ANCOMP 7/9/15 SOL.

1) Posto

$$f(z) = \frac{z^2 e^{iz}}{z^3+i}$$

f ha 3 poli semplici di cui due in $\{\operatorname{Im} z<0\}$ e uno solo: $z_0=i$ in $\{\operatorname{Im} z>0\}$.

Consid. $B_R^+(0) = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R,\ \operatorname{Im} z>0\}$ e poniamo $\gamma_R^+ = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=R,\ \operatorname{Im} z\geq 0\}$

Abbiamo $\partial B_R^+(0) = [-R,R]+\gamma_R^+$. Applicando il lemma di Jordan si ottiene

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz = 0$$

Quindi

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\,dt = 2\pi i\operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i\,\frac{i^2 e^{i\cdot i}}{3i^2} =$$

$$= \frac{2\pi i}{3e}.$$

2)

$$f(E) = \left\{w\in\mathbb{C} \mid -\frac{1}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{1}{4}\right\}.$$

3) a) u è armonica sse $\partial_z \partial_{\bar z} u = 0$. Ora

$$\partial_z \partial_{\bar z} u = pq\, e^{pz + q\bar z}$$

e dato che l'esponenziale è $\neq 0$ u è armonica sse $p = 0$ oppure $q = 0$.

b) Supp. ora $q = 0$ allora $u = e^{pz}$, che è olomorfa. Per il teor della mappa aperta se u è a valori reali allora è costante quindi $p = 0$. Viceversa se $p = 0$, $u = e^{q\bar z}$ cioè u è antiolomorfa, se u è a valori reali allora $\bar u = u$ è olomorfa quindi di nuovo costante cioè $q = 0$. In conclusione

$$p = q = 0.$$