordine superiore.

Questo serve per arrivare ad un teorema che dà un'informazione topologica sulle funzioni olomorfe, il quale è legato al teorema degli zeri che abbiamo appena visto: il teorema della mappa aperta.

2.11 Teorema della mappa aperta

Teorema 2.45 (Teorema della mappa aperta). *Sia Ω aperto connesso. Sia $f \in H(\Omega)$ non identicamente costante.*

Allora $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una mappa aperta (cioè un'applicazione che trasporta aperti in aperti).

Dimostrazione. Si deve dimostrare che $\forall U$ aperto in Ω , $f(U)$ è aperto in \mathbb{C} .

Sarà sufficiente dimostrare che

$\forall z_0 \in \Omega$, esiste $r > 0$ tale che $\forall \rho \leq r$, $f(B_\rho(z_0))$ è aperta (dato che ogni aperto di Ω è unione di palle aperte, ci basterà dimostrare che per palle aperte sufficientemente piccole l'immagine è aperta).

Prendiamo due casi prototipo.

Primo esempio. Sia f tale che in un punto z_0 verifichi $f'(z_0) \neq 0$. Se prendiamo un punto vicino a z_0 , lì la derivata è diversa da zero e quindi, per l'invertibilità delle funzioni olomorfe, esiste tutto un intorno di z_0 su cui f è invertibile (come funzione olomorfa); anche l'inversa è olomorfa, in particolare l'inversa è continua, quindi la funzione di partenza è una mappa aperta in vicinanza di z_0 .

Secondo esempio. Per una potenza $f(z) = (z - z_0)^m$, l'unico punto dove f' può annullarsi è z_0 . esaminiamo l'immagine di un intorno di z_0 :

$$f(B_\rho(z_0)) = \{f(z) | z = z_0 + te^{i\theta}, 0 \leq t < \rho, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

$$f(B_\rho(z_0)) = \{t^m e^{im\theta} | 0 \leq t < \rho, 0 \leq \theta < 2\pi\} = B_{\rho^m}(0).$$

Quindi f trasforma intorni aperti di z_0 in intorni aperti di 0. In conclusione $f(z) = (z - z_0)^m$ è aperta.

Ora mettiamo insieme questi due esempi e trattiamo il caso generale.

Sia $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$, abbiamo appena visto che $\exists r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset \Omega$; e $f|_{B_r(z_0)}$ è invertibile con inversa f^{-1} olomorfa e quindi $f(B_\rho(z_0))$ è aperto $\forall \rho < r$.

Sia viceversa $f'(z_0) = 0$. Consideriamo $f(z) - f(z_0)$, la quale è una funzione che si annulla in z_0 ; quindi si scriverà come:

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z) \quad , \quad m = 2, 3, \dots \quad e \quad g(z_0) \neq 0$$

$$g(z) = g(z_0) + h(z) \quad \text{con} \quad h(z_0) = 0 \quad e \quad h \in H(\Omega)$$

$$g(z) = g(z_0) \left(1 + \frac{h(z)}{g(z_0)} \right)$$

$g(z_0)$ ha m radici m -sime distinte: ne scegliamo una, p . Il secondo fattore è 1+ qualcosa di piccolo: abbiamo visto prima che anche questo possiamo esprimerlo come una potenza m -esima. Inoltre se $z - z_0$ è sufficientemente piccolo, poiché $h(z_0) = 0$, si ha:

$$\left| \frac{h(z)}{g(z_0)} \right| < 1$$

quindi:

$$g(z) = p^m \left(r_m \left(\frac{h(z)}{g(z_0)} \right) \right)^m$$

dove r_m è la funzione introdotta in (2.14), allora:

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m p^m \left(r_m \left(\frac{h(z)}{g(z_0)} \right) \right)^m$$

$$= \left(p(z - z_0) r_m \left(\frac{h(z)}{g(z_0)} \right) \right)^m$$

poniamo:

$$\phi(z) = p(z - z_0) r_m \left(\frac{h(z)}{g(z_0)} \right)$$

ϕ è olomorfa e $\phi(z_0) = 0$, $\phi'(z_0) \neq 0$ (perché $r_m(0)$ vale 1)

$$f(z) - f(z_0) = (\phi(z))^m \quad (2.15)$$

Ovvero $f(z) - f(z_0)$ è ottenuta localmente come composizione della la potenza m -esima con ϕ che è invertibile. In conclusione, preso un intorno arbitrariamente piccolo di z_0 , questo è trasformato da ϕ in un intorno di 0 che la potenza m -sima trasforma in un nuovo intorno aperto di 0. \square

Osservazione. Gli argomenti nella precedente dimostrazione ci permettono anche di stabilire che se f è olomorfa invertibile allora f' non si annulla mai. Infatti se f' si annullasse in z_0 , in un intorno di questo punto f si può rappresentare come in (2.15) con $m \geq 2$ e quindi non è invertibile.

Un'altra conseguenza della formula di rappresentazione locale (2.12) è la seguente variante del principio di unicità.

Corollario 2.46 (Principio di unicità II). *Sia Ω aperto connesso, $f \in H(\Omega)$. Se esiste $z_0 \in \Omega$ tale che $\forall N = 1, 2, \dots$ esistono $c_N \geq 0$, $r_N > 0$ tali che:*

$$|f(z)| \leq c_N |z - z_0|^N, \quad \forall z \in B_{r_N}(z_0)$$

allora f è identicamente nulla.

Dimostrazione. Se f non è identicamente uguale a 0, allora z_0 è uno zero isolato per f ed esiste m intero > 0 tale che:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad , \quad g(z_0) \neq 0 \quad , \quad g \in H(\Omega)$$

per il teorema degli zeri. Usando l'ipotesi:

$$|(z - z_0)^m g(z)| = |f(z)| \leq c_N |z - z_0|^N, \quad \forall z \in B_{r_N}(z_0)$$

ora preso $z \neq z_0$ e dividendo per $|z - z_0|^m$:

$$|g(z)| \leq c_N |z - z_0|^{N-m}$$

che è vera $\forall N, \forall z \in B_{r_N}(z_0), z \neq z_0$. In particolare, preso $N > m$, si ricava che $|g(z)| \rightarrow 0$ per $z \rightarrow z_0$.

Il che è assurdo perché g verifica $g(z_0) \neq 0$. \square

2.12 Principio del massimo modulo

Teorema 2.47 (Principio del massimo modulo). *Sia Ω un aperto connesso, $f \in H(\Omega)$, e sia $M = \sup_{\Omega} |f|$. Se esiste $z_0 \in \Omega$ tale che $|f(z_0)| = M$, allora f è costante.*

Quindi, se prendiamo $f \in H(\Omega)$ non costante, $\forall z_0 \in \Omega$

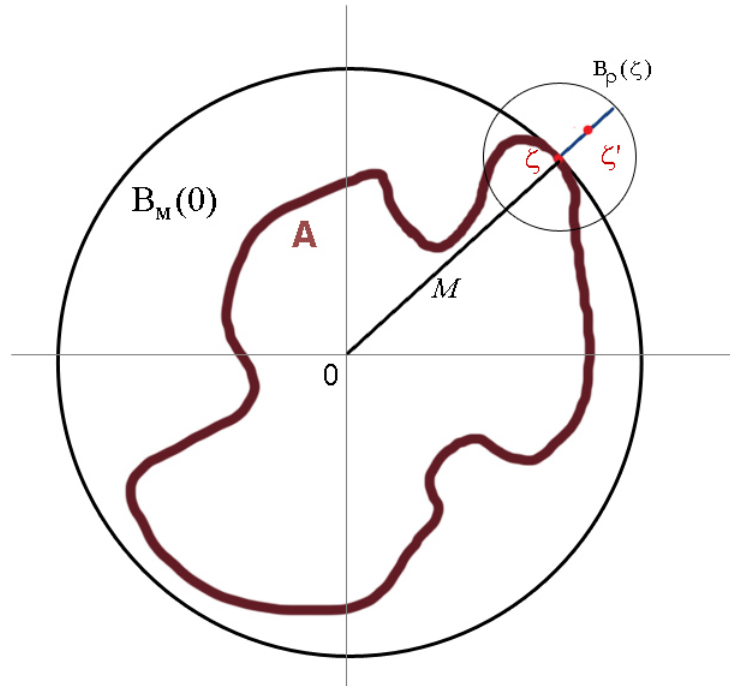
$$|f(z_0)| < \sup_{\Omega} |f|.$$

(e se esiste un punto di massimo interno, allora la funzione f è costante)

Dimostrazione. Sia $A = f(\Omega)$. f è una mappa aperta, quindi A è un aperto di \mathbb{C} . Consideriamo ora

$$M = \sup \{|w| : w \in A\},$$

allora $A \subset B_M(0)$. Supponiamo che $|f(z_0)| = M$. Sia $\zeta = f(z_0) \in A$. ζ ha modulo M , quindi $\zeta \in \partial B_M(0)$. Essendo A aperto, $\exists \rho > 0$ tale che $B_\rho(\zeta) \subset A$. Quindi $B_\rho(\zeta)$ contiene sia punti dentro la palla di raggio M sia punti al di fuori di essa. Questi punti esterni violano la condizione $A \subset B_M(0)$.



Più in dettaglio, si ponga

$$\zeta' = \frac{\zeta}{M} \left(M + \frac{\rho}{2} \right) \in B_\rho(\zeta).$$

Facciamo vedere che ζ' dista $\frac{\rho}{2}$ da ζ .

$$\zeta' - \zeta = \frac{\zeta}{M} \left(M + \frac{\rho}{2} - M \right) = \frac{\zeta}{M} \frac{\rho}{2}$$

dunque, se prendiamo il modulo:

$$|\zeta' - \zeta| = \frac{\rho}{2}.$$

Da cui $\zeta' \in B_\rho(\zeta) \subset A$, ma $\zeta' \notin B_M(0)$, il che contraddice $A \subset B_M(0)$. Quindi l'unica possibilità è che la mappa f sia costante e in tal caso tutta la mappa f va in un singolo punto (cioè la mappa non è aperta). \square

Con qualche cautela aggiuntiva, si può formulare anche un principio di minimo modulo.

Proposizione 2.48. (Teorema del minimo modulo)

Sia Ω un aperto connesso, $f \in H(\Omega)$

Se esiste $z_0 \in \Omega$ tale che $|f(z_0)| = \inf_\Omega |f| > 0$, allora f è costante.

Dimostrazione. Se $\inf_\Omega |f| > 0$, è definita $g = \frac{1}{f}$ e $g \in H(\Omega)$. Allora a g si può applicare il principio del massimo modulo.

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|f(z_0)|} = \frac{1}{\inf_\Omega |f|} = \sup_\Omega |g|$$

Quindi g è costante. Allora anche f è costante. \square

Osservazione. Nella circostanza in cui $\inf_\Omega |f| = 0$ non si può dire niente. Infatti basta prendere $f(z) = z$ in $\Omega = B_1(0)$. f non è costante, eppure $|f(0)| = 0 = \inf_\Omega |f(z)|$.

2.13 Teorema di Liouville

Definizione 2.49. *Le funzioni $f \in H(\mathbb{C})$ si dicono funzioni intere (intere nel senso che sono definite sull'intero piano).*

Teorema 2.50 (Teorema di Liouville). *Sia f intera. Se f è limitata (la sua immagine è un insieme limitato), allora è costante.*

Dimostrazione. Sia $M = \sup_{\mathbb{C}} |f| < \infty$. Come conseguenza della formula di Cauchy, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ e $\forall r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \left(\sup_{\partial B_r(z_0)} |f| \right) \cdot \frac{1}{r} \leq \frac{M}{r} \rightarrow 0$$

r positivo arbitrario. Mandiamo $r \rightarrow \infty$, quindi f è costante (infatti, essendo f è olomorfa, se non fosse costante, f' avrebbe zeri isolati). \square

Analisi Complessa

Diamo una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra usando il *teorema di Liouville*.

Teorema 2.51 (Teorema fondamentale dell'algebra). \mathbb{C} è *algebricamente completo*. Cioè, ogni polinomio

$$p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k ,$$

di grado $N \geq 1$ ($a_N \neq 0$), ha almeno una radice.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $p(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Posto

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

si ha che anche f è intera ($f \in H(\mathbb{C})$). Facciamo vedere che questa funzione f è limitata: $|f|$ è una funzione continua su tutto \mathbb{C} . E' sufficiente far vedere che $|f| \rightarrow 0$ all'infinito per ottenere che f è limitata.

$$\begin{aligned} p(z) &= a_N z^N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k \\ |p(z)| &\geq |a_N z^N| - \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k \right| \\ &= |a_N| |z|^N \left(1 - \left| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k z^k}{|a_N| |z|^N} \right| \right) \end{aligned}$$

e, poiché

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k z^k}{|a_N| |z|^N} \right| \rightarrow 0$$

per $|z| \rightarrow \infty$, si ha:

$$|p(z)| \geq |a_N| |z|^N (1 + o(1)) \rightarrow +\infty$$

per $|z| \rightarrow \infty$. Quindi:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \frac{1}{\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)|} = 0$$

Pertanto $|f|$ è una funzione $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, infinitesima all'infinito e quindi limitata. Inoltre f è olomorfa, quindi (per il teorema di Liouville) segue che f è costante. Allora anche p è costante, cioè p ha grado 0. Assurdo. \square

Generalizziamo questo risultato.

Proposizione 2.52. *Sia f intera ($f \in H(\mathbb{C})$) tale che esistono $C, R > 0$ ed N intero positivo tali che*

$$|f(z)| \leq C_N |z|^N \quad , \quad \forall z, |z| \geq R.$$

(cioè supponiamo che f non cresca più rapidamente di un polinomio) allora è un polinomio di grado al più N .

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$

$$|f^{(N+1)}(z_0)| \leq \frac{(N+1)!}{r^{N+1}} \cdot \sup_{\partial B_r(z_0)} |f|$$

Se si sceglie $r > |z_0| + R$ risulta (per la disuguaglianza triangolare) che $B_R(0) \subset B_r(z_0)$. Di conseguenza $\partial B_r(z_0)$ è esterna a $B_R(0)$, cioè $\forall z \in \partial B_r(z_0)$ si ha $|z| > R$. Quindi, $\forall z \in \partial B_r(z_0)$:

$$|f(z)| \leq C_N |z|^N$$

ma $|z|$ si maggiora così:

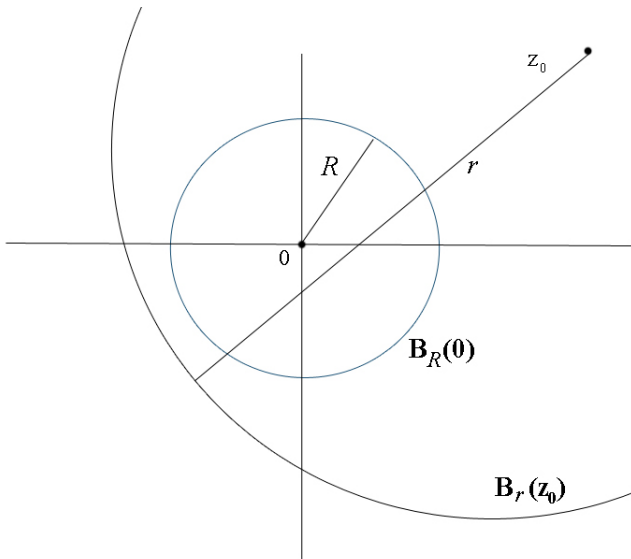
$$|z| \leq |z - z_0| + |z_0| = r + |z_0|$$

Allora:

$$\sup_{\partial B_r(z_0)} |f| \leq C_N (r + |z_0|)^N$$

Quindi, risostituendo:

$$\begin{aligned} |f^{(N+1)}(z_0)| &\leq \frac{(N+1)!}{r^{N+1}} \cdot \sup_{\partial B_r(z_0)} |f| \\ &\leq \frac{(N+1)!}{r^{N+1}} \cdot C_N (r + |z_0|)^N \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$



□

Proposizione 2.53 (Versione alternativa del teorema di Liouville). *Sia $f \in H(\mathbb{C})$ non costante. $\forall w \in \mathbb{C}, \exists \{z_n\} \subset \mathbb{C}$ tale che $f(z_n) \rightarrow w$.*

Dimostrazione. Se $w \in f(\mathbb{C})$, non c'è nulla da dire, perché: sia z tale che $f(z) = w$. Allora $z_n = z + \frac{1}{n}$.

Supponiamo che $w \notin f(\mathbb{C})$, allora $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$, $g \in H(\mathbb{C})$, g non costante (perché f non è costante). Per Liouville g non è limitata. Allora $\forall n \in \mathbb{N}, \exists z_n$ tale che $|g(z_n)| > n$. Quindi:

$$\left| \frac{1}{f(z_n) - w} \right| > n$$

$$|f(z_n) - w| < \frac{1}{n}$$

Quindi $f(z_n) \rightarrow w$. □

2.14 Convergenza uniforme e successioni di funzioni olomorfe

Definizione 2.54. *Sia Ω aperto di \mathbb{C} . Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni qualunque definite su Ω . Si dice che la successione converge uniformemente sui compatti a una funzione f se per ogni sottoinsieme compatto K di Ω si ha:*

$$\sup_K |f_n - f| \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.55. *Sia $\{f_n\} \subset H(\Omega)$ tali che f_n converge uniformemente sui compatti a una funzione f . Allora $f \in H(\Omega)$ e inoltre $\{f'_n\}$ converge uniformemente sui compatti a f' .*

Dimostrazione. Prima parte: Sia D aperto con frontiera regolare a tratti tale che $\bar{D} \subset \Omega$. Quindi \bar{D} è un compatto contenuto in Ω . Per la formula di Cauchy:

$$\int_{\partial D} f_n(z) dz = 0, \quad \forall n$$

Poiché $D \subset \bar{D}$, f_n converge uniformemente su ∂D , quindi si può scambiare limite ed integrale. Quindi, per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial D} f_n(z) dz = 0$$

Per il teorema di Morera f è olomorfa. Seconda parte: Facciamo vedere che c'è la convergenza punto per punto delle derivate prime. Se $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tale che

$\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ allora consideriamo $f(z) - f_n(z)$; questa è olomorfa in Ω e quindi possiamo usare la stima per le derivate prime:

$$|f'(z_0) - f'_n(z_0)| \leq \max_{\partial B_r(z_0)} |f - f_n| \cdot \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Infatti la frontiera della palla è un compatto dentro Ω e quindi, in virtù della convergenza uniforme, quel massimo tende a 0. E quindi almeno puntualmente c'è la convergenza per le derivate prime. Specializziamo la cosa e facciamo vedere che c'è la convergenza uniforme sui compatti. Sia $K \subset \Omega$ compatto, allora $\forall z_0 \in K$ sia $r(z_0) > 0$ tale che:

$$\overline{B_{r(z_0)}(z_0)} \subset \Omega$$

Allora

$$K \subset \bigcup_{z_0 \in K} B_{\frac{r(z_0)}{2}}(z_0)$$

Ma K è compatto, quindi da questo ricoprimento di K possiamo estrarre un sottoricoprimento finito.

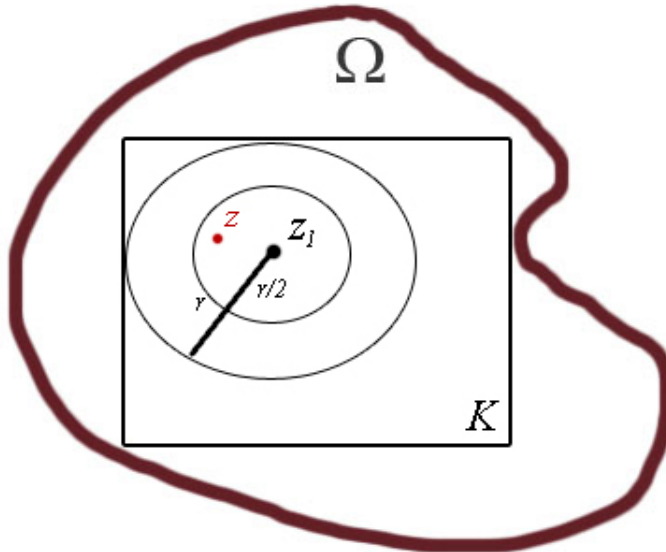
$$\exists z_1, \dots, z_M \in K$$

tali che:

$$K \subset \bigcup_{m=1}^M B_{\frac{r(z_m)}{2}}(z_m)$$

Allora $\forall z \in K$, $\exists m \in \{1, \dots, M\}$ tale che

$$z \in B_{\frac{r(z_m)}{2}}(z_m)$$



Preso

$$\begin{aligned} z &\in B_{\frac{r(z_m)}{2}}(z_m) \\ |f'(z) - f'_n(z)| &\leq \max_{\partial B_{\frac{r(z_m)}{2}}(z)} |f - f_n| \\ &\leq \frac{2}{r(z_m)} \max_{\partial B_{r(z_m)}(z_m)} |f - f_n| \end{aligned}$$

Con queste palline ricopriamo tutto K , quindi:

$$\max_{z \in K} |f'(z) - f'_n(z)| \leq \max_{m=1, \dots, M} \frac{2}{r(z_m)} \max_{\partial B_{r(z_m)}(z_m)} |f - f_n|$$

Per $n \rightarrow \infty$ quest'ultimo membro tende a 0.

Quindi abbiamo ottenuto che sul compatto arbitrario K le derivate prime convergono uniformemente. \square

Capitolo 3

Singolarità isolate

3.1 Singolarità rimovibili, polari, essenziali

Definizione 3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $z_0 \in \Omega$. Se $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ si dice che z_0 è un punto di singolarità isolata per f .

Esempio. 0 è singolarità isolata per $f(z) = \frac{1}{z}$.

Ci sono però funzioni che si definiscono su un insieme bucato in un punto e però si possono estendere come funzioni olomorfe anche a quel punto.

Definizione 3.2. Se $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ si può estendere al punto z_0 in modo che f risulta olomorfa in Ω si dice che z_0 è punto di singolarità rimovibile (o eliminabile).

Esempio. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ è definita per $z \neq 0$, ma se la si estende ponendo $f(z) = 1$ per $z = 0$ risulta olomorfa ovunque. Infatti, f così estesa è rappresentabile in serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Teorema 3.3 (Criterio di rimovibilità). Sia $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Se $\exists M, r > 0$ tali che $B_r(z_0) \subset \Omega$ e $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ allora z_0 è una singolarità rimovibile.

Dimostrazione. Introduciamo una nuova funzione

$$g(z) = \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0)^2 & \text{quando } z \neq z_0 \\ 0 & \text{quando } z = z_0 \end{cases}$$

$g \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ ma è anche derivabile in senso complesso in z_0 , perché:

$$\frac{|g(z) - g(z_0)|}{|z - z_0|} \leq M \frac{|z - z_0|^2}{|z - z_0|} \rightarrow 0$$

Conclusione: g è derivabile in senso complesso in tutti i punti di Ω , quindi $g \in H(\Omega)$ (teorema di Goursat: $g \in \mathcal{C}^1$).

Quindi è rappresentabile in serie di potenze e per $|z - z_0| < \rho \leq r$ vale:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Però sappiamo anche che:

$$|g(z)| \leq M |z - z_0|^2$$

quindi i primi due termini della serie devono essere necessariamente 0 (perché l'ordine di zero di g è almeno 2).

$$g(z) = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+2} (z - z_0)^k$$

Allora definiamo l'estensione di f come:

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{quando } z \neq z_0 \\ c_2 & \text{quando } z = z_0 \end{cases}$$

la quale avrà rappresentazione

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+2} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho$$

Questo ci dice che la singolarità è rimovibile. □

Se prendiamo $\frac{1}{(z - z_0)^k}$ con $k = 1, 2, \dots$, osserviamo che queste sono funzioni che hanno singolarità non rimovibili, il cui modulo diverge avvicinandosi al punto di singolarità. Ci domandiamo se questo è il comportamento tipico in una singolarità non rimovibile. Negli zeri abbiamo visto che il comportamento di una funzione olomorfa è quello di una potenza positiva di $z - z_0$. Per le singolarità, abbiamo una suddivisione in tre possibili tipi di comportamento.

Teorema 3.4. *Sia $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$, $z_0 \in \Omega$. Si danno tre casi:*

1. z_0 è una **singolarità rimovibile**.
2. z_0 è una **singolarità polare**, ovvero $\exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ con $c_m \neq 0$ tali che

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - z_0)^k} \tag{3.1}$$

ha una singolarità rimovibile.

3. z_0 è una **singolarità essenziale** ovvero: $\forall r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset \Omega$

$$f(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$$

è un insieme **denso** in \mathbb{C} .

Nota: Ovviamente 3) è esclusiva delle altre due. Se z_0 è una singolarità rimo-
vibile, f si estende in modo olomorfo a quel punto; quindi se ci stringiamo in
vicinanza di quel punto, l'immagine di un intornino sempre più stretto sarà un
intornino sempre più stretto nell'immagine (qualcosa che non è denso in \mathbb{C}).

Se z_0 è una singolarità polare, la somma di potenze negative che compare in
(3.1) diverge in modulo quando $z \rightarrow z_0$. Quindi, se siamo in un intorno del pun-
to di singolarità, l'immagine è un intorno del punto all'infinito e quindi neanche
in questo caso si verifica la condizione descritta in 3).

Dimostrazione. Usiamo lo stesso argomento già usato nella dimostrazione della
versione alternativa del Teorema di Liouville. Supponiamo che non valga la terza
condizione. Negando la condizione espressa in 3), si ha che esistono $w \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$
e $r > 0$ tali che:

$$|f(z) - w| > \delta \quad , \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

Prendiamo, per ogni $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$,

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\delta} .$$

Per il teorema visto prima, $g(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0 . Quindi,
estendendo opportunamente g in 0, otteniamo una funzione olomorfa la quale è
svilupabile in serie di potenze:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k .$$

Consideriamo il primo addendo non nullo. Sia $m \geq 0$ tale che

$$a_m \neq 0 \quad e \quad a_k = 0 \quad \forall k < m$$

quindi abbiamo, come prima

$$g(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k$$

e chiamiamo

$$h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k$$

Analisi Complessa

che è un'altra funzione olomorfa con la peculiarità che $h(z_0) \neq 0$. Ritornando alla f :

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)}$$

$h(z)$ non si annulla in z_0 quindi $\frac{1}{h(z)}$ è ancora olomorfa in un intorno di z_0 ; quindi definiamo:

$$k(z) = \frac{1}{h(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k \quad , \quad b_0 = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(z) &= w + \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot k(z) \\ &= w + \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot (b_0 + b_1(z - z_0) + \dots + b_m(z - z_0)^m + \dots) \\ &= w + \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots \end{aligned}$$

quindi possiamo raccogliere questa espressione in due addendi: uno che è una somma finita di termini con potenze negative e poi una serie di potenze nonnegative (w lo possiamo accorpere con b_m).

$$= \left[\frac{c_m}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_1}{(z - z_0)} \right] + [(w + b_m) + b_{m+1}(z - z_0) + \dots]$$

m può essere anche 0 (perché g potrebbe non annullarsi) e allora non ci sono neanche i primi termini singolari.

Quindi, o c'è una singolarità polare, se $m \geq 1$, oppure si parte direttamente dalla serie di potenze ($m = 0$) e abbiamo una singolarità rimovibile. \square

3.2 Serie di Laurent

Consideriamo una somma della seguente forma, detta *Serie di Laurent*,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

intesa come somma delle due serie

$$(p) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad e \quad (n) \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

La serie (p) avrà un raggio di convergenza R , $0 \leq R \leq \infty$. Posto $w = \frac{1}{z}$, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} w^k$$

avrà raggio di convergenza S , $0 \leq S \leq \infty$. Quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$$

convergerà per $|z| > \frac{1}{S}$. Quindi, mettendo insieme queste due serie (p) e (n), abbiamo un oggetto che ha senso quando $|z|$ verifica simultaneamente le due condizioni $|z| < R$ e $|z| > \frac{1}{S}$. Quindi l'insieme di convergenza della serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

è l'insieme vuoto o una corona circolare, che potrà essere una corona circolare degenerata se R o S è ∞ .

Se l'insieme dei punti z che verificano la condizione $\frac{1}{S} < |z| < R$ è non vuoto, all'interno di questa corona circolare la somma della serie è effettivamente una funzione olomorfa, in quanto limite uniforme sui compatti delle somme parziali. Quindi possiamo anche derivare termine a termine all'interno della corona circolare, quante volte vogliamo. In particolare:

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

3.3 Rappresentazione in serie di Laurent

Da un altro punto di vista: partiamo da una funzione olomorfa in una corona circolare, vediamo se possiamo rappresentare questa funzione come serie di Laurent. Premettiamo un lemma.

Lemma 3.5. *Sia $g \in H(B_R(z_0) \setminus \overline{B_\rho(z_0)})$, con $0 \leq \rho < R \leq +\infty$. Allora $\forall r \in (\rho, R)$*

$$\int_{\partial B_r(z_0)} g(z) dz$$

è indipendente da r .

Dimostrazione. Siano r_1, r_2 tali che $\rho < r_1 < r_2 < R$. Sia

$$G = B_{r_2}(z_0) \setminus \overline{B_{r_1}(z_0)}$$

abbiamo che $\overline{G} \subset B_R(z_0) \setminus \overline{B_\rho(z_0)}$, quindi per l'identità di Cauchy

$$\int_{\partial G} g(z) dz = 0.$$

La frontiera di G , orientata positivamente, ha la circonferenza esterna orientata nel verso antiorario e quella interna orientata nel verso orario:

$$\partial G = \partial B_{r_2}(z_0) - \partial B_{r_1}(z_0)$$

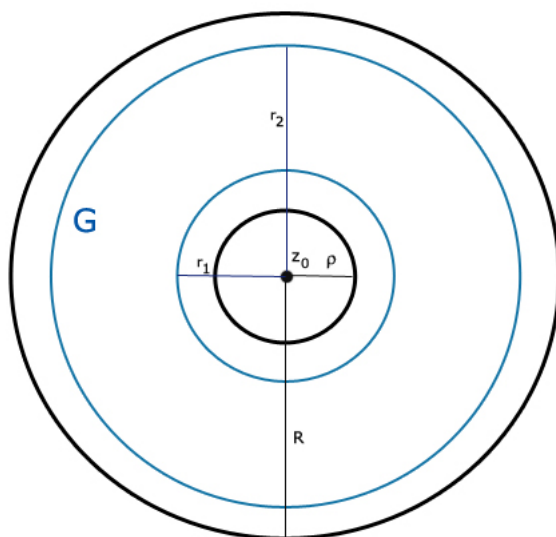
allora:

$$0 = \int_{\partial G} g(z) dz = \int_{\partial B_{r_2}(z_0)} g(z) dz - \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} g(z) dz$$

quindi:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} g(z) dz$$

è indipendente da r . □



Teorema 3.6 (Teorema di rappresentazione in serie di Laurent). *Sia $f \in \mathcal{H}(B_R(z_0) \setminus \overline{B_\rho(z_0)})$ con $0 \leq \rho < R \leq +\infty$. Allora f si rappresenta in serie di Laurent:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dove i coefficienti a_n sono dati da:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$\forall r \in (\rho, R) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

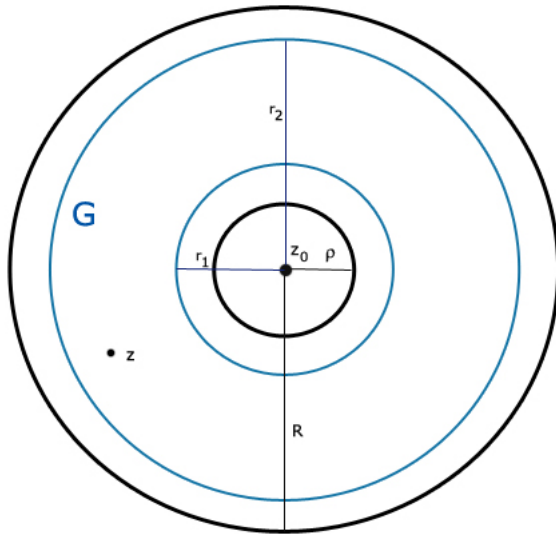
e la serie di Laurent converge nella corona: $B_R(z_0) \setminus \overline{B_\rho(z_0)}$.

Nota 1: Se $\rho = 0$ si intende $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$

Nota 2: a_n dipende solo dall'indice n e da f (non da r) per il lemma precedente.

Dimostrazione. Preso $z \in B_R \setminus \overline{B_\rho}$. $\rho < r_1 < |z| < r_2 < R$. Per la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial B_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$



Trattiamo il primo integrale come nel teorema di rappresentazione fatto per la serie di Taylor. Dal secondo integrale, invece, si ricavano i termini con potenze negative. Consideriamo allora:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta \end{aligned}$$

A questo punto, invece di raccogliere $(\zeta - z_0)$, raccogliamo $(z - z_0)$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \end{aligned}$$

Ponendo $n = -(k + 1)$:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.7. Sia $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

il suo sviluppo di Laurent. Si ha quanto segue:

1. z_0 è una singolarità rimovibile se e solo se $a_n = 0, \forall n < 0$.
2. z_0 è un polo se e solo se esiste un $m < 0$ tale che $a_m \neq 0$ e $a_n = 0 \forall n < m$.
3. z_0 è singolarità essenziale se e solo se esistono infiniti indici negativi n tali che $a_n \neq 0$.

Diamo ora qualche esempio.

Esempio 1.

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{\sin(z^4)}$$

Che singolarità ha nel punto $z = 0$?

$$\begin{aligned} \cos(z) - 1 &= -\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \dots \\ &= z^2 \cdot h(z) \quad \text{con} \quad h(0) \neq 0 \end{aligned}$$

Invece

$$\sin(z^4) = z^4 - \frac{z^{12}}{3!} + \dots = z^4 \cdot k(z) \quad \text{con} \quad k(0) \neq 0$$

allora

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{\sin(z^4)} = \frac{1}{z^2} g(z)$$

con $g(0) \neq 0$ e $g(z) = a_0 + a_1 z + \dots$, quindi $z = 0$ è un polo di ordine due, poiché:

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{\sin(z^4)} = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + \dots$$

Esempio 2.

$$f(z) = \frac{(\sin(z))^2}{\sin(z^2)} \quad z \neq 0$$

si osserva che

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$$

quindi $f(z)$ è limitata in un intorno di $z = 0$. Allora $z = 0$ è una singolarità rimovibile.

Esempio 3.

$$f(z) = e^{1/\sin(z)}$$

Prima consideriamo:

$$g(w) = e^{\frac{1}{w}}$$
$$e^{\frac{1}{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} w^{-n}$$

$w = 0$ singolarità essenziale. Cosa succede se questa funzione la componiamo ulteriormente con $\sin(z)$?

$$f(z) = g(\sin(z))$$

$\forall \rho > 0$, $g(B_\rho(0) \setminus \{0\})$ è denso in \mathbb{C} . $\sin(z)$ manda 0 in 0 ed è aperta. Quindi $\forall r > 0$, $\sin(B_r(0)) = U_r$, dove U_r è un intorno aperto di 0. Quindi $\exists \rho > 0$ tale che U_r contiene $B_\rho(0)$. Di conseguenza:

$$f(B_r(0) \setminus \{0\}) = g(U_r \setminus \{0\}) \supset g(B_\rho(0) \setminus \{0\})$$

è denso in \mathbb{C} , quindi 0 è una singolarità essenziale.

Capitolo 4

Calcolo dei residui

Osservazione. Prendiamo un dominio G con frontiera regolare a tratti e sia $z_0 \in G$. Preso $n \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{dz}{z - z_0} = \text{Ind}_{\partial G}(z_0) = 1 & \text{se } n = -1, \\ 0 & \text{se } n \neq -1. \end{cases}$$

Infatti, per $n \neq -1$, $(z - z_0)^n$ è la derivata (a meno di un fattore) di $\frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$. Quindi abbiamo l'integrale su un cammino chiuso di una derivata e questo è $= 0$. L'unico caso in cui $(z - z_0)^n$ non è la derivata di un'altra potenza è quando $n = -1$. Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} (z - z_0)^{-1} dz$$

è particolarmente significativo. Se abbiamo una funzione olomorfa con varie singolarità isolate, quello che effettivamente conta nel calcolo degli integrali sono i coefficienti di indice -1 nello sviluppo locale di Laurent fatto sulle singolarità isolate.

Definizione 4.1. Sia $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$, sia:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

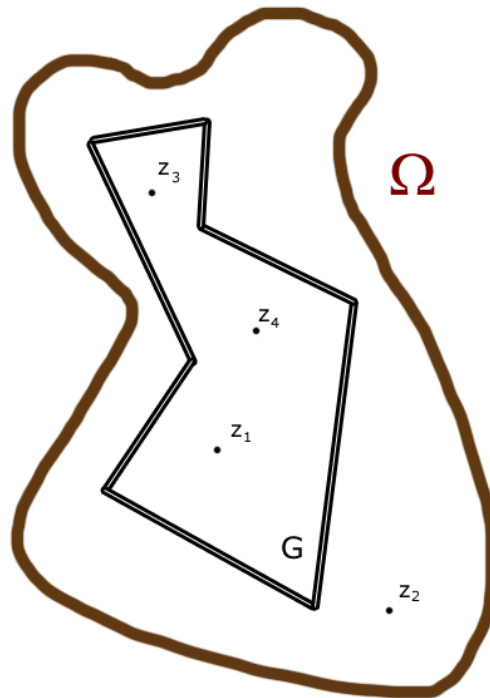
lo sviluppo di Laurent di f centrato in z_0 . Sia $r > 0$ tale che $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Chiamiamo residuo di f in z_0 il numero

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) d\zeta$$

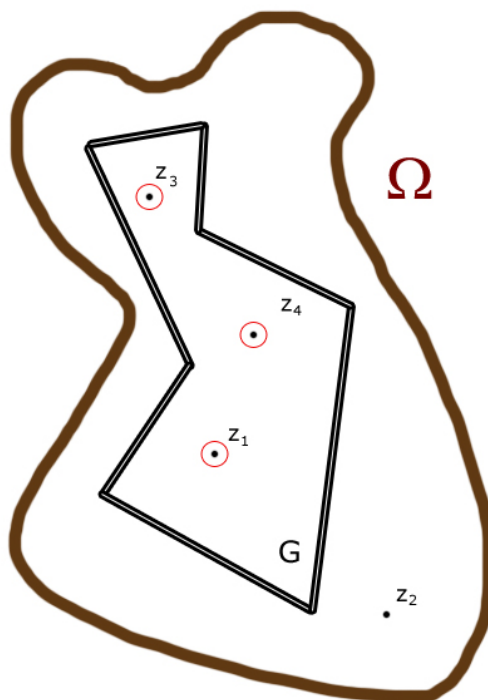
4.1 Teorema dei residui

Teorema 4.2 (Teorema dei residui). *Sia $f \in H(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$. Sia G aperto con frontiera regolare a tratti tale che $\overline{G} \subset \Omega$ e $z_1, \dots, z_k \notin \partial G$. Allora si ha*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = \sum_{z_k \in G} \text{Res}(f, z_k)$$



Dimostrazione. Se $z_i \in G$, $\exists r > 0$ tale che $\overline{B_r(z_i)} \subset G$; siccome z_1, \dots, z_k sono in un numero finito, possiamo prendere r che va bene per tutti i punti di singolarità interni a G .



Poniamo

$$D = G \setminus \bigcup_{z_i \in G} \overline{B_r(z_i)}$$

e osserviamo che è un aperto con frontiera regolare a tratti. Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta = 0$$

e sappiamo che, se z_{j_1}, \dots, z_{j_K} sono i punti di singolarità interni a G

$$\partial D = \partial G - \partial B_r(z_{j_1}) - \dots - \partial B_r(z_{j_K})$$

allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = \sum_{z_i \in G} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_i)} f(\zeta) d\zeta = \sum_{z_i \in G} \text{Res}(f, z_i)$$

□

4.2 Regole di calcolo dei residui

Polo del prim'ordine. Supponiamo che f abbia una singolarità polare di ordine 1 in z_0 , avremo quindi uno sviluppo di Laurent così fatto

$$f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

se moltiplichiamo ambo i membri per $z - z_0$, otteniamo

$$a_{-1} = (z - z_0)f(z) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n+1}$$

da cui

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] .$$

Polo del prim'ordine, regola pratica. Se f si scrive

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

dove ϕ, ψ sono due funzioni olomorfe in un intorno di z_0 , tali che $\phi(z_0) \neq 0$ e z_0 è uno zero del prim'ordine per ψ , allora si calcola:

$$\begin{aligned} Res(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0) \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{\phi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{(z - z_0)}} \right] = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)} . \end{aligned}$$

Polo d'ordine $m > 1$. Supponiamo che f abbia una singolarità polare di ordine $m > 1$ in z_0 , in questo caso avremo uno sviluppo di Laurent così fatto

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

moltiplichiamo ambo i membri per $(z - z_0)^m$,

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{m+n}$$

quindi in questo caso a_{-1} è il coefficiente di ordine $m - 1$ nello sviluppo di Taylor della funzione $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, ovvero

$$a_1 = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

in altri termini

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \right] .$$

4.3 Integrali impropri e calcolo dei residui

Teorema 4.3. *Siano z_1, \dots, z_K punti con parte immaginaria positiva e sia f olomorfa nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\} \setminus \{z_1, \dots, z_K\}$. Supponiamo che esistano $\alpha, R > 0$ tali che:*

$$|f(z)| \leq C|z|^{-1-\alpha} \quad , \quad \forall |z| \geq R \quad (4.1)$$

e supponiamo che f si estenda con continuità fino alla retta reale $\mathbb{R} = \{\Im z = 0\}$. Allora abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^K \text{Res}(f, z_k) \quad (4.2)$$

Dimostrazione. Notiamo intanto che la condizione (4.1) garantisce la convergenza assoluta dell'integrale (doppiamente) improprio in (4.2). Si prende $\rho > R$, si considera $G_\rho = \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0, |z| < \rho\}$. Abbiamo

$$\partial G_\rho = [-\rho, \rho] + \gamma_\rho^+$$

dove $[-\rho, \rho]$ è l'intervallo in \mathbb{R} e γ_ρ^+ è la semicirconferenza di raggio ρ nel semipiano $\{\Im z > 0\}$. Si osserva che per (4.1) si ha

$$\left| \int_{\gamma_\rho^+} f(z)dz \right| \leq C\rho^{-\alpha}\pi \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow \infty$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\partial G_\rho} f(z)dz .$$

Applicando il calcolo dei residui a f integrata su ∂G_ρ si ottiene la tesi. \square

Esempio.

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

questa funzione verifica la condizione (4.1) e ha due sole singolarità nei punti $i, -i$, e solo i è nel semipiano superiore. Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \pi .$$

Nel seguito tratteremo integrali sulla retta di funzioni della forma $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$ con f che verifica un'ipotesi più debole della (4.1), per cui non è garantita la convergenza degli integrali impropri a $+\infty$ e $-\infty$. Per questa ragione introduciamo una nozione rilassata di integrale, che prende il nome di *integrale in valore principale* dato dal seguente limite (se esiste)

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R g(x)dx .$$

Teorema 4.4. Siano z_1, \dots, z_K punti con parte immaginaria positiva e sia f olomorfa in $\{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\} \setminus \{z_1, \dots, z_K\}$ tale che:

$$\max_{|z|=R, \Im z > 0} |f(z)| \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty. \quad (4.3)$$

Supponiamo inoltre che f si estenda con continuità fino a $\{\Im z = 0\}$. Allora, per ogni $\alpha > 0$ esiste l'integrale in valore principale di $f(x)e^{i\alpha x}$ e vale:

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^K \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k).$$

Facciamo precedere alla dimostrazione di questo teorema il seguente.

Teorema 4.5 (Lemma di Jordan). Sia g continua nell'insieme ottenuto da un semipiano meno un semicerchio, così descritto

$$\{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0, |z| \geq R_0\}$$

e sia g tale che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \max_{|z|=R, \Im z \geq 0} |g(z)| = 0$$

Allora per ogni $\alpha > 0$ vale:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{|z|=R, \Im z \geq 0\}} g(z)e^{i\alpha z} dz = 0$$

Dimostrazione del Lemma di Jordan. Sia

$$M_R = \max_{|z|=R, \Im z \geq 0} |g(z)| \rightarrow 0$$

valutiamo:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\{|z|=R, \Im z \geq 0\}} g(z)e^{i\alpha z} dz \right| \leq \\ & \leq \int_0^\pi |g(Re^{i\theta})| e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta \leq \\ & \leq M_R \int_0^\pi R e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = \end{aligned}$$

ed, essendo il seno simmetrico pari rispetto a $\frac{\pi}{2}$, si prosegue:

$$= 2M_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta.$$

Dato che $\sin \theta$ è una funzione concava in $[0, \frac{\pi}{2}]$, si ottiene:

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$$

pertanto

$$\left| \int_{\{|z|=R, \Im mz \geq 0\}} g(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq 2M_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\frac{\alpha R 2\theta}{\pi}} d\theta =$$

e cambiando variabile $t = R\theta$:

$$= 2M_R \int_0^{\frac{R\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha 2t}{\pi}} dt \leq$$

allargando l'intervallo di integrazione:

$$\begin{aligned} &\leq 2M_R \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha 2t}{\pi}} dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\alpha} M_R \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione del Teorema 4.4. Analogamente a quanto fatto nel Teorema 4.3 si considera $G_R = \{z \in \mathbb{C} | \Im mz > 0, |z| < R\}$ e abbiamo

$$\partial G_R = [-R, R] + \gamma_R^+$$

Possiamo applicare il *lemma di Jordan*:

$$\left| \int_{\gamma_R^+} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty$$

e otteniamo che:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^K \text{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_k).$$

□

4.4 Funzioni meromorfe

Definizione 4.6. Una funzione $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ si dice meromorfa se per ogni $z_0 \in \Omega$, esiste un intorno U di z_0 e due funzioni $f, g \in H(U)$, $g \neq 0$ tali che $\phi = \frac{f}{g}$ su U .

Osservazione. Una funzione ϕ è meromorfa in Ω se e solo se ϕ è una funzione olomorfa con singolarità isolate solo polari.

Sia ϕ meromorfa in Ω non identicamente nulla, sia K compatto $\subset \Omega$. K contiene un numero finito di zeri di ϕ : z_1, \dots, z_J e un numero finito di poli: w_1, \dots, w_K . Sia m_j la molteplicità dello zero z_j (cioè, in vicinanza di z_j si ha: $\phi(z) \sim (z - z_j)^{m_j}$), sia p_k l'ordine del polo w_k (ovvero, vicino w_k : $\phi(z) \sim (z - w_k)^{-p_k}$).

Teorema 4.7 (Principio dell'argomento). *Sia ϕ una funzione meromorfa in Ω non identicamente nulla. Sia $G \subset \bar{G} \subset \Omega$ un aperto con frontiera regolare e tratti tale che ∂G non contiene nessun polo né zero di ϕ . Sia N la somma delle molteplicità degli zeri di ϕ dentro G e P la somma degli ordini dei poli in G . Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = N - P$$

Dimostrazione. Se ϕ è meromorfa, anche $\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ è una funzione meromorfa in Ω .

I poli in G della funzione meromorfa $\frac{\phi'}{\phi}$ sono gli zeri e i poli di ϕ .

Se z_j è uno zero di molteplicità m_j per ϕ .

$$\phi(z) = a_{m_j}(z - z_j)^{m_j}(1 + g(z))$$

dove g è olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z_0) = 0$

$$\phi'(z) = m_j a_{m_j}(z - z_j)^{m_j-1}(1 + h(z))$$

e anche qui, h è olomorfa in un intorno di z_0 e $h(z_0) = 0$

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{m_j}{(z - z_j)} \frac{1 + h(z)}{1 + g(z)} = \frac{m_j}{(z - z_j)} (1 + r(z))$$

dove, di nuovo, r è olomorfa in un intorno di z_0 e $r(z_0) = 0$, quindi

$$\text{Res} \left(\frac{\phi'}{\phi}, z_j \right) = m_j .$$

Se w_k è un polo di ordine p_k :

$$\phi(z) = \frac{a_{-p_k}}{(z - w_k)^{p_k}} (1 + g(z))$$

$$\phi'(z) = \frac{a_{-p_k} \cdot (-p_k)}{(z - w_k)^{p_k+1}} (1 + h(z))$$

dove, come sopra, g, h sono olomorfe in un intorno di z_0 e nulle in quel punto,

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{-p_k}{(z - w_k)} (1 + r(z))$$

dove, ancora, r è olomorfa in un intorno di z_0 e $r(z_0) = 0$, quindi

$$\text{Res} \left(\frac{\phi'}{\phi}, w_k \right) = -p_k .$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz &= \sum_j \text{Res} \left(\frac{\phi'}{\phi}, z_j \right) + \sum_k \text{Res} \left(\frac{\phi'}{\phi}, w_k \right) = \\ &= \sum_j m_j - \sum_k p_k = N - P . \end{aligned}$$

□

4.5 Teorema di Rouchè

Teorema 4.8 (Teorema di Rouchè). *Siano $f, g \in H(\Omega)$ e sia $G \subset \overline{G} \subset \Omega$ un aperto con frontiera regolare a tratti. Sia $N(f)$ il numero di zeri di f in G (contati con le rispettive molteplicità) e sia $N(g)$ il numero di zeri di g in G (sempre contati con le rispettive molteplicità). Se vale*

$$|f - g| < |f| + |g| \text{ su } \partial G \quad (4.4)$$

allora

$$N(f) = N(g) .$$

Dimostrazione. Se vale (4.4), sulla frontiera di G si ha $|f|, |g| > 0$, quindi né f né g hanno zeri sul bordo. Posto $\phi = \frac{f}{g}$, ϕ è una funzione meromorfa in Ω che non ha né zeri né poli su ∂G . Utilizziamo il principio dell'argomento e proviamo che:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\phi'}{\phi} dz = N(f) - N(g) .$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{\phi'}{\phi} &= \frac{g}{f} \cdot \left(\frac{f'g - fg'}{g^2} \right) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\phi'}{\phi} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'}{f} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g'}{g} dz = N(f) - N(g) . \end{aligned}$$

Ora si tratta di valutare l'integrale sulla sinistra. Dividendo per $|g|$ in (4.4):

$$\begin{aligned} |\phi - 1| &< |\phi| + 1 \\ |\phi - 1|^2 &< (|\phi| + 1)^2 \\ |\phi|^2 - 2\Re\phi + 1 &< |\phi|^2 + 2|\phi| + 1 \\ \Re\phi + |\phi| &> 0 . \end{aligned}$$

Posto $\phi = a + ib$ si ha che $\sqrt{a^2 + b^2} + a > 0$ che è ovviamente verificata se $b \neq 0$. Se invece $b = 0$ si ha $|a| + a > 0$ che è vera solo se $a > 0$. Pertanto

$$\Re\phi + |\phi| > 0$$

è verificata se e solo se $\phi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Qui si intende: $\mathbb{R}^- = \{z = x + i0 | x \leq 0\}$. Per continuità, esiste un aperto U tale che $\partial G \subset U \subset \Omega$ per cui la condizione $|\phi - 1| < |\phi| + 1$ continua a valere. Questo significa che $\phi(U) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. In $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ abbiamo definito la funzione logaritmo principale, pertanto è ben definita la funzione $\Phi(z) = \text{Log}(\phi(z))$, $z \in U$. Si ha che $\Phi \in H(U)$ e risulta $\Phi'(z) = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$. Quindi

$$N(f) - N(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\phi'}{\phi} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \Phi'(z) dz = 0$$

perché $\Phi'(z)$ è la derivata di una funzione olomorfa su un aperto che contiene questo cammino chiuso. Allora $N(f) = N(g)$. \square

Osservazione. Nella pratica, si usa il teorema di Rouchè per calcolare il numero di zeri di una funzione f confrontandola con una funzione g i cui zeri sono noti. In questa circostanza, risulta più conveniente verificare la condizione $|f-g| < |g|$ sul bordo, che ovviamente implica la (4.4).

Esercizio. Quanti zeri ha $f(z) = z^7 + 5z^3 - z - 2$ in $|z| < 1$? Scegliamo $g(z) = 5z^3$, che ha un solo zero di molteplicità 3 in 0. Si ha:

$$|f - g| = |z^7 - z - 2| \leq 4 < 5 = |g| \text{ se } |z| = 1 .$$

Quindi su $|z| = 1$ si ha $|f - g| < |g|$. Di conseguenza $N(f) = 3$ in $B_1(0)$.

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.9. *Preso il polinomio $p(z) = z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \dots + a_0$ si ponga*

$$M = \max_{k=0, \dots, N-1} |a_k|$$

allora tutti gli zeri di p si trovano in $B_{M+1}(0)$.

Dimostrazione. Si considera $g(z) = z^N$ e osserviamo che:

$$|g| = (M + 1)^N \text{ su } |z| = M + 1 ,$$

allora, se $|z| = M + 1$

$$|p - g| = \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} M(M + 1)^k = (M + 1)^N - 1 < |g|$$

e la tesi segue dal teorema di Rouché. □

Capitolo 5

Funzioni armoniche

Prendiamo $f \in H(\Omega)$. Sappiamo che parte reale e parte immaginaria di $f = u + iv$ sono legate dalle equazioni di Cauchy-Riemann:

$$v_x = -u_y$$

$$v_y = u_x .$$

Sappiamo anche che una funzione olomorfa è differenziabile infinite volte e quindi anche parte reale e parte immaginaria avranno derivate parziali di ogni ordine. Quindi possiamo derivare nelle equazioni di Cauchy-Riemann. In particolare:

$$v_{xy} = -u_{yy}$$

$$v_{xy} = u_{xx} .$$

Eliminando v_{xy} si ottiene:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 .$$

Analogamente, si ha anche:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 .$$

Le funzioni che verificano questa equazione alle derivate parziali del second'ordine costituiscono una notevole classe di funzioni che si chiamano *funzioni armoniche*.

Definizione 5.1. Una funzione $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ si dice armonica se verifica

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{5.1}$$

L'equazione (5.1) si chiama *equazione di Laplace*. l'operatore differenziale dato da $\partial_x^2 + \partial_y^2$ si dice *Laplaciano* e si indica con Δ .

5.1 Armonica coniugata

Se partiamo da una funzione olomorfa abbiamo automaticamente due funzioni armoniche: la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Rovesciamo la questione: se partiamo da una funzione armonica, è questa la parte reale di una funzione olomorfa? Introduciamo intanto il seguente concetto.

Definizione 5.2. *Preso u armonica in Ω , una funzione armonica v si dice coniugata di u se $f = u + iv$ è olomorfa.*

Data una funzione armonica u , questa è dotata di un'armonica coniugata v se e solo se u, v verificano le equazioni di Cauchy-Riemann. Quindi, presa una funzione armonica u , consideriamo il suo gradiente e ruotiamolo di 90 gradi; se il campo vettoriale così ottenuto è ancora un gradiente, significa che esiste un'armonica coniugata. Notiamo che se Ω è connesso e se la coniugata esiste, questa è unica a meno di una costante additiva.

Esempio 1: $u(x, y) = x$, $u = \Re(z)$ e la funzione $z \rightarrow z$ è ovviamente olomorfa. Quindi c'è un'armonica coniugata, ed è $v(x, y) = y$.

Esempio 2: $u(x, y) = x^2 - y^2$ è armonica perché la somma delle derivate seconde pure dà 0.

$u(x, y) = \Re(z^2)$ e quindi $v(x, y) = 2xy$ è la coniugata.

Esempio 3: La funzione $u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ è definita per $(x, y) \neq (0, 0)$. Questa è armonica. Osserviamo che si ha

$$\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}} = 4\partial_{\bar{z}}\partial_z .$$

Allora per calcolare Δu , conviene scrivere:

$$u(x, y) = \log |z| = \frac{1}{2} \log(z\bar{z})$$

e quindi

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 2\partial_z\partial_{\bar{z}}(\log(z\bar{z})) \\ &= 2\partial_z\left(\frac{z}{z\bar{z}}\right) = 2\partial_z\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0 \end{aligned}$$

per ogni $z \neq 0$.

Quindi $\log |z|$ è una funzione armonica. E' questa la parte reale di una funzione olomorfa? Localmente sì, perché fissato $z_0 \neq 0$ e presa γ una semiretta uscente dall'origine e tale che $z_0 \notin \gamma$, è possibile selezionare una singola determinazione olomorfa del logaritmo complesso definita in $\mathbb{C} \setminus \gamma$ di cui $\log |z|$ è la parte reale e la parte immaginaria sarà una determinazione dell'argomento. Se consideriamo come dominio tutto \mathbb{C} tolto il punto 0, sappiamo che la funzione argomento ha infinite determinazioni. Quindi $\log |z|$ è una funzione armonica che non ha globalmente un'armonica coniugata.

5.1.1 Esistenza locale dell'armonica coniugata

Individuiamo un criterio sufficiente per stabilire l'esistenza di un'armonica coniugata. Per fare ciò ricordiamo un criterio sufficiente che garantisce, per una funzione olomorfa, l'esistenza di una primitiva, cioè un'altra funzione olomorfa la cui derivata ci dà la funzione da cui siamo partiti. Lo richiamiamo nel seguente teorema.

Teorema 5.3. *Sia Ω aperto convesso e sia $f \in H(\Omega)$. Allora esiste $F \in H(\Omega)$ tale che $F' = f$.*

Osservazione. La condizione di convessità non è quella ottimale, però è sufficiente per l'uso che ne faremo. Noi l'applicheremo sostanzialmente solo al caso di palle.

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in \Omega$; $\forall z \in \Omega$, per la convessità $[z_0, z] \subset \Omega$. Poniamo:

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$$

si verifica che F è differenziabile e che $F' = f$. □

Teorema 5.4. *Sia u armonica in un aperto convesso Ω , allora esiste un'armonica coniugata v .*

Per noi u è una funzione armonica se è C^2 , a valori reali, che verifica l'equazione di Laplace; ed è chiaro che la nozione di armonica coniugata ha senso se u è a valori reali. Ciò non toglie che si possano studiare anche funzioni armoniche a valori complessi: semplicemente funzioni a valori complessi in cui separatamente parte reale e parte immaginaria siano armoniche. Allora:

Definizione 5.5. $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ si dice armonica se $\Delta\phi = 0$.

Questa nozione ci serve per il seguente lemma, che useremo per dimostrare il Teorema 5.4.

Lemma 5.6. *Sia Ω convesso e $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ armonica. Allora esistono due funzioni $f, g \in H(\Omega)$ tali che $\phi = f + \bar{g}$.*

Spiegazione: Se $f \in H(\Omega)$, la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono armoniche e quindi una funzione olomorfa è automaticamente armonica. \bar{g} è una funzione antiolomorfa e anche questa ha parte reale e parte immaginaria che sono funzioni armoniche. Funzioni così fatte sono dunque armoniche. Questo lemma ci dice che tutte le funzioni armoniche da un aperto convesso in \mathbb{C} hanno questa rappresentazione.

Dimostrazione del Lemma.

$$4\partial_{\bar{z}}\partial_z \phi = 0$$

quindi $h = \partial_z \phi$ è una funzione olomorfa, perché verifica Cauchy-Riemann. Siamo in Ω , aperto convesso, quindi h è dotata di primitiva. Allora esiste $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ tale che $h = f' = \partial_z f$. Ora: $\partial_z \phi = h = \partial_z f$, cioè $\partial_z(\phi - f) = 0$. Quindi $\phi - f$ è antiolomorfa, cioè $\overline{\phi - f} \in \mathbf{H}(\Omega)$. Poniamo

$$g = \overline{\phi - f}$$

quindi $\phi = f + \bar{g}$. □

Dimostrazione del Teorema 5.4. u è armonica a valori reali (e quindi, in particolare, a valori complessi) in Ω convesso: possiamo applicare il lemma appena dimostrato. Esistono $f, g \in \mathbf{H}(\Omega)$ tali che $u = f + \bar{g}$. Ma u è a valori reali, cioè: $\bar{u} = u$. Quindi $u = \bar{f} + g$. Sommiamo e otteniamo:

$$2u = f + \bar{f} + g + \bar{g}.$$

Quindi

$$u = \frac{(f + g) + \overline{(f + g)}}{2} = \Re(f + g).$$

Quindi u è la parte reale della funzione olomorfa $f + g$ e $v = \Im(f + g)$ è l'armonica coniugata di u . □

5.2 Formula di Poisson

Quello che faremo ora, è cercare di ottenere per funzioni armoniche formule di rappresentazioni integrali in modo simile a quanto fatto per funzioni olomorfe con la formula di Cauchy. In altri termini, la domanda che ci poniamo ora è: se conosciamo i valori al bordo di una funzione armonica, possiamo determinare in modo univoco i valori all'interno? La risposta è sì e questo si basa sulla formula di Poisson.

5.2.1 Formula di Poisson per funzioni olomorfe

Intanto diamo un nuovo modo di rappresentare una funzione olomorfa in una palla a partire dai suoi valori al bordo. E' una conseguenza della formula di Cauchy, ma che ha un vantaggio: in questa formula si può, ad ambo i membri, separare parte reale e parte immaginaria ed ottenere una rappresentazione della parte reale della funzione olomorfa in termini di un integrale che coinvolge solo la sua parte reale, e un altro integrale per la parte immaginaria; quindi si riesce a disaccoppiare le relazione tra valori interni e valori al bordo separatamente per parte reale e per parte immaginaria.

Teorema 5.7 (Formula di Poisson per funzioni olomorfe). *Sia $0 < R < \tilde{R}$ e sia $f \in \mathbf{H}(B_{\tilde{R}}(z_0))$. Allora $\forall z \in B_R(z_0)$ vale che:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2} \cdot f(\zeta) |d\zeta|$$

Analisi Complessa

Nota: Ricordiamo che, se $\zeta = \zeta(t)$ è una parametrizzazione di $\partial B_R(z_0)$, allora si intende $|d\zeta| = \left| \frac{d\zeta}{dt} \right| dt$

Dimostrazione. Se $z \in B_R(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Se $z \notin \overline{B_R(z_0)}$ (per l'identità di Cauchy):

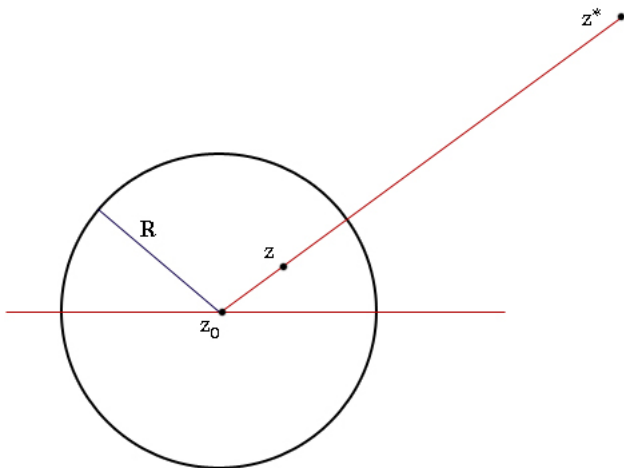
$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Fissiamo un punto z interno a $B_R(z_0)$ e un altro punto z^* in $\overline{B_R(z_0)}$, dopodiché combiniamo le due formule appena scritte. Qual è la scelta furba dello z^* ? Fissato z , prendiamo un punto z^* che abbia la stessa direzione di z e che abbia lunghezza tale che:

$$|z^* - z_0| |z - z_0| = R^2$$

in modo tale che quando z si avvicina a z_0 , z^* va all'infinito; quando z si avvicina alla circonferenza, anche z^* si avvicina. z^* è individuato in modo univoco:

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{(z - z_0)}}$$



L'applicazione che a z associa z^* nella letteratura internazionale si chiama *trasformata di Kelvin*. Se $z \in B_R(z_0)$, $z^* \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)}$. Combinando le due formule:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right) f(\zeta) d\zeta$$

Esaminiamo questa espressione:

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z^* - z_0)} =$$

raccogliamo a comun denominatore:

$$= \frac{(z - z_0) - (z^* - z_0)}{[(\zeta - z_0) - (z - z_0)][(\zeta - z_0) - (z^* - z_0)]} =$$

ed ora sostituiamo z^* :

$$= \frac{(z - z_0) - \frac{R^2}{\overline{(z - z_0)}}}{[(\zeta - z_0) - (z - z_0)][(\zeta - z_0) - \frac{R^2}{\overline{(z - z_0)}}]} =$$

moltiplichiamo sopra e sotto per $\overline{(z - z_0)}$

$$= \frac{|z - z_0|^2 - R^2}{(\zeta - z)[(\zeta - z_0)\overline{(z - z_0)} - R^2]} =$$

usiamo l'uguaglianza $R^2 = (\zeta - z_0)\overline{(\zeta - z_0)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{|z - z_0|^2 - R^2}{(\zeta - z)[(\zeta - z_0)\overline{(z - z_0)} - (\zeta - z_0)\overline{(\zeta - z_0)}]} = \\ &= \frac{|z - z_0|^2 - R^2}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)[\overline{(z - z_0)} - \overline{(\zeta - z_0)}]} = \\ &= \frac{|z - z_0|^2 - R^2}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)\overline{(z - \zeta)}} = \\ &= \frac{|z - z_0|^2 - R^2}{-|\zeta - z|^2(\zeta - z_0)} = \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2(\zeta - z_0)}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto:

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} = \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2(\zeta - z_0)}.$$

Fissiamo ζ e guardiamo questa come funzione di z , sempre dentro la palla. $\frac{1}{\zeta - z}$ come funzione di z è olomorfa. z^* è una funzione algebrica di \bar{z} quindi è una funzione antiolomorfa. La somma di una funzione olomorfa con una antiolomorfa è armonica. Riprendiamo la formula da cui siamo partiti:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right) f(\zeta) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2(\zeta - z_0)} f(\zeta) d\zeta .$$

Ed ora passiamo alla rappresentazione parametrica: $\zeta = z_0 + Re^{i\theta}$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2 Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} f(\zeta) d\theta =$$

l'elemento di lunghezza è $|d\zeta| = Rd\theta$, quindi:

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) |d\zeta| .$$

□

Definizione 5.8. Si dice nucleo di Poisson per la palla $B_R(z_0)$ la funzione:

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2}$$

Osservazione.

$$P(z, \zeta) = \frac{\zeta - z_0}{2\pi R} \cdot \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right)$$

Se $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ fissato, allora P come funzione di z è armonica in $B_R(z_0)$ (per il ragionamento fatto prima).

5.2.2 Formula di Poisson per funzioni armoniche

Teorema 5.9 (Formula di Poisson per funzioni armoniche). *Sia u armonica in $B_R(z_0)$ e $u \in C^0(\overline{B_R(z_0)})$. Allora $\forall z \in B_R(z_0)$ vale che:*

$$u(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) \cdot u(\zeta) |d\zeta|$$

Dimostrazione. Introduciamo temporaneamente un'ipotesi aggiuntiva: supponiamo che esista $\tilde{R} > R$ tale che u è armonica in $B_{\tilde{R}}(z_0)$, cioè ammettiamo per il momento di avere un aperto un po' più grande in cui si può estendere u in modo che sia sempre armonica. Allora esiste v armonica coniugata di u in $B_{\tilde{R}}(z_0)$ e $f = u + iv$ sarà olomorfa in questa palla un po' più grande. Quindi per il Teorema 5.7, f verifica la formula di Poisson:

$$f(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) f(\zeta) |d\zeta| .$$

Separiamo parte reale e parte immaginaria, prendendo la parte reale:

$$u(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) u(\zeta) |d\zeta| .$$

Quindi la tesi è dimostrata con l'ipotesi aggiuntiva fatta inizialmente.
Sia ora u armonica in $B_R(z_0)$, continua in $\overline{B_R(z_0)}$. Poniamo $\forall \epsilon > 0$:

$$u_\epsilon(z) = u(z_0 + (1 - \epsilon)(z - z_0))$$

u è definita nella palla di raggio R , quindi Invece u_ϵ è definita per gli z tali che $z_0 + (1 - \epsilon)(z - z_0) \in B_R(z_0)$, cioè:

$$(1 - \epsilon)|z - z_0| < R$$

$$|z - z_0| < \frac{R}{1 - \epsilon}$$

quindi

$$z \in B_{\frac{R}{1-\epsilon}}(z_0) .$$

Ovvero, u_ϵ è definita in una palla un pochino più grande, ed è armonica. Quindi a questa u_ϵ possiamo applicare la formula di Poisson

$$u_\epsilon(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) u_\epsilon(\zeta) |d\zeta| \quad , \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

$u_\epsilon(z)$ è uniformemente continua come funzione di ϵ , perché u è continua fin sul bordo, quindi u è uniformemente continua nella sua variabile naturale, in particolare continua rispetto al parametro ϵ . Quindi

$$u_\epsilon(z) \rightarrow u \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0$$

uniformemente rispetto a $z \in \overline{B_R(z_0)}$. Quindi

$$\int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) u_\epsilon(\zeta) |d\zeta| \rightarrow \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) u(\zeta) |d\zeta| \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0 .$$

Segue la tesi. □

5.2.3 Proprietà del nucleo di Poisson

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2} > 0 \quad , \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

Se mandiamo z al bordo il numeratore tende a zero. Se z si avvicina a ζ (che sta sulla circonferenza) anche il denominatore tende a 0 quadraticamente, mentre il numeratore ci tende linearmente:

$$R^2 - |z - z_0|^2 = (R - |z - z_0|)(R + |z - z_0|)$$

Quindi questo quoziente diverge se z si avvicina al bordo andando a cascare su ζ . Se z si avvicina ad un punto del bordo diverso da ζ il limite è 0. Quindi non c'è il limite su tutto il bordo.

Osservazione. Consideriamo $u \equiv 1$ (che è armonica):

$$1 = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) |d\zeta| \quad , \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

Abbiamo una famiglia ad un parametro complesso (z) di funzioni. Per tutti i valori di questo parametro, tutte queste funzioni hanno integrale 1 (ci tornerà utile). \square .

$$u(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) u(\zeta) |d\zeta| \quad , \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

Se sostituiamo a secondo membro una funzione continua sulla circonferenza, otteniamo una funzione della variabile z ; è armonica perché il nucleo dipende in modo armonico da z . E' proprio una funzione che assume al bordo i valori della funzione continua che abbiamo dentro all'integrale? La risposta è sì, e questo è un teorema fondamentale perché dà un modo per determinare una funzione armonica semplicemente prescrivendo i suoi valori (continui) al bordo.

5.3 Problema di Dirichlet nel disco

Definizione 5.10. Presa $\phi \in \mathcal{C}(\partial B_R(z_0), \mathbb{R})$. Chiamiamo integrale di Poisson di ϕ la funzione $u(z)$:

$$u(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) \phi(\zeta) |d\zeta|$$

Osservazione. u è armonica in $B_R(z_0)$ perché si può derivare sotto il segno di integrale tutte le volte che serve e verificare che u soddisfa l'equazione di Laplace, dato che P rispetto alla z la verifica.

Domanda: questa u è continua fin sul bordo? Assume sul bordo per l'appunto il valore ϕ ? Rispondere a queste domande significa risolvere il *problema di Dirichlet* associato all'equazione di Laplace.

Problema di Dirichlet. Data ϕ continua sulla circonferenza, determinare $u \in \mathcal{C}^2(\partial B_R(z_0)) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B_R(z_0)})$ tale che:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(z_0) \\ u = \phi & \text{su } \partial B_R(z_0) \end{cases}$$

Dimostriamo che la formula di Poisson ci dà l'unica soluzione del problema di Dirichlet.

5.3.1 Teorema di Schwarz

Teorema 5.11 (Teorema di Schwarz). *Il problema di Dirichlet ha esattamente una soluzione $\forall \phi \in \mathcal{C}(\partial B_R(z_0))$ e questa è data dall'integrale di Poisson:*

$$u(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) \phi(\zeta) |d\zeta|$$

Nota: questo problema è la formalizzazione basilare, più elementare, in ambito bidimensionale, di un problema al contorno per una equazione alle derivate parziali. Ne diamo una soluzione nel caso particolare in cui il dominio sia un cerchio. Questo è un problema al contorno lineare (sia l'equazione di Laplace sia l'equazione al contorno sono equazioni lineari). Quindi l'unicità della soluzione si riduce all'unicità della soluzione con dati nulli: ossia se a dati nulli corrisponde solo la soluzione nulla.

Dimostrazione. **Unicità:** è sufficiente provare che l'unica soluzione del problema di Dirichlet con $\phi \equiv 0$ è $u \equiv 0$. Deriva dalla formula di Poisson: $u(z) \equiv 0$.

Esistenza: Se una soluzione esiste, deve essere data dalla formula scritta prima: tale formula risolve il problema? In parte l'abbiamo già detto perché se prendiamo ϕ continua, u è una funzione armonica. Resta da chiarire che se prendiamo questa funzione data dall'integrale di Poisson

$$u(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) \phi(\zeta) |d\zeta|$$

a partire da una generica funzione continua sul bordo, otteniamo una funzione che è continua fin sul bordo ed i valori al bordo sono proprio questi. Si tratta di dimostrare che $\forall w \in \partial B_R(z_0)$ esiste

$$\lim_{z \rightarrow w, z \in B_R(z_0)} u(z)$$

e vale $\phi(w)$.

Caso particolare: Supponiamo, per il momento, di avere una funzione ϕ che in tutto un intorno di w vale 0. Supponiamo cioè che esista un arco γ di $\partial B_R(z_0)$ tale che $w \in \gamma$ e $\phi \equiv 0$ su γ . Mostriamo che in questo caso $u(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow w$. Chiamiamo γ' l'arco complementare di γ nella circonferenza

$$\gamma' = \partial B_R(z_0) \setminus \gamma.$$

Se z si avvicina a w , allora z sta discosto da γ' . Più precisamente: sia $\delta > 0$ tale che $d(w, \gamma') > \delta$. Se $|z - w| < \frac{\delta}{2}$ allora anche:

$$\text{dist}(z, \gamma') > \frac{\delta}{2} \text{ cioè } |z - \zeta| > \frac{\delta}{2}, \forall \zeta \in \gamma'.$$

Ora valutiamo il nucleo di Poisson:

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2}$$

Se $\zeta \in \gamma'$ e $|z - w| < \frac{\delta}{2}$:

$$P(z, \zeta) \leq \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \rightarrow 0 \text{ per } z \rightarrow w \quad (5.2)$$

uniformemente per $\zeta \in \gamma'$. Ora abbiamo

$$u(z) = \int_{\gamma'} P(z, \zeta) \phi(\zeta) |d\zeta|$$

perché abbiamo supposto che ϕ in γ sia 0. Ricordando che $|w - z_0| = R$, maggioriamo:

$$R^2 - |z - z_0|^2 = (R - |z - z_0|)(R + |z - z_0|) \leq 2R|z - w|.$$

ϕ è una funzione continua su un compatto: quindi limitata. Sia $M > 0$ tale che $|\phi| \leq M$ su $\partial B_R(z_0)$.

$$\begin{aligned} |u(z)| &= \left| \int_{\gamma'} P(z, \zeta) \phi(\zeta) |d\zeta| \right| \leq \\ &\leq \int_{\gamma'} \frac{2R|z - w|}{2\pi R \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} M |d\zeta| \leq \\ &\leq \frac{M|z - w|}{\pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \int_{\gamma'} |d\zeta| \leq \frac{2MR|z - w|}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $z \rightarrow w$.

Caso generale: Fissato $w \in \partial B_R(z_0)$,

$$u(z) - \phi(w) = \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) (\phi(\zeta) - \phi(w)) |d\zeta|$$

ϕ è una funzione uniformemente continua, quindi $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|\zeta - w| < \delta$:

$$|\phi(\zeta) - \phi(w)| < \epsilon.$$

Poniamo

$$\gamma = \partial B_R(z_0) \cap B_\delta(w)$$

$$\gamma' = \partial B_R(z_0) \setminus B_\delta(w).$$

Spezziamo l'integrale:

$$u(z) - \phi(w) = \int_{\gamma} P(z, \zeta)(\phi(\zeta) - \phi(w))|d\zeta| + \int_{\gamma'} P(z, \zeta)(\phi(\zeta) - \phi(w))|d\zeta| .$$

Quindi

$$|u(z) - \phi(w)| \leq \left| \int_{\gamma} P(z, \zeta)(\phi(\zeta) - \phi(w))|d\zeta| \right| + \left| \int_{\gamma'} P(z, \zeta)(\phi(\zeta) - \phi(w))|d\zeta| \right|$$

e ora valutiamo separatamente i due addendi a destra

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} P(z, \zeta)(\phi(\zeta) - \phi(w))|d\zeta| \right| &\leq \int_{\gamma} P(z, \zeta)\epsilon|d\zeta| = \epsilon \int_{\gamma} P(z, \zeta)|d\zeta| \leq \\ &\leq \epsilon \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta)|d\zeta| = \epsilon \end{aligned}$$

dato che l'integrale del nucleo di Poisson su tutta la circonferenza vale 1. Ora stimiamo il secondo addendo:

$$\left| \int_{\gamma'} P(z, \zeta)(\phi(\zeta) - \phi(w))|d\zeta| \right|$$

ricordiamo che ϕ è limitata, sia di nuovo $M > 0$ tale che $|\phi| \leq M$ su $\partial B_R(z_0)$. Quindi: $|\phi(\zeta) - \phi(w)| \leq 2M$. Ricordando (5.2), otteniamo:

$$\left| \int_{\gamma'} P(z, \zeta)(\phi(\zeta) - \phi(w))|d\zeta| \right| \leq 2M \int_{\gamma'} P(z, \zeta)|d\zeta| \rightarrow 0 \text{ per } z \rightarrow w .$$

□

5.4 Proprietà del valor medio

Riprendiamo il nucleo di Poisson:

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2}$$

Come abbiamo detto, questa è una funzione di due variabili complesse z e ζ (dipende anche dal centro z_0 e dal raggio R della palla, ma, a palla fissata, restano due variabili). Consideriamo in particolare ζ come una variabile che sta sulla circonferenza. Nel centro della palla il nucleo di Poisson vale

$$P(z_0, \zeta) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2}{R^2} = \frac{1}{2\pi R} = \frac{1}{L(\partial B_R(z_0))}$$

Osserviamo che se u è armonica in $B_R(z_0)$, continua su $\overline{B_R(z_0)}$, allora:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(z_0)} u(\zeta)|d\zeta| .$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente Teorema.

Teorema 5.12 (Teorema del valor medio). *Sia u armonica in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Per ogni palla $B_r(z_0)$ tale che $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ vale che*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(z_0)} u(\zeta) |d\zeta|$$

C'è una sorta di viceversa per questo teorema.

Definizione 5.13. *Sia $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. Si dice che u ha la proprietà del valor medio se per ogni $z_0 \in \Omega$, esiste una successione di raggi $\{r_n\}$ tale che $r_n \rightarrow 0$, $\overline{B_{r_n}(z_0)} \subset \Omega \forall n$ e valga:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi r_n} \int_{\partial B_{r_n}(z_0)} u(\zeta) |d\zeta|$$

Osservazione. Ovviamente una funzione armonica verifica la proprietà del valor medio, perché sappiamo che se u è armonica, verifica la proprietà per tutti i raggi ammissibili e quindi esiste certamente una successione di raggi che tende a zero.

Teorema 5.14. *Se $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ verifica la proprietà del valor medio, allora è armonica.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ e sia $R > 0$ tale che $B_R(z_0) \subset \overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$. Allora possiamo prendere valori sul bordo di $B_R(z_0)$ e, a partire da questi valori al bordo, possiamo costruire una funzione armonica dentro la palla usando l'integrale di Poisson.

$$h(z) = \frac{1}{2\pi r_n} \int_{\partial B_R(z_0)} P(z, \zeta) u(\zeta) |d\zeta| \quad , \quad \text{per } z \in B_R(z_0)$$

Per il *Teorema di Schwarz* h è armonica in $B_R(z_0)$, è continua fino al bordo della palla ed i suoi valori al bordo coincidono con u ($h \in \mathcal{C}(\overline{B_R(z_0)})$, $h|_{\partial B_R(z_0)} = u$). Se dimostriamo che $h \equiv u$ anche dentro alla palla, allora abbiamo concluso; perché significa che, dentro la palla, u ha tutte le derivate e che verifica l'equazione di Laplace, quindi in un intorno di z_0 ha tutte le derivate e verifica Laplace: dato che z_0 è arbitrario, questo significa che u ha tutte le derivate che servono dappertutto e che queste derivate verificano l'equazione di Laplace. Allora u è armonica in tutto Ω .

Sia $v = u - h \in \mathcal{C}(\overline{B_R(z_0)})$, ovviamente $v \equiv 0$ su $\partial B_R(z_0)$.

Mostriamo che v è identicamente 0 anche dentro alla palla. Consideriamo

$$m = \max_{B_R(z_0)} v$$

Supponiamo per assurdo $m > 0$ e sia

$$E = \{z \in \overline{B_R(z_0)} \mid v(z) = m\}$$

E è chiuso perché è la retroimmagine di un punto mediante la funzione v , continua. $E \subset B_R(z_0)$ quindi E è limitato, e di conseguenza è compatto. Consideriamo $\rho(z) = |z - z_0|$, ρ è continua ovunque e allora ρ è dotata di massimo su E . Sia

$$\hat{\rho} = \max_{\overline{E}} \rho$$

$\hat{\rho} < R$, perché E sta nella palla aperta $\subset B_R(z_0)$. Sia $w \in E \cap \partial B_{\hat{\rho}}(z_0)$. Per ipotesi, esiste $\{r_n\}$, $r_n \rightarrow 0$ tale che u verifica l'identità del valor medio per le circonferenze $\partial B_{r_n}(w)$. h è armonica, quindi verifica la stessa identità per tutti i raggi r tali che $r < R - \hat{\rho}$. Quindi $v = u - h$ verifica la proprietà del valor medio per tutti i raggi r_n che vanno bene per u .

$$v(w) = \frac{1}{2\pi r_n} \int_{\partial B_{r_n}(w)} v(\zeta) |d\zeta|.$$

Vediamo se questo è possibile. Poniamo $\gamma = \partial B_{r_n}(w) \setminus (B_{\hat{\rho}}(z_0))$ e $\gamma' = \partial B_{r_n}(w) \cap (B_{\hat{\rho}}(z_0))$. Abbiamo $L(\gamma) + L(\gamma') = 2\pi r_n$ e $L(\gamma) > 0$. γ è esterno ad E , quindi $v < m$ su γ dato che il valore massimo di v è assunto solo dentro E . Quindi:

$$\begin{aligned} v(w) &= \frac{1}{2\pi r_n} \left(\int_{\gamma} v(\zeta) |d\zeta| + \int_{\gamma'} v(\zeta) |d\zeta| \right) < \\ &< \frac{1}{2\pi r_n} (mL(\gamma) + mL(\gamma')) \end{aligned}$$

perché, essendo $v < m$ su γ e $L(\gamma) > 0$:

$$\int_{\gamma} v(\zeta) |d\zeta| < mL(\gamma)$$

e, banalmente

$$\int_{\gamma'} v(\zeta) |d\zeta| \leq mL(\gamma').$$

Otteniamo $m = v(w) < m$, il che è assurdo. Quindi deve valere: $m = \max_{\overline{B_R(z_0)}} v \leq 0$, ma il valore 0 è sicuramente assunto sul bordo, quindi $m = 0$. Analogamente

$$\max_{\overline{B_R(z_0)}} (-v) = 0$$

e questo completa la dimostrazione. □

5.5 Principio di riflessione di Schwarz

Definizione 5.15. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Ω si dice simmetrico rispetto all'asse reale se, per ogni $z \in \Omega$, anche $\bar{z} \in \Omega$. Se Ω è simmetrico rispetto all'asse reale, poniamo:*

$$\Omega^+ = \{z \in \Omega \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

$$\Omega^- = \{z \in \Omega \mid \text{Im}(z) < 0\}$$

$$\Gamma = \{z \in \Omega \mid \text{Im}(z) = 0\}$$

Consideriamo una funzione armonica nella parte superiore Ω^+ di un aperto simmetrico Ω . Ci domandiamo se ci sono delle condizioni che ci garantiscono che questa funzione armonica è estendibile ad una funzione armonica su tutto Ω . Questo è il *teorema di riflessione di Schwarz* che ha due versioni: la prima versione per funzioni armoniche e poi ne vedremo un adattamento alle funzioni olomorfe.

Teorema 5.16 (Teorema di riflessione di Schwarz per funzioni armoniche). *Sia Ω aperto simmetrico rispetto all'asse reale. Sia u armonica in Ω^+ tale che $\forall z_0 \in \Gamma$:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Omega^+} u(z) = 0$$

posto

$$w(z) = \begin{cases} u(z) & z \in \Omega^+ \\ 0 & z \in \Gamma \\ -u(\bar{z}) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

allora w è una funzione armonica in tutto Ω .

In altre parole: se u si estende con continuità su Γ e $u|_{\Gamma} = 0$, allora, riflettendo u in modo dispari rispetto alla variabile y , otteniamo una funzione che è armonica dappertutto.

Dimostrazione. w è armonica in Ω^+ , Ω^- separatamente, e inoltre w è continua in tutto Ω ; resta da verificare che w verifica la proprietà del valor medio in tutto Ω .

Sia $z_0 \in \Omega^+ \cup \Omega^-$, allora la proprietà del valor medio vale per tutti i raggi $r < |\text{Im}(z_0)|$ (separatamente per Ω^+ e Ω^-). Allora prendiamo $z_0 \in \Gamma$, sull'asse reale. E sia $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset \Omega$.

$$\int_{\partial B_r(z_0)} w(\zeta) |d\zeta| = \int_{\gamma^+} u(\zeta) |d\zeta| + \int_{\gamma^-} (-u(\bar{\zeta})) |d\zeta|$$

qui $\gamma^+ = \partial B_r(z_0) \cap \Omega^+$, $\gamma^- = \partial B_r(z_0) \cap \Omega^-$. Ora scrivendo gli integrali in forma parametrica, si verifica

$$\int_{\gamma^-} (-u(\bar{\zeta})) |d\zeta| = - \int_{\gamma^+} u(\zeta) |d\zeta|$$

da cui

$$\int_{\partial B_r(z_0)} w(\zeta) |d\zeta| = \int_{\gamma^+} u(\zeta) |d\zeta| - \int_{\gamma^+} (u(\zeta)) |d\zeta| = 0.$$

Quindi la w ha valor medio nullo su tutte queste circonferenze e $w(z_0) = 0$. \square

Teorema 5.17 (Principio di riflessione di Schwarz per funzioni oloomorfe). *Sia Ω aperto simmetrico rispetto all'asse reale. Sia $f \in H(\Omega^+)$ tale che $\forall z_0 \in \Gamma$:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Omega^+} \Im f(z) = 0$$

allora esiste $F \in H(\Omega)$ tale che $F|_{\Omega^+} \equiv f$ e verifica $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$, $\forall z \in \Omega$.

Faremo ricorso al seguente Lemma.

Lemma 5.18. *Sia $z_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f = u + iv \in H(B_r(z_0))$. Se $v = \Im(f) = 0$ in $B_r(z_0) \cap \mathbb{R}$, allora $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, ossia:*

$$\begin{cases} u(z) = u(\bar{z}), \\ v(z) = -v(\bar{z}). \end{cases}$$

Dimostrazione del Lemma. Sappiamo in partenza che la nostra funzione è oloomorfa: quindi in z_0 abbiamo lo sviluppo in serie di potenze di f . Calcoliamo le varie derivate di f in z_0 . Ricordando le equazioni di Cauchy Riemann abbiamo:

$$\partial_z f = (\partial_y + i\partial_x)v$$

Se $z \in \mathbb{R}$, $v = 0$ e di conseguenza $\partial_x^{(k)} v = 0$ per ogni k . Allora: $\partial_z f = \partial_y v$. E, iterando:

$$\partial_z^{(k)} f = \partial_y^{(k)} v$$

per ogni k , si noti che queste derivate sono tutte quantità reali. Scriviamo lo sviluppo di Taylor della funzione f centrato in z_0

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial_z^{(k)} f(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial_y^{(k)} v(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \end{aligned}$$

per ogni z in un intorno di z_0 . Quindi vale anche

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial_y^{(k)} v}{k!} (\bar{z} - z_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial_y^{(k)} v(z_0)}{k!} (\bar{z} - \bar{z}_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial_y^{(k)} v(z_0)}{k!} \overline{(z - z_0)^k} = \\ &= \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial_y^{(k)} v}{k!} (z - z_0)^k} = \overline{f(z)} \end{aligned}$$

□

Analisi Complessa

Dimostrazione del Teorema 5.17. Poniamo $f = u + iv$ in Ω^+ . Per il lemma di riflessione di Schwarz (caso armonico) esiste V armonica in tutto Ω tale che:

$$V|_{\Omega^+} = v \quad , \quad V(z) = -V(\bar{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Questa è la candidata parte immaginaria della estensione che cerchiamo di f a Ω , per la parte reale definiamo intanto

$$U(z) = \begin{cases} u(z) & z \in \Omega^+ \\ u(\bar{z}) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

Proviamo che questa U si estende in modo armonico a tutto Ω e che V ne è la coniugata.

Preso $z_0 \in \Gamma$ e $\rho > 0$ tale che $B_\rho(z_0) \subset \Omega$, V è armonica in $B_\rho(z_0)$, quindi esiste una sua coniugata in $B_\rho(z_0)$, equivalentemente, esiste w armonica in $B_\rho(z_0)$ tale che $\phi = w + iV$ è olomorfa in tutto B_ρ ($-w$ è la coniugata di v). Posto $B_\rho^+(z_0) = B_\rho(z_0) \cap \Omega^+$ anche $f = u + iv = u + iV$ è olomorfa in $B_\rho^+(z_0)$, perché v e V ivi coincidono. Quindi abbiamo due funzioni f e ϕ olomorfe in $B_\rho^+(z_0)$ che hanno la parte immaginaria coincidente, e dunque la parte reale differisce per una costante.

$$U = u = w + c \quad , \quad \text{su } B_\rho^+(z_0)$$

Per il Lemma precedente $w(\bar{z}) = w(z)$. Quindi, per come abbiamo definito U ,

$$U(z) = w(z) + c \quad , \quad \forall z \in B_\rho(z_0) \setminus \Gamma$$

ne segue che U si estende con continuità su $\Gamma \cap B_\rho(z_0)$ e che tale estensione è armonica in $B_\rho(z_0)$. Per l'arbitrarietà di z_0 , U si estende con continuità a tutto Γ ed è armonica in Ω .

Poniamo $F = U + iV$. F è olomorfa in $\Omega^+ \cup \Omega^-$, ma in effetti lo è su tutto Ω , perché le condizioni di Cauchy-Riemann si estendono per continuità anche su Γ . In conclusione $F \in H(\Omega)$ e verifica la regola di simmetria $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$, $\forall z \in \Omega$. \square

Un'altra proprietà fondamentale delle funzioni armoniche è la seguente disuguaglianza.

Teorema 5.19 (Disuguaglianza di Harnack). *Sia u armonica in una palla $B_R(z_0)$, $u \geq 0$. Allora $\forall z \in B_R(z_0)$ abbiamo che:*

$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} u(z_0) \leq u(z) \leq u(z_0) \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|}$$

Osservazioni: Da questa disuguaglianza si ricava che, per funzioni armoniche non-negative:

- 1) Il valore nel centro permette di controllare il valore di tutti gli altri punti.
- 2) Se $u \geq 0$ e c'è un punto in cui è positiva, allora è positiva dappertutto.

Dimostrazione. Fissiamo $z \in B_R(z_0)$. Sia $\rho = |z - z_0| < R$ e sia s tale che $\rho < s < R$. Scriviamo $u(z)$ con la formula di Poisson per la palla di raggio s , perché tanto sul bordo di questa palla la u è continua.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi s} \int_{\partial B_s(z_0)} \frac{s^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2} \cdot u(\zeta) |d\zeta|$$

$$|\zeta - z| = |\zeta - z_0 + z_0 - z| \begin{cases} \leq s + \rho \\ \geq s - \rho \end{cases}$$

1) Usando la seconda disuguaglianza dimostriamo la seconda parte della disuguaglianza di Harnack (la maggiorazione dall'alto).

$$\begin{aligned} u(z) &\leq \frac{1}{2\pi s} \int_{\partial B_s(z_0)} \frac{s^2 - \rho^2}{(s - \rho)^2} \cdot u(\zeta) |d\zeta| \\ &= \frac{1}{2\pi s} \cdot \frac{s + \rho}{s - \rho} \int_{\partial B_s(z_0)} u(\zeta) |d\zeta| \end{aligned}$$

per il *teorema del valor medio*:

$$= \frac{s + \rho}{s - \rho} \cdot u(z_0)$$

2) Usando la prima disuguaglianza dimostriamo la prima parte della disuguaglianza di Harnack (la maggiorazione dal basso).

$$\begin{aligned} u(z) &\geq \frac{1}{2\pi s} \int_{\partial B_s(z_0)} \frac{s^2 - \rho^2}{(s + \rho)^2} \cdot u(\zeta) |d\zeta| \\ &= \frac{1}{2\pi s} \cdot \frac{s - \rho}{s + \rho} \int_{\partial B_s(z_0)} u(\zeta) |d\zeta| \end{aligned}$$

per il *teorema del valor medio*:

$$= \frac{s - \rho}{s + \rho} \cdot u(z_0)$$

$$\frac{s - \rho}{s + \rho} \cdot u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{s + \rho}{s - \rho} \cdot u(z_0) \quad , \quad \forall s \in (\rho, R)$$

Passando al limite per $s \rightarrow R$ si trova:

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \cdot u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} \cdot u(z_0)$$

□

Questa disuguaglianza è ottimale, cioè nell'ambito di tutte le funzioni armoniche non negative nella palla, le costanti che compaiono nella disuguaglianza sono le migliori possibili.

Esempio. In $B_1(0)$ consideriamo:

$$u(z) = P(z, 1) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$$

Il nucleo di Poisson è armonico in z ($\zeta = 1$ per semplicità) ed è positivo. Questa è una funzione armonica nella palla che non è continua fin sul bordo. Sappiamo anche che se prendiamo punti che tendono a punti del bordo lontani dal punto 1 (ζ), $u(z) \rightarrow 0$; invece non c'è limite quando ci avviciniamo al punto 1. Prendiamo $z = x \in \mathbb{R}$.

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - x^2}{(1 - x)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + x}{1 - x}$$

e $u(0) = \frac{1}{2\pi}$. Per $x > 0$:

$$u(x) = u(0) \frac{1 + x}{1 - x}$$

Per $x < 0$:

$$u(x) = u(0) \frac{1 - |x|}{1 + |x|} \quad \square$$

La *disuguaglianza di Harnack* stabilisce che, presi comunque due punti nella palla, i valori in questi due punti si controllano l'uno con l'altro.

Corollario 5.20. *Sia $u \geq 0$ armonica in $B_R(z_0)$. Allora $\forall \rho < R$:*

$$\max_{B_\rho(z_0)} u \leq \left(\frac{R + \rho}{R - \rho} \right)^2 \min_{B_\rho(z_0)} u$$

Dimostrazione. Si prende il punto su cui viene realizzato il massimo, si usa la *disuguaglianza di Harnack* e si maggiora con il valore nel centro. Si prende il punto in cui viene realizzato il minimo e si minora con il valore nel centro (è una doppia applicazione della *disuguaglianza di Harnack*) \square

Corollario 5.21. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e sia $K \subset \Omega$ compatto. Allora esiste $C > 0$ tale che $\forall u$ armonica non negativa in Ω vale:*

$$\max_K u \leq C \min_K u$$

Traccia di dimostrazione. Se prendiamo due punti nel compatto, possiamo passare dall'uno all'altro con una catena di palline che stanno tutte dentro Ω , una congiunta con l'altra, in modo che, applicando un numero finito di volte la disuguaglianza del corollario precedente, si riesce a controllare il valore nel primo punto con il valore nell'ultimo. Prendiamo come primo punto quello di massimo e come secondo il punto di minimo. \square

Capitolo 6

Mappe conformi

Avevamo accennato al fatto che un modo per interpretare le funzioni olomorfe si basa su una loro interpretazione geometrica: le funzioni olomorfe sono quelle trasformazioni che conservano l'orientazione e conservano gli angoli. Cerchiamo di specificare cosa significa che una trasformazione del piano conserva gli angoli; intanto stabiliamo quand'è che una trasformazione lineare conserva gli angoli.

Definizione 6.1. Una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dice conforme se conserva gli angoli nel seguente senso: $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\widehat{L\xi} \widehat{L\eta} = \widehat{\xi} \widehat{\eta} .$$

Lemma 6.2. L è conforme se e solo se

$$L = \lambda R$$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e R è una trasformazione ortogonale, cioè $R^T R = I$.

Dimostrazione. Le dilatazioni $L = \lambda I$ sono conformi. Le trasformazioni ortogonali del piano sono tutte e sole le trasformazioni con matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} , \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

Quindi trasformazioni che sono composizioni di dilatazioni e trasformazioni ortogonali conservano gli angoli. Vediamo ora il viceversa.

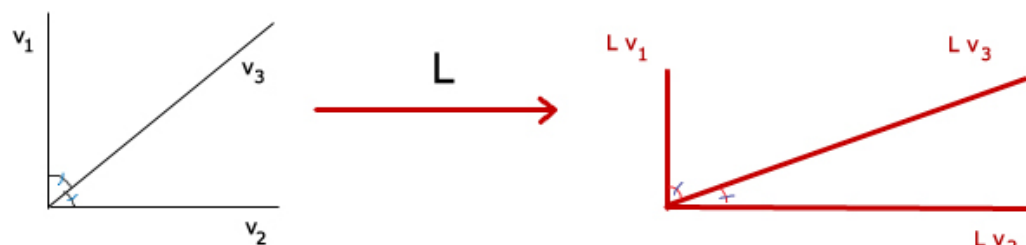
Osservazione. Se la matrice associata a L è una matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

questa è conforme se e solo se $d = \pm a \neq 0$. Infatti calcolandola sui vettori del piano

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



$$\widehat{Lv_1 Lv_3} = \widehat{Lv_3 Lv_2}$$

se e solo se $a = \pm b$.

Vediamo il caso generale. Sia

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad L .

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sia $\lambda = \sqrt{a^2 + c^2} > 0$ la lunghezza di questo vettore. Individuiamo l'angolo che questo vettore fa con l'asse delle x . Sia $\phi \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Ora prendiamo T che è la rotazione di angolo ϕ :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

e consideriamo la composizione di T con M :

$$TM \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

T è una trasformazione ortogonale; quindi, se M conserva gli angoli, anche TM conserva gli angoli. Se prendiamo

$$TM \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \lambda(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \pm \sin \theta \end{pmatrix}$$

e $\lambda(\theta) > 0$. Se calcoliamo TM sull'altro versore, troviamo:

$$TM \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$TM = \begin{pmatrix} \lambda(0) & 0 \\ 0 & \pm \lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Dall'osservazione fatta prima: $\lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) = \lambda(0)$. Quindi

$$TM = \lambda(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Da qui ricaviamo M :

$$M = \lambda(0) T^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \lambda(0)R$$

dove

$$R = T^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

è ancora una matrice ortogonale. □

Se vogliamo trattare il caso di trasformazioni non lineari, dobbiamo richiedere una sufficiente regolarità.

Definizione 6.3. Siano Ω, G aperti di $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$. Un diffeomorfismo $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, G)$ si dice conforme se, per ogni $z_0 \in \Omega$ e per ogni coppia γ_1, γ_2 di curve regolari passanti per z_0 (per comodità possiamo supporre: $\gamma_i(0) = z_0$, $i = 1, 2$) vale che:

$$\widehat{\gamma_1'(0) \gamma_2'(0)} = (f \circ \gamma_1)'(0) \widehat{(f \circ \gamma_2)'(0)}$$

Lemma 6.4. f è conforme se e solo se per ogni $z_0 \in \Omega$, la trasformazione lineare associata alla matrice jacobiana

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

è conforme.

Dimostrazione. La regola di derivazione della funzione composta ci dà

$$(f \circ \gamma)'(0) = Df(z_0)\gamma'(0)$$

per ogni curva regolare γ tale che $\gamma(0) = z_0$. Quindi la condizione

$$\widehat{\gamma_1'(0) \gamma_2'(0)} = (f \circ \gamma_1)'(0) \widehat{(f \circ \gamma_2)'(0)}$$

si riscrive

$$\widehat{\gamma_1'(0) \gamma_2'(0)} = Df(z_0)\gamma_1'(0) \widehat{(Df(z_0)\gamma_2'(0))}'(0)$$

cioè la matrice jacobiana $Df(z_0)$ è conforme. □

Il seguente Teorema stabilisce il legame tra conformità e olomorfa.

Teorema 6.5. *Sia $f : \Omega \rightarrow G$ un diffeomorfismo C^1 che conserva l'orientazione (cioè punto per punto $\det Df(z_0) > 0$). f è conforme se e solo se f è olomorfa.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia conforme; allora $\forall z_0 \in \Omega$ si può scrivere

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{aligned} u_x(z_0) &= \lambda \cos \theta & u_y(z_0) &= \lambda \sin \theta \\ v_x(z_0) &= -\lambda \sin \theta & v_y(z_0) &= \lambda \cos \theta \end{aligned}$$

di conseguenza vale Cauchy-Riemann. Il viceversa è analogo. □

D'ora in avanti ci limiteremo a considerare trasformazioni conformi che conservano l'orientazione, quindi identificheremo le trasformazioni conformi con le funzioni olomorfe invertibili.

In questo ambito, la questione basilare è la seguente:

Presi due aperti di \mathbb{C} è possibile trovare una trasformazione conforme dall'uno all'altro?

Il teorema fondamentale è *il teorema della mappa di Riemann* che dice che per ogni aperto semplicemente connesso¹ che non coincide con tutto \mathbb{C} esiste un'applicazione conforme che trasporta l'aperto in una palla. Quindi tutti gli aperti semplicemente connessi (tolto \mathbb{C}) sono *conformemente equivalenti* a una palla. Avere a disposizione mappe conformi permette, in particolare di estendere la teoria delle funzioni armoniche che abbiamo sviluppato in un disco a insiemi più generali.

Esempio. Dimostriamo che non esiste nessuna mappa conforme da un disco in \mathbb{C} . Se ci fosse una mappa conforme

$$f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

questa dovrebbe essere un diffeomorfismo, quindi esiste l'inversa olomorfa

$$g = f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow B_1(0)$$

g è chiaramente limitata: $|g(z)| \leq 1$. Il *teorema di Liouville* implica che g è costante.

Il primo argomento che investigheremo nelle pagine seguenti è la classificazione delle mappe conformi del disco in sé.

¹Questa è una nozione topologica che coinvolge la teoria dei gruppi di omotopia, in modo grossolano si può dire: *un aperto privo di buchi*.

6.1 Automorfismi del disco

Iniziamo con il seguente Teorema.

Teorema 6.6 (Lemma di Schwarz). *Se $f \in H(B_1(0))$ è tale che $f(0) = 0$ e $|f(z)| \leq 1$ per ogni $z \in B_1(0)$, allora si ha:*

$$|f'(0)| \leq 1$$

e anche:

$$|f(z)| \leq |z|, \forall z \in B_1(0).$$

Inoltre, se:

$$|f'(0)| = 1$$

oppure, se esiste $z_0 \neq 0$ tale che

$$|f(z_0)| = |z_0|$$

allora esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che vale

$$f(z) = e^{i\theta} z, \forall z \in B_1(0)$$

cioè $f(z)$ si riduce a una rotazione.

Dimostrazione. Per l'ipotesi $f(0) = 0$, f ha uno sviluppo di Taylor centrato in 0 il cui primo termine non banale è almeno del prim'ordine. Quindi se dividiamo f per z

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

otteniamo ancora una funzione olomorfa in $B_1(0)$. Preso $r < 1$ e $|z| < r$, per il principio del massimo modulo:

$$|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r} \rightarrow 1 \text{ per } r \rightarrow 1.$$

Quindi, moltiplicando per $|z|$ si ottiene

$$|f(z)| \leq |z|$$

inoltre dallo sviluppo di Taylor si ha

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1.$$

Sempre per il principio del massimo modulo, se esiste $z_0 \in B_1(0)$ tale che $|g(z_0)| = 1$, allora g è costante e $|g| \equiv 1$. Quindi $g \equiv e^{i\theta}$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. Se $z_0 \neq 0$, allora la condizione $|g(z_0)| = 1$ è equivalente a $|f(z_0)| = |z_0|$, se invece $z_0 = 0$, si ha $|g(0)| = 1$ se e solo se $|f'(0)| = 1$. \square

Il Lemma di Schwarz permette di caratterizzare tutta la famiglia delle trasformazioni olomorfe del disco in sé.

Definizione 6.7. Preso un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ una funzione olomorfa $f : \Omega \rightarrow \Omega$ si dice automorfismo se f è invertibile e suriettiva.

Qui si esaminano gli automorfismi del disco.

Lemma 6.8. Sia $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ un automorfismo tale che $f(0) = 0$ allora esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $f(z) = e^{i\theta}z$.

Dimostrazione. Sia g l'inversa di f : $g = f^{-1}$. $g \in H(\Omega)$. Sia ad f che a g si può applicare il lemma di Schwarz:

$$|f'(0)| \leq 1 \quad , \quad |g'(0)| \leq 1$$

Per la regola di derivazione della funzione inversa $g'(0) = \frac{1}{f'(0)}$ da cui segue che $|f'(0)| = 1$. Sempre per il Lemma di Schwarz si ottiene che $f(z) \equiv e^{i\theta}z$, cioè f è una rotazione. \square

Teorema 6.9. Sia f automorfismo di $B_1(0)$ in sé. Allora esistono $c \in B_1(0)$ e $\phi \in \mathbb{R}$, tali che

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - c}{1 - \bar{c}z} , \forall z \in B_1(0) .$$

Dimostrazione. Mostriamo intanto che una funzione di questo tipo è in effetti un automorfismo del disco. Omettiamo per il momento del fattore moltiplicativo $e^{i\theta}$. Fissato $c \in B_1(0)$ poniamo:

$$\phi_c(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

ϕ_c , dove definita, è una funzione olomorfa. ϕ_c ha una singolarità nel punto $\frac{1}{\bar{c}}$ che è esterno a $B_1(0)$. Quindi questa funzione è una funzione olomorfa dentro la palla. Verifichiamo che ϕ_c è invertibile. Poniamo

$$w = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

e risolviamo rispetto a z . Otteniamo

$$z = \frac{z + c}{1 + \bar{c}z} = \phi_{-c}(w)$$

cioè $\phi_c^{-1} = \phi_{-c}$. Verifichiamo che, se $z \in B_1(0)$, anche $\phi_c(z) \in B_1(0)$.

Se $|z| = 1$, valutiamo $|\phi_c(z)|$:

$$|\phi_c(z)| = \left| \frac{z - c}{1 - \bar{c}z} \right| = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{|z - c|}{\left| \frac{1}{z} - \bar{c} \right|} = 1 .$$

Quindi la trasformazione ϕ_c trasporta la circonferenza in sé. Poiché $\phi_c(0) = -\bar{c} \in B_1(0)$, per continuità, tutti i punti interni devono essere trasportati dentro la palla.

Sia ora f un generico automorfismo e sia $b = f(0)$. Se $b = 0$ sappiamo già che questo automorfismo è una rotazione. Se $b \neq 0$, allora componiamo con una trasformazione del tipo appena introdotto, in modo da riportare il punto b proprio in 0. Consideriamo $g = \phi_b \circ f$. Ora

$$\phi_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

e ovviamente abbiamo $\phi_b(0) = 0$. Quindi g è un automorfismo tale che $g(0) = 0$, cioè g è una rotazione:

$$g(z) = e^{i\theta} z$$

per qualche $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi_b \circ f(z) &= e^{i\theta} z \\ f(z) &= \phi_{-b}(e^{i\theta} z) = \frac{e^{i\theta} z + b}{1 + \bar{b}e^{i\theta} z} \\ &= e^{i\theta} \cdot \frac{z + be^{-i\theta}}{1 + \bar{b}e^{-i\theta} z} \end{aligned}$$

Quindi in conclusione

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - c}{1 - \bar{c}z} \text{ dove } c = -be^{i\theta}$$

ricordiamo infine che $b = f(0)$, quindi $|b| < 1$, da cui $|c| < 1$. □

6.2 Trasformazioni di Möbius

La classificazione degli automorfismi del disco ci ha indotto a considerare trasformazioni scritte come particolari quozienti di funzioni lineari di z , queste trasformazioni prendono il nome di *trasformazioni lineari fratte*. Esaminiamo questa classe da un punto di vista più generale.

Definizione 6.10. *Preso una matrice*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

tale che $\det M \neq 0$, poniamo:

$$\phi_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tale funzione prende il nome di trasformazione lineare fratta, o trasformazione di Möbius.

Le trasformazioni lineari fratte costituiscono un gruppo rispetto alla composizione. Esaminiamo quali sono i tipi di trasformazioni elementari che generano tutte le trasformazioni lineari fratte.

Lemma 6.11. *Ogni trasformazione lineare fratta è composizione finita di trasformazioni lineari $w = az + b$ e dell'inversione $w = \frac{1}{z}$.*

Dimostrazione. Se $c = 0$ abbiamo una trasformazione lineare. Se $c \neq 0$, allora scomponiamo in fratti semplici

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

ed otteniamo la tesi. □

Vediamo alcune proprietà geometriche delle trasformazioni lineari fratte.

Osserviamo intanto che ϕ_M ha una singolarità polare nel punto $z = -\frac{d}{c}$. Diciamo, convenzionalmente che, nel punto singolare, ϕ_M vale ∞ . D'altro canto, possiamo dare un senso alla trasformazione lineare fratta anche se facciamo tendere z verso il punto all'infinito. Possiamo quindi dire che, nel punto all'infinito, ϕ_M vale $\frac{a}{c}$.

Quindi noi riusciamo ad estendere il senso di una trasformazione lineare fratta come una trasformazione invertibile che va da $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in sé.

Di conseguenza, sarà conveniente interpretare le rette del piano come circonferenze degeneri che passano per il punto all'infinito.

Teorema 6.12. *Le trasformazioni lineari fratte trasformano circonferenze in circonferenze.*

Dimostrazione. Una trasformazione lineare trasforma rette in rette e circonferenze in circonferenze. Esaminiamo ora l'azione dell'inversione sulle circonferenze. Consideriamo l'equazione di una circonferenza

$$|z - z_0|^2 = r^2$$

questa si può riscrivere

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = r^2$$

e ponendo $q = |z_0|^2 - r^2$

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + q = 0 .$$

Usando l'inversione $w = \frac{1}{z}$:

$$1 - \overline{z_0 w} - z_0 w + c w \overline{w} = 0 .$$

Se $q \neq 0$ abbiamo di nuovo l'equazione di una circonferenza. Se $q = 0$ significa che la circonferenza da cui siamo partiti passa per 0 e in questo caso viene trasformata in una retta. Procedendo a ritroso, le rette vengono trasformate dall'inversione in circonferenze o in se stesse, se sono passanti per l'origine. □

Osservazione. Comunque si prenda $\lambda \neq 0$, allora vale $\phi_M = \phi_{\lambda M}$.

Osservazione. Prese M, N matrici non singolari si verifica che $\phi_M \circ \phi_N = \phi_{MN}$. Quindi $\phi_M^{-1} = \phi_{M^{-1}}$. Allora, dato che

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\phi_M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

Esempio. Riprendiamo in considerazione un automorfismo del disco

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - c}{1 - \bar{c}z} = \frac{e^{i\phi} z - e^{i\phi} c}{-\bar{c}z + 1}$$

Scriviamo la trasformazione inversa:

$$f^{-1}(z) = \frac{z + e^{i\phi} c}{\bar{c}z + e^{i\phi}}$$

6.3 Invarianza del birapporto

Definizione 6.13. Presi quattro punti $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, poniamo

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

$[z_1, z_2, z_3, z_4]$ si chiama il birapporto di questi quattro numeri.

Teorema 6.14. Sia ϕ_M una trasformazione lineare fratta. Siano $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e siano $w_i = \phi_M(z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Allora il birapporto non cambia.

Dimostrazione. Se $\phi_M(z) = az + b$ la verifica è banale. Per l'inversione $\phi_M(z) = \frac{1}{z}$ si calcola

$$\begin{aligned} [w_1, w_2, w_3, w_4] &= \frac{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right)}{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_4}\right)} = \\ &= \frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]. \end{aligned}$$

Siccome ogni trasformazione lineare fratta è composizione finita di inversione e trasformazioni lineari, applicando l'invarianza del birapporto ad ogni fattore della composizione, otteniamo la tesi. \square

Teorema 6.15. Fissati comunque z_1, z_2, z_3 distinti e fissati w_1, w_2, w_3 distinti, esiste un'unica trasformazione lineare fratta che trasporta z_i in w_i , $i = 1, 2, 3$.

Dimostrazione. Se imponiamo

$$[w_1, w_2, w_3, w] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

abbiamo a sinistra una trasformazione di Möbius nella variabile w e a destra una nella variabile z , ovvero

$$\phi_A(w) = \phi_B(z)$$

dove la matrice A è determinata a partire da w_1, w_2, w_3 , e B da z_1, z_2, z_3 , quindi

$$w = \phi_{A^{-1}B}(z) .$$

□

6.4 Automorfismi del semipiano

Il teorema precedente è particolarmente significativo: se prendiamo tre punti sulla retta reale in partenza e tre punti sulla retta reale in arrivo, otterremo una trasformazione lineare fratta che trasporta la retta reale in sé e trasporta il semipiano superiore in sé stesso oppure nel semipiano inferiore. Vediamo di capire se questo ci permette di individuare le trasformazioni lineari fratte che portano il semipiano superiore in sé.

Osservazione. ϕ_M trasforma \mathbb{R} in sé se e solo se i coefficienti di M (a meno di un fattore moltiplicativo scalare) sono reali. Infatti, se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, allora $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $\phi_M(x) \in \mathbb{R}$. Viceversa se $\phi_M(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, presi $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ e w_1, w_2, w_3 le loro immagini, allora le matrici A, B associate ai birapporti che compaiono nell'equazione

$$[z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, w]$$

sono reali. E quindi anche $M = A^{-1}B$ ha coefficienti reali. Tale ϕ_M trasforma $\{\Im m z > 0\}$ in sé se e solo se $\det M > 0$. Infatti è sufficiente verificare dove si trova $\phi_M(i)$:

$$\phi_M(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2}$$

e si verifica che:

$$\Im m \phi_M(i) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} .$$

Quindi le trasformazioni lineari fratte che trasportano il semipiano superiore in sé stesso sono quelle che hanno tutti i coefficienti reali e che hanno la matrice corrispondente con determinante positivo. Vedremo che in effetti queste sono gli unici automorfismi del semipiano.

Esempio. Le trasformazioni lineari fratte che portano il semipiano in un disco sono

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} , \quad \Im m \alpha > 0 , \quad |k| = 1 .$$

Questa trasformazione porta $\{\Im mz > 0\}$ in $B_1(0)$. L'idea è di fissare 3 punti a caso z_1, z_2, z_3 sulla retta reale e 3 punti w_1, w_2, w_3 su $\partial B_1(0)$. Prescriviamo che z_i vada in w_i , $i = 1, 2, 3$; automaticamente questo fa sì che la retta reale vada nella circonferenza e, se prescriviamo appropriatamente l'orientamento dei punti w_i , $i = 1, 2, 3$, siamo anche certi che il semipiano superiore vada nell'interno del cerchio. Usando la regola del birapporto, possiamo classificare tutte le trasformazioni lineari fratte che eseguono questa trasformazione.

Per il nostro scopo è sufficiente dimostrare che una trasformazione di questo tipo trasporta il semipiano superiore nel disco unitario. $z \in \mathbb{R}$ equivale a dire $z = \bar{z}$. Allora

$$w = k \frac{z - \alpha}{\bar{z} - \bar{\alpha}} = k \frac{z - \alpha}{z - \alpha}$$

$\Rightarrow |w| = 1$. Quindi \mathbb{R} viene trasformato in $\partial B_1(0)$. Ora si tratta di far vedere che il semipiano superiore va dentro al disco (per continuità, ci basta stabilire che, se prendiamo un punto in $\{\Im mz > 0\}$, questo viene mandato dentro il disco). Sia $\alpha = a + ib$. $z - \alpha = (x - a) + i(y - b)$ e quindi $z - \bar{\alpha} = (x - a) + i(y + b)$.

$y + b > |y - b|$ quindi $|z - \bar{\alpha}| > |z - \alpha| \Rightarrow |w| = |k| \frac{|z - \alpha|}{|z - \bar{\alpha}|} < 1$.

In particolare $w = \frac{z - i}{z + i}$.

Teorema 6.16.

$$f : \{\Im mz > 0\} \rightarrow \{\Im mz > 0\}$$

è un automorfismo se e solo se $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

Dimostrazione. Consideriamo una trasformazione di Möbius ϕ che trasformi $\{\Im mz > 0\}$ in $B_1(0)$ e consideriamo ψ così fatta:

$$\psi = \phi \circ f \circ \phi^{-1} : B_1(0) \rightarrow \{\Im mz > 0\} \rightarrow \{\Im mz > 0\} \rightarrow B_1(0)$$

ψ è un automorfismo del disco $B_1(0)$, quindi ψ è una trasformazione lineare fratta.

$$f = \phi^{-1} \circ \psi \circ \phi$$

Poichè ϕ^{-1} , ψ , ϕ sono trasformazioni lineari fratte, anche f è una trasformazione lineare fratta. Di tutte le trasformazioni lineari fratte, quelle che trasportano il semipiano in sé sono quelle che hanno i coefficienti reali e il determinante > 0 . \square

6.5 Teorema della mappa di Riemann

Concludiamo enunciando questo teorema fondamentale, del quale, per questo corso, omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.17. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso, $\Omega \neq \mathbb{C}$, allora esiste $f : B_1(0) \rightarrow \Omega$ mappa conforme.*

Analisi Complessa

Il Teorema precedente dà un risultato di esistenza, esaminiamo sotto quali condizioni aggiuntive si ottiene anche l'unicità.

Corollario 6.18. *Fissato $z_0 \in \Omega$ esiste un'unica mappa conforme $f : B_1(0) \rightarrow \Omega$ tale che verifichi:*

- 1) $f(0) = z_0$,
- 2) $f'(0) \in \mathbb{R}^+$.

Dimostrazione. Siano f, g due mappe conformi che verificano 1)

$$f(0) = g(0) = z_0 .$$

La mappa $\phi = g^{-1} \circ f$ è un automorfismo del disco tale che $\phi(0) = 0$. Allora è una rotazione

$$\phi(z) = e^{i\theta} z$$

calcolando la derivata:

$$e^{i\theta} = \phi'(0) = (g^{-1}(f(z)))'_{z=0} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

Se f, g verificano anche 2), cioè $f'(0), g'(0) \in \mathbb{R}^+$, si avrà $e^{i\theta} \in \mathbb{R}^+$ ovvero $\theta = 0$. Allora ϕ è l'identità, cioè

$$f = g .$$

□