ANALISI COMPLESSA
PROVA SCRITTA DEL 29 GIUGNO 2015

(1) Sia $f \in H(\mathbb{C})$ tale che
$$|f(z)| \le \left(1+|z|^{10}\right) e^{-|y|}|\sin z| \ , \ \forall z = x+iy \in \mathbb{C} \ ,$$
provare che
$$f \equiv 0 \ .$$
Soluzione:
$$|\sin z| = |\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}| = |\frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}| \le e^{|y|}$$
quindi
$$|f(z)| \le \left(1+|z|^{10}\right) \ , \ \forall z = x+iy \in \mathbb{C} \ ,$$
da cui segue, per la versione estesa del Teorema di Liouville, che f è un polinomio di grado al più dieci. Pertanto f ha al più 10 zeri o è identicamente nulla. Ora $\sin z$ si annulla sugli infiniti punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi f è identicamente nulla.

(2) Sia
$$f(z) = \frac{z+i}{z-i} \ .$$
Posto
$$E = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1, \Re e z > 0\}$$
determinare $f(E)$.

Soluzione: La trasformazione inversa di f è data da
$$f^{-1}(w) = \frac{-iw-i}{-w+1} = \frac{iw+i}{w-1} \ .$$
Pertanto
$$f(E) = \left\{ w \in \mathbb{C} | |\frac{iw+i}{w-1}| < 1, \Re e \left(\frac{iw+i}{w-1}\right) > 0 \right\} \ ,$$
qui la prima disequazione è equivalente a
$$\Re e w < 0$$
mentre la seconda risulta equivalente a
$$\Im m w > 0$$
quindi $f(E)$ è il secondo quadrante del piano complesso.

(3) Presa $g(\zeta) = \cos\theta + \sin 3\theta$ per ogni $\zeta = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, sia u la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad B_1(0) \ , \\ u = g & \text{su} \quad \partial B_1(0) \ . \end{cases}$$

Calcolare $\partial_{\bar{z}} u(0)$.

Soluzione: Si verifica che la soluzione del problema di Dirichlet è data da

$$u(z) = r\cos\theta + r^3 \sin 3\theta = \Re e z + \Im m z^3$$

quindi

$$\partial_{\bar{z}} u(0) = \frac{1}{2} \ .$$