# 1 Esercizi

## 1.1 Spazi vettoriali

Studiare gli insiemi definiti di seguito, e verificare quali sono spazi vettoriali e quali no. Per quelli che non lo sono, dire quali assiomi sono violati. $x_1, x_2, x_3$ reali

- Esercizio 1.

  1. L'insieme $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
  2. L'insieme $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$
  3. L'insieme $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 x_2 x_3 = 0\}$
  4. L'insieme $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 5x_3\}$
  5. L'insieme $\{(x_1, x_2) : x_2 = x_1^*\}$, $x_1, x_2$ complessi
  6. L'insieme delle matrici $M^{m\times n}$
  7. L'insieme delle matrici $M^{m\times n}$ triangolari superiori, tali cioe' che sia $a_{i,j} = 0$ per $i > j$
  8. L'insieme dei punti (vettori) di un reticolo cristallino, cioe' le traslazioni che lasciano il reticolo invariante

- Esercizio 2. Consideriamo adesso lo spazio di funzioni $V = \{f : [0, 1] \to R\}$. Dire quali dei seguenti insiemi di funzioni sono sottospazi.

  1. L'insieme di tutte le funzioni con 2 derivate continue
  2. L'insieme di tutti i polinomi tali che $P(0) = 0$
  3. L'insieme di tutti i polinomi tali che $P(0) = 1$
  4. L'insieme di tutti i polinomi di grado 9
  5. L'insieme di tutte le soluzioni $u(x)$ dell'equazione differenziale

     $$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0$$

     ($a, b, c$ reali)

6. L'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$a(x)\frac{d^2u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} + c(x)u = f(x)$$
($a, b, c, f$ funzioni reali assegnate)
7. L'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$\frac{d^2u}{dx^2} + x^2u = 0$$
8. L'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$\frac{d^3u}{dx^3} + au^2 = 0$$
9. L'insieme di tutte le funzioni che soddisfano
$$\int_0^1 u(x)\sin 3x dx = 0$$

- Esercizio 3. Dimostrare che:
  1. Ogni sottoinsieme di un insieme l.i. di vettori e' l.i.
  2. Ogni soprainsieme di un insieme l.d. di vettori e' l.d.
  3. se $dimV = n$ ogni insieme di $n$ vettori l.i. e' una base
  4. se $dimV = n$ ogni insieme di $n + 1$ vettori e' l.d.

- Esercizio 4. Dare una base per lo spazio delle matrici $M^{m\times n}$. Qual'e' la dimensione dello spazio? Lo stesso per le mstrici triangolari superiori.

- Esercizio 5. Mostrare che $R^n$ ha dimensione $n$ e che $R^\infty$ non ha dimensione finita.

- Esercizio 6. L'insieme $\{(0, \ldots, 1_i, \ldots, 0 \ldots)\}$ e' una base per $K^\infty$? E per $K^\omega$ ?

- Esercizio 7. Trovare $c_1, c_2, c_3$ tali che , dati
$$u_1 = (1, 5), \quad u_2 = (3, 7), \quad u_3 = (2, 9)$$
in $R^2$ soddisfino
$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0$$

- Esercizio 8. Dimostrare che dati due sottospazi $S_1$ e $S_2$ allora $S_1 \bigcap S_2$ e' sottospazio.

## 1.2 Prodotti Scalari

- Esercizio 9.
  1. Dati
  $$x_1 = (2,0,0),\ x_2 = (1,1,0),\ x_3 = (1,-1,1)$$
  calcolare $\langle x_i, x_j \rangle$ e ortonormalizzarli.
  2. Ortonormalizzarli in ordine inverso, cioe' $x_3, x_2, x_1$.

- Esercizio 10. Date le funzioni definite su $[-1, 1]$
$$f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2$$
calcolare i prodotti scalari
$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{-1}^{1} f_i(x) f_j(x) dx$$
e ortonormalizzarle

- Esercizio 11. Se $P$ e' l'insieme dei polinomi $p(x)$ definiti su $[0.1]$, quale delle seguenti definizioni e' un prodotto scalare?
  1.
  $$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) v(x) dx$$
  2.
  $$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \quad u' = \frac{du}{dx}$$
  3.
  $$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx + u(0)v(0)$$

- Esercizio 12. Dato l'insieme $C(a, b)$ delle funzioni continue su $[a, b]$, $f(x) \in C(a, b)$ e $f(x) > 0$ su $(a, b)$, $u, v \in C(a, b)$, mostrare che
$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) v(x) f(x) dx$$
soddisfa gli assiomi del prodotto scalare

- Esercizio 13. Trovare una base ortonormale di $R^3$ per tutti i vettori ortogonali a $(3, 4, -1)$
- Esercizio 14. Idem in $R^4$ per tutti ivettori ortogonali a $(1, 1, 0, 0)$ e $(1, 0, 2, 1)$
- Esercizio 15. Mostrare che i vettori geometrici bidimensionali con la definizione geometrica di prodotto scalare soddisfano gli assiomi del prodotto scalare.

## 1.3 Operatori lineari

- Esercizio 16. Su $R^2$ sia
$$T : (x_1, x_2) \to (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$
Mostrare che $T$ e' lineare, che $T^{-1}$ esiste e trovare $T^{-1}$.
- Esercizio 17. Per $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $R^3$ definiamo
$$Lx = (x_1, 0, x_2)$$
Mostrare che $L$ e' lineare, e trovare $R(L)$ e $N(L)$ e le loro dimensioni (range e nucleo dell'operatore)
- Esercizio 18. Nello spazio dei vettori geometrici del piano, con origine in $O$, definiamo un sistema di riferimento cartesiano e i due vettori $x_1$ e $x_2$ da $O$ ai punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostrare che $x_1, x_2$ formano una base, e trovare le matrici relative alle trasformazioni
  1. Rotazione antioraria di 45° di un qualunque vettore attorno all'origine
  2. Moltiplicazione di un qualunque vettore per $k$
  3. Riflessione attorno all'asse $x$
  4. Proiezione di un vettore qualsiasi sulla retta $y = x$
- Esercizio 19. Sia $\{1, x, x^2, x^3\}$ una base per lo spazio dei polinomi di grado massimo 3. Sia $D$ l'operatore di differenziazione e $X$ l'operatore definito da $Xp(x) = xp(x)$, moltiplicazione per $x$, entrambi definiti sull'insieme di tutti i polinomi. Trovare le rappresentazioni matriciali nella base data per gli operatori
$$D, \ \ (XD - DX) \ \ e \ \ (X^2D^2 - D^2X^2)$$

## 1.4 Equazione ad autovalori

- Esercizio 20. Se $T^2 = 1$ mostrare che $T$ e' diagonalizzabile , e i suoi autovalori sono $+1$ e $-1$.

- Esercizio 21. Date

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  1. Trovare autovalori e autovettori delle 3 matrici in $V$ su $R$.
  2. Trovare autovalori e autovettori di $A$, $B$, $C$; $A^2$, $B^2$, $C^2$ in $V$ su $C$.

- Esercizio 22. Dato $T : V \to V$ su $C$, tale che $T^2 = -1$, mostrare che gli autovalori di $T$ sono della forma $\lambda = \pm i$, e che $T$ e' diagonalizzabile.

- Esercizio 23. Considerando lo spazio dei vettori geometrici del piano, e $T$ l'operazione di riflessione rispetto alla retta $y = x$, quali sono gli autovalori di questa trasformazione? E gli autovettori?

- Esercizio 24. Dato $T$ su $V$, $dimV = n$, sia $W_\lambda$ l'autospazio relativo a $\lambda$, e $m_\lambda$ la molteplicita' di $\lambda$ come radice dell'equazione caratteristica. Mostrare che $dimW_\lambda \leq m_\lambda$ e che condizione necessaria e sufficiente affinche' $T$ sia diagonalizzabile e' che per ogni $\lambda$ sia $dimW_\lambda = m_\lambda$

- Esercizio 25. Date le due matrici relative agli operatori $A$ e $B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  1. $A$ e $B$ sono hermitiani?
  2. Mostrare che $[A, B] = 0$
  3. Degli insiemi di operatori: $\{A\}$, $\{B\}$, $\{A, B\}$, $\{A^2, B\}$ quali formano un CSCO?

- Esercizio 26. Dati i due operatori $A$ e $B$ definiti da

$$A\phi_1 = \phi_1 \quad A\phi_2 = 0 \quad A\phi_3 = -\phi_3$$

$$B\phi_1 = \phi_3 \quad B\phi_2 = \phi_2 \quad B\phi_3 = \phi_1$$

1. Scrivere le matrici che rappresentano gli operatori nella base $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.
2. Dare la forma della matrice piu' generale che commuti con $A$; lo stesso per $A^2$;, lo stesso per $B^2$.
3. $A^2$ e $B$ formano un CSCO? Dare una base di autovettori comuni.

- Esercizio 27. Un operatore A ha 2 autofunzioni normalizzate $\phi_1$ e $\phi_2$ con autovalori $a_1$ e $a_2$. Un operatore $B$ ha autofunzioni normalizzate $\chi_1$ e $\chi_2$ con autovalori $b_1$ e $b_2$. Le autofunzioni sono legate da

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\chi_1 + 3\chi_2), \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\chi_1 - 2\chi_2)$$

Viene misurata l'osservabile $A$ ottenenedo il valore $a_1$. Se si misura successivamente $B$ e poi di nuovo $A$, mostarre che la probabilita' di riottenere $a_1$ una seconda volta e' $p = \frac{97}{169}$. Mostrare anche che la probabilita' di ottenere $a_2$ dalla seconda misura e' $p' = 1 - p = \frac{72}{169}$.

# 2 Soluzioni

- Esercizio 25.
- Esercizio 26. Soluzione:

1. Ricordando l'espressione che definisce gli elementi di matrice di un operatore
$$A\phi_i = \sum_j \phi_j A_{j,i}$$
e'
$$A\phi_1 = \phi_1 = \sum_j \phi_j A_{j,1}$$
da cui
$$A_{11} = 1 \quad A_{21} = 0 \quad A_{31} = 0$$
la colonna $i$ di $A$ da' i coefficienti della combinazione lineare in cui e' trasformato il vettore $\phi_i$. Ragionando cosi' si ottiene
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sia $X = (X_{ij})$ una matrice arbitraria e scriviamo la condizione

$$[A, X] = 0$$

in componenti, devono essere nulli tutti gli elementi $(ij)$ della matrice che esprime il commutatore

$$(AX - XA)_{ij} = 0 \qquad \sum_k (A_{ik}X_{kj} - X_{ik}A_{kj}) = 0$$

e ricordando che $A$ e' diagonale, $A_{ij} = A_{ii}\delta_{ij}$, e'

$$A_{ii}X_{ij} - X_{ij}A_{jj} = (A_{ii} - A_{jj})X_{ij} = 0$$

e poiche' per $i \neq j$ e' $A_{ii} - A_{jj} \neq 0$ segue

$$X_{ij} = x_i\delta_{ij}$$

cioe' anche $X$ deve essere diagonale.
Si verifica subito che $A^2$ e' ancora diagonale, con $A_{11} = A_{33} = 1$ e $A_{22} = 0$. Rpetendo il ragionamento, adesso la commutazione

$$[A^2, B] = 0$$

richiede solamente

$$X_{12} = X_{21} = 0 \quad \text{e} \quad X_{23} = X_{32} = 0$$

Da ultimo si vede subito che $B^2 = I$, ad esempio e' $B(B\phi_i) = \phi_i$ per ogni $i$. Quindi $B^2$ commuta con ogni matrice.

3. Da quanto visto $A$ non commuta con $B$, ma $[A^2, B] = 0$. Quindi $\{A, B\}$ non puo' essere un CSCO, per definizione, mentre $\{A^2, B\}$ ammette certamente una base di autovettori comuni, e quindi puo' esserlo, purche' in tale base ad ogni autovettore corrisponda una coppia di autovalori distinti. Poiche' $\phi_2$ e' gia' autovettore di $A^2$ e $B$, resta da diagonalizzare $B$ nel sottospazio generato dai due vettori $\phi_1, \phi_3$. La matrice di $B$ in questo spazio e'

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che come si verifica facilmente ha autovalori $1, -1$, e gli autovettori corrispondenti

$$B\psi_1 = \psi_1 \qquad \psi_1 = (\phi_1 + \phi_3)$$

$$B\psi_3 = -\psi_3 \qquad \psi_3 = (\phi_1 - \phi_3)$$

Poiche' $\phi_1$ e $\phi_3$ sono autovettori di $A^2$ relativi all'autovalore degenere $a = 1$, anche $\psi_1$ e $\psi_3$ lo sono. Abbiamo dunque la base di autovettori comuni $\{\psi_1, \phi_2, \psi_3\}$

$$\begin{array}{lll} A\psi_1 = \psi_1 & B\psi_1 = \psi_1 & (a_1, b_1) = (1, 1) \\ A\phi_2 = 0 & B\phi_2 = \phi_2 & (a_2, b_2) = (0, 1) \\ A\psi_3 = \psi_3 & B\psi_3 = -\psi_3 & (a_3, b_3) = (1, -1) \end{array}$$

Quindi tutte le coppie di autovettori sono distinte, ogni autovettore e' univocamente determinato dalla coppia di autovalori $(a_i, b_i)$ che possono essere utilizzati per indicizzarli

$$\begin{array}{l} \psi_1 \equiv \psi_{11} \\ \phi_2 \equiv \psi_{01} \\ \psi_3 \equiv \psi_{1-1} \end{array}$$

e $\{A^2, B\}$ forma un CSCO.

- Esercizio 27. Soluzione: Misuro $B$, ottenendo

$$\chi_1 \rightarrow p_1 = |\langle\phi_1, \chi_1\rangle|^2 \rightarrow p_{11} = |\langle\phi_1, \chi_1\rangle|^4$$

$$\chi_2 \rightarrow p_2 = |\langle\phi_1, \chi_2\rangle|^2 \rightarrow p_{21} = |\langle\phi_1, \chi_2\rangle|^4$$

$$p = p_{11} + p_{21} = |\langle\phi_1, \chi_1\rangle|^4 + |\langle\phi_1, \chi_2\rangle|^4 = \frac{2^4 + 3^4}{13^2} = \frac{16 + 81}{169} = \frac{97}{169}$$

E analogamente

$$\chi_1 \rightarrow p_{12} = |\langle\phi_1, \chi_1\rangle|^2 |\langle\chi_1, \phi_2\rangle|^2$$

$$\chi_2 \rightarrow p_{22} = |\langle\phi_1, \chi_2\rangle|^2 |\langle\chi_2, \phi_2\rangle|^2$$

$$p' = p_{12} + p_{22} = \frac{2^2 3^2}{13^2} + \frac{3^2 2^2}{13^2} = \frac{72}{169} = 1 - p$$