ANCOMP 21/09

1

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+i} \sim \frac{1}{z^2} \quad \text{per} \quad |z| \to \infty$$

quindi

$$\int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,dz \to 0 \quad \text{per} \quad R \to \infty$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k)$$

dove z_k sono i poli di f in $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

I poli di f sono

$$z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

e solo z_1, z_2 stanno nel semip. superiore

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \left(\frac{z_1^2}{4 z_1^3} + \frac{z_2^2}{4 z_2^3} \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{\pi i}{2}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{8} - \pi\right)} \right)$$

Ora $e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}$ e $e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\pi\right)}$

rappresentano due vettori ortogonali di lunghezza 1. Quindi la loro somma ha lunghezza $\sqrt{2}$ e direzione data dalla media degli angoli

$$\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{4}\pi\right)}$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i\, e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{4}\pi\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{3}{4}\pi\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\, e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

2)

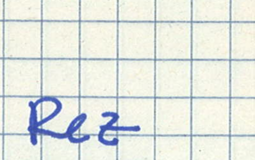
$$f^{-1}(E) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|\mathrm{Im}\, \frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \right\}$$

Ora

$$\mathrm{Im}\, \frac{z-i}{z+i} = \mathrm{Im}\, \frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{|z+i|^2} = -2\, \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z+i|^2}$$

Posto $z = x+iy$

$$\mathrm{Im}\, \frac{z-i}{z+i} = \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$



Quindi la disequazione

$$\left| \operatorname{Im} \frac{z-i}{z+i} \right| < 1$$

si riscrive

$$-x^2-(y+1)^2 < 2x < (x^2+(y+1)^2)$$

Cioè

$$(x-1)^2+(y+1)^2 > 1$$

e

$$(x+1)^2+(y+1)^2 > 1$$

Quindi $f^{-1}(E) = \mathbb{C} \setminus \left(\overline{B_1(1+i)} \cup \overline{B_1(-1+i)} \right)$

3) u è armonica sse $u_{z\bar{z}} = 0$

Ora

$$u_{z\bar{z}} = \left(f'(pz+q\bar{z})p \right)_{\bar{z}} =$$

$$= f''(pz+q\bar{z})pq$$

Quindi $f''(pz+q\bar{z}) = 0 \quad \forall z \text{ e } \forall p,q \neq 0$

per es prendendo $z = x$

$$f''((p+q)x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cioè $f'' = 0$ su una retta di $\mathbb{C}$

Per il princ. di unicità: $f'' \equiv 0 \Rightarrow f(z) = a + bz$.