AN COMP 1/2/16

1) Per $|z|=1$

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z^4 = \frac{z+\bar z}{2} - \frac{z^4 - \bar z^4}{2i} =$$

$$= \frac{z + i z^4}{2} + \frac{\bar z - i \bar z^4}{2} = \mathrm{Re}(z + i z^4)$$

Ora $z + i z^4$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ (è un polinomio) quindi $\mathrm{Re}(z+iz^4)$ è armonica e vale φ su $|z|=1$. Quindi

$$u(z) = \mathrm{Re}(z+iz^4)$$

Da cui $\partial_z u(0) = \frac{1}{2}$, quindi

$$\frac{1}{2}(\partial_x u(0) - i\, \partial_y u(0)) = \frac{1}{2} \quad \text{, ovvero}$$

$$\partial_x u(0) = 1, \quad \partial_y u(0) = 0.$$

2) $g(z) = z f'(z) \in H(B_1(0)\setminus\{0\})$ è limitata quindi ha sing. rimovibile in $z=0$. Il suo sviluppo di Laurent ha la forma

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \dots$$

Quindi $$f'(z) = \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \dots$$

Per ogni circonferenza $\partial B_r(0)$, $0<r<1$

noi sappiamo che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} f'(z)\,dz = 0$$

Cioè $a_0 = \mathrm{Res}(f',0) = 0$. Allora f' si sviluppa:

$$f'(z) = a_1 + a_2 z + \dots$$

Allora si può integrare termine a termine

$$f(z) = c + a_1 z + \frac{a_2}{2} z^2 + \dots$$

quindi $z=0$ è rimovibile per f.

3) $$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^4+81)} = O\left(\frac{1}{|z|^6}\right)$$

per $|z|\to\infty$ quindi

$$\int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}\, z>0}} f(z)\,dz \to 0 \quad \text{per } R\to\infty.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

dove z_i sono i poli di f e precisamente

$z_0=2i$, $z_1 = 3e^{i\pi/4}$, $z_2 = 3e^{i3\pi/4}$

tutti e tre sono poli semplici.

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{z_0^4 + 81} \frac{1}{2 z_0} = \frac{1}{16+81} \frac{1}{4i} =$$

$$\begin{array}{r} 16 + \\ 81 \\ \hline 97 \end{array} \qquad = \frac{1}{97 \cdot 4} (-i) = \frac{-i}{97 \cdot 4}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{1}{z_1^2 + 4} \frac{1}{4 z_1^3} = \frac{1}{9i + 4} \frac{1}{4 \cdot 27\, e^{i 3\pi/4}}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{1}{z_2^2 + 4} \frac{1}{4 z_2^3} = \frac{1}{-9i + 4} \frac{1}{4 \cdot 27\, e^{i \pi/4}}$$

$$= -\overline{\frac{1}{(9i+4)} \frac{1}{4 \cdot 27\, e^{i 3\pi/4}}} = -\overline{\mathrm{Res}(f, z_1)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \frac{2\pi}{97 \cdot 4} + 2\pi i \left(2i\, \mathrm{Im}\, \mathrm{Res}(f, z_1) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{97 \cdot 4} + \cancel{4}\pi\, \mathrm{Im} \left(\frac{1}{\cancel{4} \cdot 27} \frac{1}{(9i+1)\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{97 \cdot 4} + \frac{\pi}{27} \mathrm{Im} \left(\frac{(1-9i)(1+i)\sqrt{2}}{82 \cdot 2} \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{97 \cdot 4} + \frac{\pi}{27} \frac{\sqrt{2}}{164} \mathrm{Im} \left(\underbrace{\cancel{1+9} - 9i + i}_{-8} \right)$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi}{97 \cdot \cancel{4}\, 2} - \frac{\pi}{27} \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{41} = \pi \left(\frac{1}{97 \cdot 2} - \frac{2\sqrt{2}}{27 \cdot 41} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{194} - \frac{\sqrt{2}}{553{,}5} \right)$$