ANALISI COMPLESSA
SCRITTO DEL 18/01/16

(1) Calcolare
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\frac{x^3\sin(\pi x)}{x^4+1}dx \ .$$
Sol.: Abbiamo
$$\int_{-R}^{+R}\frac{x^3\sin(\pi x)}{x^4+1}dx = \Im m\left\{\int_{-R}^{+R}\frac{x^3e^{i\pi x}}{x^4+1}dx\right\} =$$
$$= -i\left\{\int_{-R}^{+R}\frac{x^3e^{i\pi x}}{x^4+1}dx\right\} \ .$$
Possiamo quindi applicare il lemma di Jordan, ricercando le singolarità di $f(z)=\frac{z^3}{z^4+1}$ nel semipiano superiore, queste sono $z_1=e^{i\pi/4}$ e $z_2=e^{i3\pi/4}$. Segue
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\frac{x^3\sin(\pi x)}{x^4+1}dx = 2\pi\left\{Res(f(z)e^{i\pi z},z_1)+Res(f(z)e^{i\pi z},z_2)\right\} =$$
$$= 2\pi\left\{\frac{e^{i\pi z_1}}{4}+\frac{e^{i\pi z_2}}{4}\right\} = \pi e^{-\pi\sin(\pi/4)}\cos(\pi\cos(\pi/4)) \ .$$

(2) Posta
$$f(z)=e^{z^3-9}+(z+1)^6 \ ,$$
dire quanti zeri, contati con le loro molteplicità, ha f in $B_2(0)$.
Sol.: Poniamo $g(z)=(z+1)^6$, g ha uno zero di molteplicità 6 in $B_2(0)$, e vale
$$|g(z)|\geq|2-1|^6=1 \ \forall z\in\partial B_2(0) \ ,$$
inoltre
$$|f(z)-g(z)|=|e^{z^3-9}|\leq e^{|z|^3-9}=e^{-1}<1 \ \forall z\in\partial B_2(0) \ ,$$
quindi per Rouché, f ha 6 zeri in $B_2(0)$, contati con le loro molteplicità.

(3) Caratterizzare le trasformazioni di Möbius che trasformano in sé la retta

$$\gamma = \{z = x + iy | x + y = 1\}$$

.

Sol.: Le trasformazioni di Möbius che trasformano in sé la retta reale $\mathbb{R}$ sono rappresentate da

$$\varphi_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e M rappresenta la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Possiamo trovare una trasformazione lineare complessa (quindi di Möbius) che trasformi γ in $\mathbb{R}$, per esempio

$$\varphi_L(z) = e^{i\pi/4}(z - 1)$$

e qui

$$L = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & -e^{i\pi/4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi ogni trasformazione di Möbius che trasforma in sé la retta γ si rappresenta

$$\varphi_{L^{-1}} \circ \varphi_M \circ \varphi_L(z)$$

ovvero

$$\varphi_N(z)$$

dove

$$N = L^{-1}ML$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.