ANALISI COMPLESSA
PROVA SCRITTA DEL 3 GIUGNO 2015

(1) Sia u armonica in $B_R(0)$, continua su $\overline{B_R(0)}$, supposto che

$$\int_{\partial B_R(0)} \overline{\zeta} u(\zeta)|d\zeta| = 0$$

calcolare

$$|\partial_z u(0)| \ .$$

Soluzione. Sappiamo che vale la formula di Poisson

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} u(\zeta)|d\zeta| \ .$$

La funzione

$$F(z, \zeta) = \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} u(\zeta)$$

è differenziabile in senso reale rispetto a $z = (x + iy) \in B_R(0)$ per ogni $\zeta \in \partial B_R(0)$. Inoltre F e le sue derivate parziali $\partial_x F, \partial_y F$ sono uniformemente continue in $B_r(0) \times \partial B_R(0)$ per ogni r, $0 < r < R$. Quindi si può derivare sotto il segno di integrale e si ottiene

$$\partial_z u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \partial_z \left[\frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \right] u(\zeta)|d\zeta|$$

per ogni $z \in B_R(0)$. In particolare

$$\partial_z u(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2}{\overline{\zeta}(\zeta)^2} u(\zeta)|d\zeta|$$

ovvero

$$\partial_z u(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2}{R^2 \zeta} u(\zeta)|d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\overline{\zeta}}{R^2} u(\zeta)|d\zeta| = 0 \ .$$

(2) Sia
$$f(z) = \frac{z-i}{z-2i} \ .$$
Posto
$$E = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 2, |z-(2+2i)| < 2\}$$
determinare $f(E)$.

Soluzione. Abbiamo
$$f^{-1}(w) = \frac{2iw-i}{w-1} \ .$$
Quindi
$$f(E) = \left\{ w \in \mathbb{C} | |\frac{2iw-i}{w-1}| < 2, |\frac{2iw-i}{w-1} - (2+2i)| < 2 \right\}$$
ovvero $w \in f(E)$ se e solo se sono simultaneamente verificate le disequazioni
$$|2iw-i|^2 < 4|w-1|^2 \ , \ |2iw-i-(2+2i)(w-1)|^2 < 4|w-1|^2$$
Semplificando si ottiene
$$4\Re e w < 3 \ , \ -4\Im m w < -1 \ ,$$
e quindi
$$f(E) = \left\{ w \in \mathbb{C} | \Re e w < \frac{3}{4}, \Im m w > \frac{1}{4} \right\} \ .$$

(3) Calcolare
$$\int_\gamma z e^{-\frac{1}{z^2}} dz$$
nei seguenti due casi
$$\gamma = \gamma_1 : z = (2+\sin t)e^{i2t} \ , \ 0 \le t \le \pi \ ,$$
$$\gamma = \gamma_2 : z = (2+\sin t)e^{i2t} \ , \ 0 \le t \le 2\pi \ .$$

Soluzione. Si ponga
$$\gamma_3 : z = (2+\sin t)e^{i2t} \ , \ \pi \le t \le 2\pi$$
risulta che $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_3$, e che γ_1, γ_3 sono separatamente i bordi di due domini D_1, D_3 con frontiera regolare a tratti, e precisamente
$$D_1 = \left\{ z = re^{i\theta} | 0 \le r < (2+\sin t), \theta = 2t, 0 \le t \le \pi \right\} \ ,$$
$$D_3 = \left\{ z = re^{i\theta} | 0 \le r < (2+\sin t), \theta = 2t, \pi \le t \le 2\pi \right\} \ .$$

Entrambi i domini contengono il punto 0 che è l'unica singolarità della funzione

$$ze^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{1-2k}}{k!} \ .$$

Risulta inoltre

$$Res(ze^{-\frac{1}{z^2}}, 0) = -1 \ .$$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} ze^{-\frac{1}{z^2}}\,dz = \int_{\gamma_3} ze^{-\frac{1}{z^2}}\,dz = 2\pi i Res(ze^{-\frac{1}{z^2}}, 0) = -2\pi i \ ,$$

$$\int_{\gamma_2} ze^{-\frac{1}{z^2}}\,dz = \int_{\gamma_1} ze^{-\frac{1}{z^2}}\,dz + \int_{\gamma_3} ze^{-\frac{1}{z^2}}\,dz = -4\pi i \ .$$