ANALISI COMPLESSA
PROVA SCRITTA DELL'8 GIUGNO 2015

(1) Sia $f \in H(B_1(0))$ tale che

$$|f(z)| \leq |\sin \frac{1}{z}| \ , \ \forall z \in B_1(0) \setminus \{0\} \ ,$$

provare che

$$f \equiv 0 \ .$$

Soluzione. $\sin \frac{1}{z}$ si annulla nei punti $z_k = \frac{1}{k\pi}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Quindi 0 è un punto di accumulazione di zeri per f, ed è interno a $B_1(0)$. Per il teorema degli zeri $f \equiv 0$.

(2) Sia

$$D = \left\{ z = x + iy | 0 < y < \sqrt{2}, |x| < y^2 \right\} \ .$$

Calcolare

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z^8 + 1} dz \ .$$

Soluzione. L'aperto D ha frontiera regolare a tratti. La funzione $\frac{1}{z^8+1}$, ha 8 singolarità nei punti

$$z_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \ , k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \ .$$

Le uniche singolarità che possibilmente stanno in D sono quelle nel quadrante $\{y > |x|\}$, cioè z_1, z_2. Valutiamo se stanno in D o no. La frontiera di D interseca la circonferenza unitaria nei punti $\pm c + is$ dove $c^2 + s^2 = 1$ e $c = s^2$, $c, s > 0$. Si calcola

$$c = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

e risulta $z_1 \in D$ se e solo se

$$\cos \frac{3\pi}{8} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

si calcola

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{8} < \frac{3.2}{8} = 0.4 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ .$$

Quindi $z_1 \in D$ e, per simmetria, anche $z_2 \in D$. Segue

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z^8+1} dz = 2\pi i \left[Res(\frac{1}{z^8+1}, z_1) + Res(\frac{1}{z^8+1}, z_2) \right] =$$

e risulta

$$= -\frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{8} \ .$$

(3) Posto $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$, verificare che le funzioni

$$u_k(z) = r^k \cos k\theta \ , \ v_k(z) = r^k \sin k\theta \ , \ k = 1, 2, \dots \ ,$$

sono armoniche su $\mathbb{C}$. Presa $g(\zeta) = (\cos\theta)^3$ per ogni $\zeta = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, determinare esplicitamente la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad B_1(0) \ , \\ u = g & \text{su} \quad \partial B_1(0) \ . \end{cases}$$

Soluzione. $f_k(z) = u_k(z) + iv_k(z) = z^k$ è olomorfa, quindi u_k, v_k sono armoniche. Ora

$$(\cos\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8}$$

ovvero

$$(\cos\theta)^3 = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta \ .$$

Quindi la soluzione al problema di Dirichlet è

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{4} r^3 \cos(3\theta) + \frac{3}{4} r \cos\theta \ .$$