

Figure 1: onda monocromatica

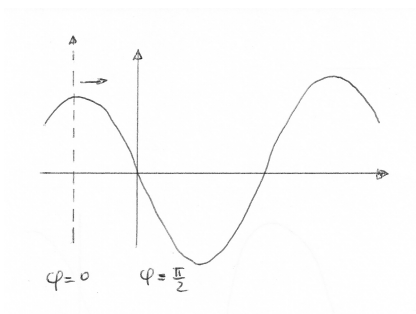


Figure 2: effetto della fase

1 Grandezze caratteristiche delle onde

Consideriamo un'onda monocromatica, cioè con una frequenza precisamente definita (figura 1).

Matematicamente è descritta da una funzione

$$A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

dove

- A = ampiezza
- k = vettore d'onda
- ω = velocità o frequenza angolare
- φ = fase iniziale

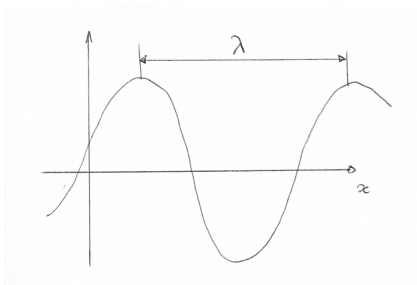


Figure 3: Lunghezza d'onda λ

La fase φ sposta l'asse delle ordinate (l'origine) avanti ($\varphi > 0$) o indietro ($\varphi < 0$). Ad esempio, per $\varphi = \pi/2$ abbiamo la situazione in figura 2.

L'onda si propaga nello spazio e oscilla nello spazio e nel tempo. Consideriamo le due situazioni

1. A $t = 0$ (ovvero a $t = \text{costante}$), esaminiamo come varia con x (figura 3)

La funzione è periodica di periodo λ , dove λ è detta lunghezza d'onda, rappresenta la distanza tra due punti di ugual fase (ad esempio tra due creste). Quindi

$$\cos(kx + \varphi) = \cos(k(x + \lambda) + \varphi)$$

da cui

$$k\lambda = 2\pi \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\bar{\nu} \quad \bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$$

dove $\bar{\nu}$ è detta numero d'onda.

2. A $x = 0$ (ovvero a $x = \text{costante}$), esaminiamo come varia con t (figura 4)

$$\cos(-\omega t + \varphi) = \cos(-\omega(t + T) + \varphi)$$

da cui

$$\omega T = 2\pi \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \nu = \frac{1}{T}$$

dove ν è la frequenza e T è il periodo dell'oscillazione.

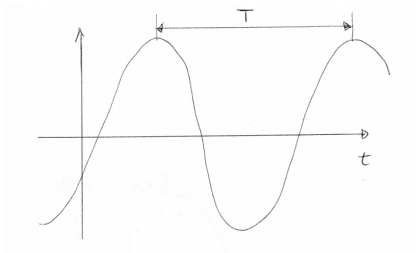


Figure 4: Periodo dell'onda T

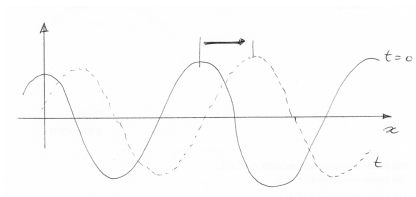


Figure 5: velocita' di propagazione dell'onda

L'onda si propaga nello spazio con velocita' v , questa e' la velocita' con cui un punto di una fase determinata, ad esempio una specifica cresta, si muove nel tempo (figura 5)

Un punto specifico dell'onda e' specificato dalla sua fase globale $kx - \omega t + \varphi$. La velocita' e' quindi determinata dalla condizione

$$kx - \omega t = \text{cost} \quad x = \frac{\omega}{k}t + c \quad \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$$

Otteniamo cosi' la relazione fondamentale

$$\lambda\nu = v$$

che lega lunghezza d'onda e frequenza alla velocita' di propagazione. Significa che se l'onda si sposta con velocita' v in un tempo pari a T ha percorso uno spazio pari a λ .

Osserviamo che nel caso piu' semplice la velocita' di propagazione e' indipendente dalla frequenza (ad esempio per le onde elettromagnetiche nel vuoto, la velocita' c , velocita' della luce, e' una costante universale). In casi piu' complicati v puo' essere funzione di ν . Normalmente questa dipendenza

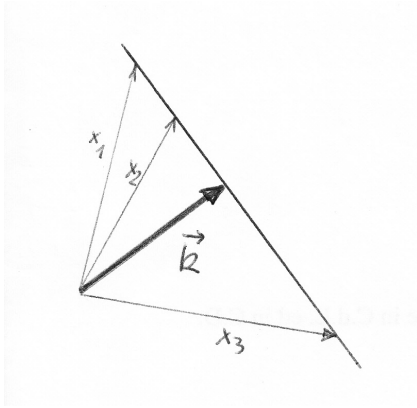


Figure 6: Piani di fase costante

si definisce assegnando la funzione $\omega(k)$, che e' detta relazione di dispersione. (Questa e' la ragione per cui un raggio di luce non monocromatico, attraversando un prisma, e' disperso nelle sue componenti monocromatiche).

In 3 dimensioni abbiamo

$$f(\bar{x}, t) = A \cos(\bar{k}\bar{x} - \omega t + \varphi)$$

I punti di ugual fase sono i piani caratterizzati da

$$\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t = \text{cost}$$

Osserviamo che $\bar{k} \cdot \bar{x} = \text{cost}$ e' un piano perpendicolare a $\bar{k}$, e' il luogo di tutti i vettori che hanno la stessa proiezione su $\bar{k}$, figura 6. Quindi i piani di ugual fase avanzano con velocita'

$$v = \frac{\omega}{|\bar{k}|}$$

nella direzione $\bar{k}$:

$$\bar{k} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = \omega \quad \bar{k} \cdot \bar{v} = \omega$$

Osserviamo che tali funzioni $f(x, y, z, t)$ sono soluzioni dell'equazione delle onde

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = 0$$

L'onda piu' generale sara' una loro sovrapposizione.