

Università degli Studi di Trieste

FACOLTA' DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA MECCANICA

Lezioni di

**PROGETTO DI
MACCHINE**

A.A. 2010/2011

Prof. DIEGO MICHELI

CAPITOLO 1

RICHIAMI E COMPLEMENTI DI MACCHINE

1.1 RICHIAMI E COMPLEMENTI DI SIMILITUDINE DELLE TURBOMACCHINE

Parliamo di *Similitudine delle Turbomacchine* perchè l'applicazione della teoria della similitudine costituisce un primo e potente strumento della progettazione in generale e di una turbomacchina in modo particolare. La teoria della similitudine permette di risolvere diversi problemi:

- Note le prestazioni di una macchina che ha determinate dimensioni, l'applicazione di questa teoria ci consente di ricavare le prestazioni di una macchina geometricamente simile a quella considerata ma di diverse dimensioni (esempio tipico: modellino della grande turbina idraulica che viene provato prima di procedere alla costruzione della macchina vera);
- Nota una certa condizione di funzionamento di una certa turbomacchina individuare le condizioni di funzionamento simili a quella precedente ottenibili a diverse velocità di rotazione o con diversi valori di portata o diversi valori del lavoro scambiato (fluido/macchina);
- Curve di prestazioni rilevate in determinate condizioni ambientali possono essere espresse in funzione di parametri che sono invarianti al variare delle condizioni ambientali stesse. Possiamo conoscere le prestazioni di una macchina operante in condizioni diverse (compressore a livello del mare ad agosto e in montagna a natale);

Accanto tutti questi aspetti che riguardano la capacità di predire le prestazioni di una macchina abbiamo un'aspetto proprio relativo alla progettazione:

- Con la teoria della similitudine possiamo, in maniera molto semplice e molto veloce, stabilire in una fase preliminare di progetto che tipo di macchina dobbiamo usare, quale sarà la sua geometria di base e quali saranno le sue dimensioni. Sfruttiamo l'esperienza che è stata fatta con la progettazione di tutte le macchine di quel tipo (sviluppate e provate).

Per studiare il comportamento di una turbomacchina potremmo scrivere una funzione di una serie di grandezze che ne determinano il comportamento.

$$f(D_i, l_j, \dot{m}, \omega, L_i, \mu, a_{01}, \rho_{01}) = 0$$

Queste grandezze sono:

- Una serie, più o meno lunga, di diametri D_i ;
- Una serie, più o meno lunga, di lunghezze l_j . Con "più o meno lunga" si intende che se una turbomacchina ha una geometria complessa saranno necessari un certo numero di diametri e lunghezze abbastanza elevati mentre se la geometria è semplice bastano pochi diametri e poche lunghezze;
- La portata di massa \dot{m} ;
- La velocità angolare della macchina ω ;
- La quantità di energia scambiata tra macchina e fluido L_i (lavoro scambiato per unità di massa di fluido). Con "i" indichiamo lavoro ideale cioè, con riferimento ad una pompa, il lavoro che viene effettivamente fornito all'unità di massa di fluido diverso dal lavoro che deve essere scambiato all'interno della palettatura. Se invece consideriamo un compressore adiabatico il lavoro ideale è la variazione del salto entalpico totale realizzato dalla macchina con riferimento ad un processo isoentropico;
- La viscosità dinamica μ del fluido;
- Il comportamento della macchina dipenderà da quanto saranno importanti i fenomeni connessi alla comprimibilità del fluido. L'identità di questi fenomeni può essere correlata al valore della velocità del suono del fluido a_{01} ;
- La densità del fluido ρ_{01} ;

Possiamo osservare che alcune di queste grandezze sono definite in maniera univoca (ad esempio velocità angolare) ma quando vado a ragionare su grandezze tipo la densità o la velocità del suono se la macchina opera su un fluido incomprimibile non ci sono difficoltà interpretative mentre se tratto una macchina termica (cioè macchina non idraulica) i fenomeni legati alla comprimibilità del fluido non sono trascurabili.

Il numero che ci consentirà di stabilire se una macchina è idraulica o termica è il Numero di Mach.

In una macchina termica in cui il fluido cambia le proprietà nei vari punti della macchina per definire la densità o la velocità del suono devo fissare convenzionalmente una condizione rispetto alla quale vado a valutare quella proprietà. Una condizione di riferimento che viene spesso adottata (non è l'unica) potrebbe essere quella di valutare queste quantità nelle *condizioni totali* all'ingresso della macchina (cioè condizioni valutate immaginando il

fluido in quiete) che possiamo chiamare come pedice 01 (0= condizioni totali o di ristagno; 1= condizioni di ingresso).

Per trovare quanto vale la funzione f potrei affrontare uno studio analitico della macchina oppure realizzare tutta una serie di sperimentazioni tenendo costante una grandezza e variando le altre affrontando un problema poco gestibile. Allora applichiamo la teoria della similitudine per ridurre il problema portandolo in una forma gestibile.

Teorema di Bukingamm

Se andiamo a vedere le grandezze fisiche di questo elenco di grandezze caratteristiche vediamo che sono tutte funzioni di lunghezza L, massa M e tempo T. Cioè tutte queste grandezze, con opportuni esponenti, possono essere espressi come un prodotto di lunghezza massa e tempo.

Esiste un teorema che ci dice che possiamo, partendo da questo elenco di grandezze, sostituire alle 3 grandezze fondamentali, altre 3 grandezze scelte da quell'elenco esprimendo tutte le altre sotto forma di gruppi adimensionali. Cioè possiamo scegliere 3 grandezze dall'elenco ed adimensionalizzare le altre in funzione di queste. Al posto delle grandezze fondamentali L, M e T possiamo scegliere (per il caso delle turbomacchine) ρ_{01}, ω, D (D è il diametro massimo della girante della turbomacchina).

Posso addimensionalizzare tutte le grandezze che compaiono utilizzando ρ_{01}, ω, D con gli opportuni esponenti ed ottenendo una serie di grandezze adimensionali che sono in numero ridotto rispetto quelle precedenti. Facendo questa operazione vado a definire una serie di grandezze adimensionali:

$$\pi_i = \frac{D_i}{D}$$

Tutti i diametri scelti per descrivere la geometria diviso il diametro di riferimento (che è il diametro massimo della girante).

$$\pi_j = \frac{\ell_j}{D}$$

Queste cifre definiranno la geometria della macchina (no la dimensione perchè tutto è stato adimensionalizzato dividendo per il diametro massimo).

Seguendo l'elenco trovo poi la portata di massa che mi consente di definire la *cifra di flusso*

$$\varphi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}\omega D^3} \left(= \frac{Q}{\omega D^3} \right)$$

Posso mettere in evidenza la portata di volume Q ed ottenere l'espressione che viene più utilizzata per le macchine idrauliche. Già da questa prima definizione possiamo dire che, parlando di cifre adimensionali, il vincolo dell'adimensionalità è rispettato anche se introduco nell'espressione dei coefficienti numerici.

Con il lavoro L_i definiamo la *cifra di pressione* (o cifra di lavoro o cifra di lavoro ideale)

$$\psi = \frac{L_i}{\omega^2 D^2}$$

Successivamente occorre adimensionalizzare la viscosità dinamica μ . Troverei l'inverso del *numero di Reynolds*

$$\text{Re} = \frac{\rho_{01}\omega D^2}{\mu}$$

Sarebbe l'inverso della viscosità adimensionalizzata. Possiamo notare la somiglianza con il numero di Reynolds definito, per esempio, per il diagramma di Moody. Abbiamo il prodotto ωD che dimensionalmente è una velocità che moltiplica D .

Proseguendo troviamo la velocità del suono a_{01} che ci permette di definire il *numero di Mach* come l'inverso della velocità del suono adimensionalizzata

$$\text{Ma} = \frac{\omega D}{a_{01}}$$

Per finire abbiamo la densità ρ_{01} che è una delle grandezze scelte come riferimento.

Allora siamo passati dal legame funzionale di partenza ad un legame tra le grandezze appena definite:

$$f(\pi_i, \pi_j, \varphi, \psi, Re, Ma) = 0$$

Quindi le prestazioni della nostra turbomacchina saranno tutte funzioni di queste grandezze adimensionalizzate che sono in numero ridotto rispetto quelle di partenza. Ricordiamo inoltre che questa è la stessa procedura logica con la quale si affronta lo studio delle perdite di carico nelle tubazioni oppure lo stesso approccio con il quale si studia i problemi di convezione forzata o naturale.

Questo legame funzionale è comunque ancora parecchio complesso da risolvere. Allora bisogna vedere quali sono le *condizioni di similitudine* di due turbomacchine.

Due turbomacchine sono simili se hanno lo stesso valore di tutti questi parametri

Però se volessi imporre questa condizione in modo effettivo troverei un risultato piuttosto banale cioè la macchina simile che sto cercando è la stessa macchina funzionante con le stesse condizioni di funzionamento (è simile a se stessa ovviamente). Possiamo tuttavia ottenere dei risultati interessanti.

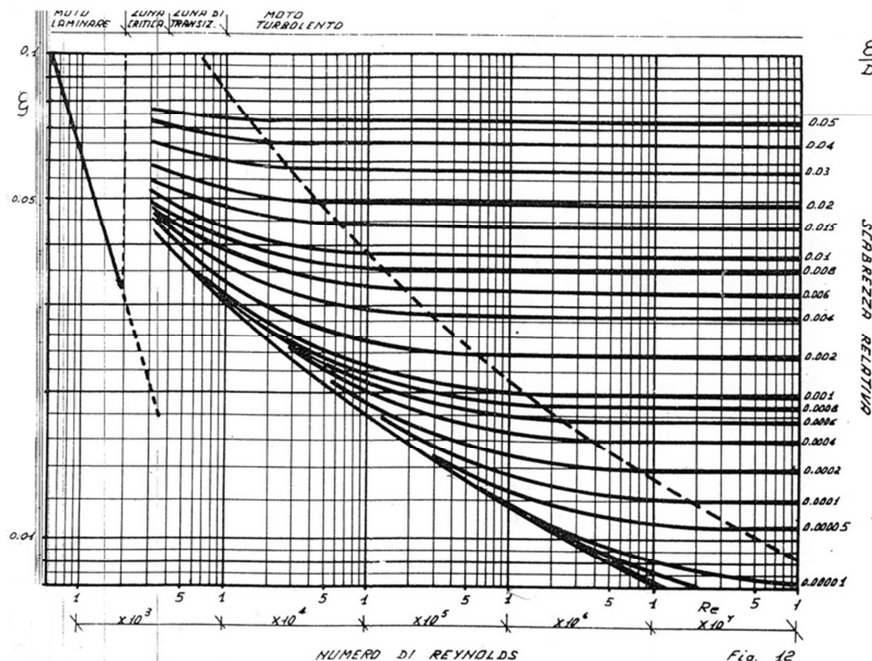
Supponiamo di considerare non tutte le macchine ma di ragionare nell'ambito di una famiglia di *macchine geometricamente simili*. Macchine geometricamente simili avranno lo stesso valore delle cifre π_i, π_j . Avranno dimensioni diverse ma saranno geometricamente simili. Quindi per una certa geometria di macchina potrò scrivere che le sue prestazioni saranno definite da una funzione solamente di

$$f(\varphi, \psi, Re, Ma) = 0$$

Quindi due macchine, una grande ed una piccola, aventi la stessa geometria se hanno gli stessi valori di φ, ψ, Re, Ma si comportano in maniera simile. Questo legame è comunque ancora complesso e sarebbe troppo vincolante.

Possiamo ridurre la complessità di questo legame supponendo che la corrente che defluisce attraverso la nostra macchina sia una *corrente turbolenta* (con turbolenza pienamente sviluppata). Avere una corrente pienamente sviluppata vuol dire avere una corrente caratterizzata da un numero di Reynolds molto

alto. Il numero di Reynolds è quel parametro che ci consente di classificare i diversi regimi di flusso. Per bassi valori del numero di Reynolds siamo in un flusso laminare. Poi abbiamo una zona di transizione ed infine si passa al flusso turbolento. Ricordiamo l'andamento del diagramma di Moody



In ascisse mettiamo Re ed in ordinate il coefficiente di perdite di carico del nostro tubo. Le scale sono logaritmiche. Il legame tra ξ ed Re , per bassi numeri di Reynolds, è rappresentato da una retta. Poi abbiamo una zona di transizione non ben definita ed infine una serie di linee che sono delle linee a parametro costante in cui il parametro che le caratterizza è la rugosità relativa ε/D (con ε rugosità media).

Dove abbiamo un legame lineare ed una curva unica per tutti i valori di rugosità del tubo abbiamo la corrente laminare. Il tratto tratteggiato è un tratto nel quale, in condizioni sperimentali assolutamente controllate, è possibile mantenere un flusso laminare ma basta una perturbazione infinitesima per perdere subito la linearità. Quando poi andiamo in condizioni di flusso turbolento troviamo che la perdita di carico dipende dalla rugosità. Inoltre possiamo osservare che se consideriamo un solo valore di rugosità relativa la curva presenta una certa pendenza fino ad un certo valore di Re (limite o critico) e poi diventa orizzontale.

Se il numero di Reynolds è superiore ad un certo valore limite il coefficiente di perdita di carico è indipendente dal Re . Se trasferiamo questa osservazione

alla turbomacchina si può verificare sperimentalmente che se Re è molto elevato questo potrà anche variare ma le prestazioni non ne saranno influenzate. Variazioni anche grandi del numero di Reynolds purchè siano nel campo di Re molto elevato, non influenzano le prestazioni della mia macchina.

Allora in queste condizioni il legame funzionale si semplifica ancora. Posso scrivere che le prestazioni per la mia famiglia di turbomacchine geometricamente simili operanti ad alto Re sono descritte dal legame

$$f(\varphi, \psi, Ma) = 0$$

Questa condizione è un limite ma è rispettata nella grande maggioranza dei casi. Questo è il legame funzionale di tipo più semplice che possiamo dedurre per descrivere le prestazioni di una turbomacchina termica. Cioè se prendo un compressore o una turbina che operano su fluido incomprimibile e considero tutto la famiglia di macchine geometricamente simile a quella considerata operante ad alto numero di Reynolds, le prestazioni di questa famiglia di macchine saranno descritte da un legame tra 3 grandezze. Posso scrivere in forma esplicita:

$$\psi = f(\varphi, Ma)$$

Questo significa che se voglio andare a rilevare sperimentalmente le prestazioni di un compressore farò la mia prova. I dati di prova rilevati saranno pressione di aspirazione, pressione di mandata, temperatura di aspirazione ecc ecc. Gli elaboro in maniera tale da ricavare i valori di ψ , φ e Ma . Le prestazioni potranno quindi essere espresse in un diagramma in cui metterò in ascissa la cifra di flusso, in ordinata la cifra di pressione e su questo piano avrò un certo numero di curve a Ma costante (curve di prestazione del mio compressore).

In alcuni casi possiamo fare ancora un passo. Se consideriamo una macchina nella quale i fenomeni di comprimibilità sono trascurabili cioè considero le macchine idrauliche, avrò un numero di Mach tipicamente molto basso. È molto basso per due serie di motivi:

- L'esperienza e la pratica ci farà vedere che le velocità periferiche e di flusso sono relativamente limitate (per compressori o turbine a gas abbiamo centinaia di m/s; per macchine idrauliche abbiamo velocità di qualche decina di m/s perchè altrimenti avrei un incremento delle perdite di carico);

- La velocità del suono è $a_{01} = \sqrt{kRT_{01}}$. k è il rapporto tra i calori specifici. Quindi la velocità del suono varia con la temperatura. Inoltre sappiamo che la velocità del suono in un liquido è più alta che in un gas. Allora il risultato è che Ma in queste macchine è sempre piccolo ($Ma \ll 0,3$). Anche l'analisi teorica dimostra che i fenomeni connessi alla comprimibilità sono trascurabili se $Ma \ll 0,3$.

In queste macchine succede che posso anche variare Ma (cambiando la temperatura del fluido oppure la velocità di rotazione) ma se rimango su Ma molto bassi questa variazione non influenza le prestazioni e quindi il legame funzionale diventa

$$f(\varphi, \psi) = 0$$

Oppure

$$\psi = f(\varphi)$$

Quindi per una famiglia di macchine idrauliche geometricamente simili, operanti ad alto numero di Re , le prestazioni sono descritte da un semplice legame funzionale tra due grandezze.

La semplicità di questo legame funzionale fa sì che gli strumenti della similitudine dell'analisi adimensionale hanno sempre trovato un'applicazione particolarmente estesa proprio nel campo delle macchine idrauliche ma hanno applicazioni importanti anche nel campo delle turbomacchine termiche.

Osservazioni

Affinchè delle macchine idrauliche operino in condizioni di similitudine tra di loro, sarà sufficiente che abbiano lo stesso valore di ψ e φ .

È facile vedere che il mantenimento di condizioni di similitudine significa mantenere condizioni di similitudine dei triangoli di velocità. Quindi condizioni di funzionamento simili implicano triangoli di velocità simili. Questo in particolare nel caso di macchina idraulica.

Per dimostrare quanto detto ci limitiamo al caso dei due parametri:

$$\varphi = \frac{Q}{\omega D^3} \propto \frac{c_m}{u}$$

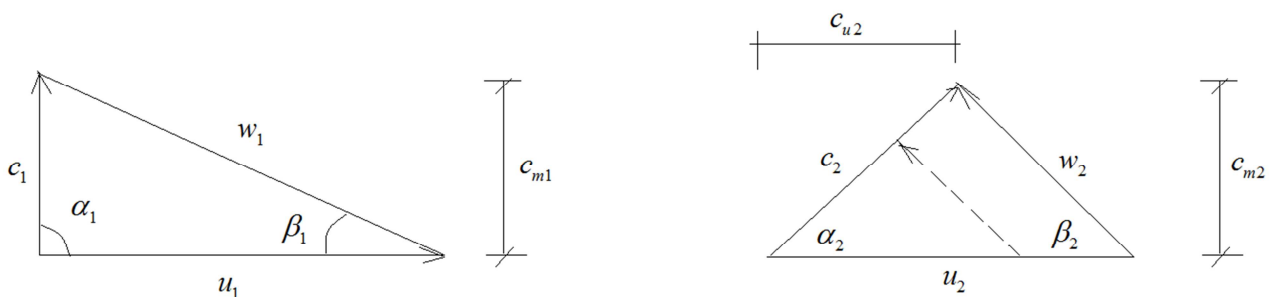
L'espressione di sinistra è proporzionale al rapporto tra la velocità meridiana (= componente della velocità assoluta sul piano meridiano, velocità associata al concetto di portata quindi proporzionale al rapporto Q/D^2) e la velocità periferica.

Per la cifra di pressione:

$$\psi = \frac{L_i}{\omega^2 D^2} \propto \frac{c_u}{u}$$

Ricordando l'espressione del lavoro Euleriano (il lavoro scambiato in una turbomacchina dipende da un'espressione in cui compare il prodotto uc_u) possiamo vedere che la cifra di pressione è proporzionale al rapporto c_u/u .

Quindi due macchine che operano in condizioni di similitudine hanno lo stesso valore di ψ e φ e quindi avranno lo stesso valore dei rapporti c_m/u e c_u/u . Allora si manterranno i valori degli angoli dei triangoli di velocità.



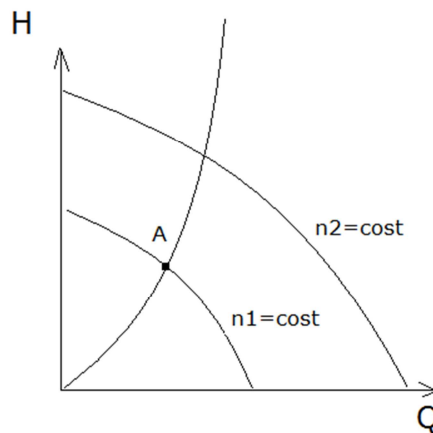
Consideriamo per esempio i triangoli di velocità (in ingresso ed in uscita) di una pompa centrifuga. Abbiamo le velocità periferiche, la velocità assoluta c , la velocità relativa w , gli angoli di flusso della corrente assoluta α e della corrente relativa β .

Operare in condizioni di similitudine vuol dire che se parto da una condizione di funzionamento nota e la voglio modificarla dovrò far variare la portata (quindi c_m) e la velocità di rotazione contemporaneamente in maniera tale da mantenere uguali gli angoli dei triangoli di velocità. Posso ridurre la velocità u_2

e la velocità c_{m2} in modo da portarmi in un'altra condizione di funzionamento (diversa dalla precedente) però conservando gli angoli del triangolo di velocità.

Consideriamo il caso di una macchina idraulica (una pompa centrifuga) e vediamo come possiamo trovare il luogo dei punti di funzionamento simili sul piano delle prestazioni e quindi come le curve di prestazioni adimensionali stanno in rapporto con le curve di prestazioni dimensionali.

Se rileviamo le prestazioni di una pompa otteniamo la curva di funzionamento caratteristica (diagramma prevalenza-portata) per un certo valore della velocità di rotazione:



Queste sono curve espresse in funzione di grandezze adimensionali. Possiamo però esprimerle in funzione di grandezze dimensionali. Prendiamo un punto di funzionamento A e chiediamoci quale sarà il luogo dei punti di funzionamento simile a questo? Sarà il luogo dei punti su quel piano caratterizzato dal fatto di avere lo stesso valore di ψ e φ .

Partiamo dalla cifra di flusso indicando senza il pedice il valore della grandezza con riferimento al punto A:

$$\varphi = \frac{Q}{\omega D^3} = \frac{Q_x}{\omega_x D^3}$$

Voglio trovare il luogo dei punti che hanno lo stesso valore di φ per cui considero delle grandezze incognite Q_x e ω_x sempre moltiplicate per D^3 perchè sto ragionando su la stessa macchina che ha lo stesso diametro. Quindi da questa espressione troverò:

$$\frac{Q_x}{Q} = \frac{\omega_x}{\omega}$$

Oppure la portata incognita sarà

$$Q_x = Q \frac{\omega_x}{\omega}$$

La seconda condizione di similitudine per la mia pompa impone l'uguaglianza della cifra di pressione ψ . In questo caso il lavoro potrà essere scritto come un prodotto gH :

$$\psi = \frac{gH}{\omega^2 D^2} = \frac{gH_x}{\omega_x^2 D^2}$$

Quindi otteniamo:

$$H_x = H \left(\frac{\omega_x}{\omega} \right)^2$$

Allora

$$H_x = H \left(\frac{Q_x}{Q} \right)^2$$

che, mettendo in evidenza le grandezze note, diventa

$$H_x = \frac{H}{Q^2} Q_x^2$$

Questa è l'equazione di una parabola che si trova sul piano H-Q, che passa per il punto A e ha origine nell'origine degli assi. Questa parabola rappresenta il luogo dei punti di funzionamento simili a quello considerato. Tutti i punti che si trovano sul piano H-Q ed appartengono a questa parabola avranno valori uguali di ψ e φ .

Osserviamo che se questa fosse una pompa inserita in un impianto e questo avesse una prevalenza geometrica pari a 0 e quindi la caratteristica del sistema fosse data solo dall'andamento delle perdite di carico, praticamente tutti i punti descritti dalla curva di resistenza del circuito sarebbero punti simili.

Se passo da una rappresentazione delle prestazioni in termini di grandezze dimensionali ad una in termini di grandezze adimensionali (traccio il diagramma di ψ e φ) troverò un'unica curva ed un punto di questa curva corrisponderà a quella parabola ottenuta sul piano precedente. Nel passare dalla rappresentazione dimensionale a quella adimensionale ottengo una curva che non dipende più dalla velocità di rotazione (ho un unico legame $\psi - \varphi$).

Abbiamo preso una pompa, abbiamo provato un paio di velocità di rotazione ed abbiamo trovato le curve H-Q. Le abbiamo trasformate in grandezze adimensionali trovando il diagramma adimensionale che vale per tutta la famiglia di pompe geometricamente simili a quella che ho provato (grande o piccola che sia purchè sia rispettato il limite sul numero di Reynolds) per qualsiasi valore di velocità di rotazione. Ho trovato un'unica curva di prestazione legata alla forma della macchina.

Abbiamo visto che la condizione di similitudine si può studiare uguagliando i valori delle cifre adimensionali in diverse condizioni di funzionamento. Imponiamo l'uguaglianza della cifra di flusso φ :

$$\frac{Q_x}{\omega_x D_x^3} = \frac{Q_y}{\omega_y D_y^3}$$

Confrontiamo due macchine che hanno la stessa geometria ed imponiamo a queste macchine di operare in similitudine. Allora il rapporto tra le portate sarà:

$$\frac{Q_x}{Q_y} = \frac{\omega_x}{\omega_y} \left(\frac{D_x}{D_y} \right)^3$$

Se abbiamo a che fare con la stessa macchina, cioè $D_x = D_y$ allora

$$\frac{Q_x}{Q_y} = \frac{\omega_x}{\omega_y}$$

Cioè la variazione della portata volumetrica varia linearmente con la velocità di rotazione.

Facciamo lo stesso ragionamento sulla cifra di pressione ψ :

$$\frac{L_{ix}}{\omega_x^2 D_x^2} = \frac{L_{iy}}{\omega_y^2 D_y^2}$$

Mettiamo in evidenza il rapporto tra i lavori

$$\frac{L_{ix}}{L_{iy}} = \left(\frac{\omega_x}{\omega_y} \right)^2 \left(\frac{D_x}{D_y} \right)^2$$

Se la macchina è la stessa abbiamo

$$\frac{L_{ix}}{L_{iy}} = \left(\frac{\omega_x}{\omega_y} \right)^2$$

Il rapporto dei lavori sarà pari al quadrato del rapporto delle velocità angolari, cioè in una turbomacchina il lavoro scambiato varia con il quadrato della velocità di rotazione.

Le cifre adimensionali finora introdotte non esauriscono il numero delle possibili cifre adimensionali di interesse. Nell'analisi tecnica delle macchine si usano anche altre cifre adimensionali. Queste si possono ottenere come combinazione delle cifre già definite.

Oltre alla cifra ψ nella quale abbiamo introdotto al numeratore il lavoro ideale (isoentropico in una macchina termica o l'energia effettivamente trasferita al fluido in una pompa) possiamo definire una *cifra di lavoro "effettivo"*. Con la lavoro effettivo si intende il lavoro effettivamente scambiato nella girante tra macchina e fluido.

$$\lambda = \frac{L_e}{\omega^2 D^2}$$

Il lavoro effettivo è quel lavoro, che in una turbomacchina, corrisponde al lavoro unitario L_u cioè il lavoro scambiato per unità di massa di fluido. Nel caso di macchina operatrice sarà

$$L_e = L_u = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$$

Nel caso di macchina motrice basta invertire gli indici.

Un'altra cifra che si usa spesso è il coefficiente o *cifra di potenza* che sarà il rapporto tra la potenza effettiva e un qualcosa che ha le dimensioni di una potenza:

$$\Lambda = \frac{P_e}{\rho \omega^3 D^5}$$

La potenza effettiva è quella che in una macchina operatrice viene effettivamente assorbita e che quindi sarà affetta da tutti i rendimenti. In una macchina motrice è la potenza utile effettiva che ho depurato di tutte le perdite. Potrebbe essere anche un'altra potenza (come per esempio una

potenza interna) ma generalmente nella definizione della cifra di potenza si usa quella effettiva perchè è questo il dato solitamente noto (quanto assorbe la macchina o quanto mi dà di potenza utile).

Un'altra cifra è il *coefficiente di velocità periferica*.

$$k_p = \frac{\omega D}{\sqrt{L_i}}$$

Questa è una cifra che lega la velocità periferica di una macchina al lavoro ideale della macchina.

Alla luce di quanto detto ed osservato (con particolare riferimento alla cifra di potenza) possiamo dire che le cifre adimensionali non sono necessariamente indipendenti tra loro. Date alcune cifre di base possiamo definire le altre in funzione di queste. Ad esempio

$$\Lambda = \varphi \cdot \psi \cdot \eta_e \quad (\text{macchina motrice})$$

$$\Lambda = \frac{\varphi \cdot \psi}{\eta_e} \quad (\text{macchina operatrice})$$

In conclusione la similitudine può essere sintetizzata nel concetto che per macchine geometricamente simili punti di funzionamento corrispondenti sono caratterizzati dagli stessi valori di tutte le variabili adimensionali. Questo concetto è noto come *Legge dei modelli*.

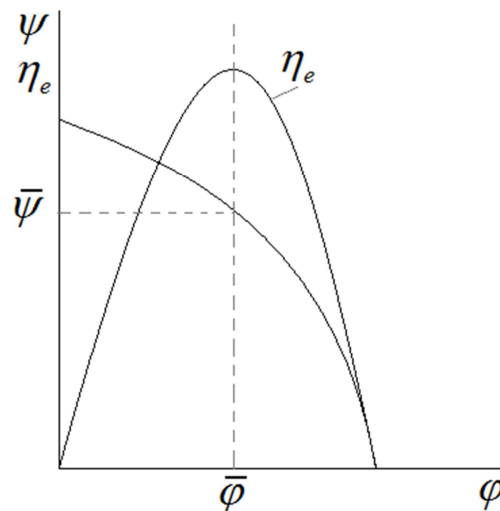
Nel caso di macchine in cui le cifre adimensionali significative siano solo ψ e φ (lasciamo per il momento il caso delle macchine termiche in cui compare anche il numero di Mach) data una macchina, che ha una certa geometria, a quella geometria corrisponderà una curva $\psi - \varphi$.

Poichè ad ogni geometria corrisponde una curva posso pensare ad un parametro che definisce la geometria. Questo sarà un parametro adimensionale nel quale non compare il diametro perchè la geometria è la forma della macchina indipendentemente dalle sue dimensioni. Questo numero viene chiamato *numero caratteristico di macchina* k o *velocità specifica* ω_s .

$$\left. \begin{matrix} k \\ \omega_s \end{matrix} \right\} = \varphi^{1/2} \psi^{-3/4} = \omega \sqrt{\frac{\dot{m}}{\rho_{01}}} \cdot L_i^{-3/4} = \omega \frac{\sqrt{Q}}{L_i^{3/4}}$$

In questa cifra non compare il diametro. Questa cifra nella sua definizione non risponde al problema che ci siamo posti (cioè trovare un numero che definisca una geometria). Non risponde al problema perchè così come esiste una curva $\psi - \varphi$, esiste una curva di k . Allora definisco un criterio per individuare la coppia di valori $\psi - \varphi$ che mi diano un unico valore di k .

Il criterio è di prendere i valori di $\psi - \varphi$ nel punto di massimo rendimento. Introduciamo nel diagramma $\psi - \varphi$ anche la curva del rendimento



Vado a prendere il punto di massimo rendimento ed in corrispondenza di questo avrò un valore $\bar{\psi}$ e $\bar{\varphi}$ in corrispondenza dei quali mi calcolo k o ω_s . Ho un numero che corrisponde ad una certa geometria e questo numero diventa uno strumento potente di classificazione e di progettazione di una macchina. È uno strumento potente perchè ad un numero corrisponde una geometria e questo mi consente di classificare le geometrie. Bisogna fare attenzione perchè si potrebbero trovare due macchine che hanno due diversi valori del punto

$\psi - \varphi$ ma che hanno lo stesso valore del massimo rendimento. Potrei avere due diverse geometrie corrispondenti allo stesso valore di k .

Però se ribalto il discorso ho delle certezze: se due macchine hanno k diversi sicuramente sono geometricamente diverse.

In effetti si dimostra che la classificazione della geometria sulla base di k dal punto di vista pratico-operativo è estremamente funzionale e rappresenta un classico.

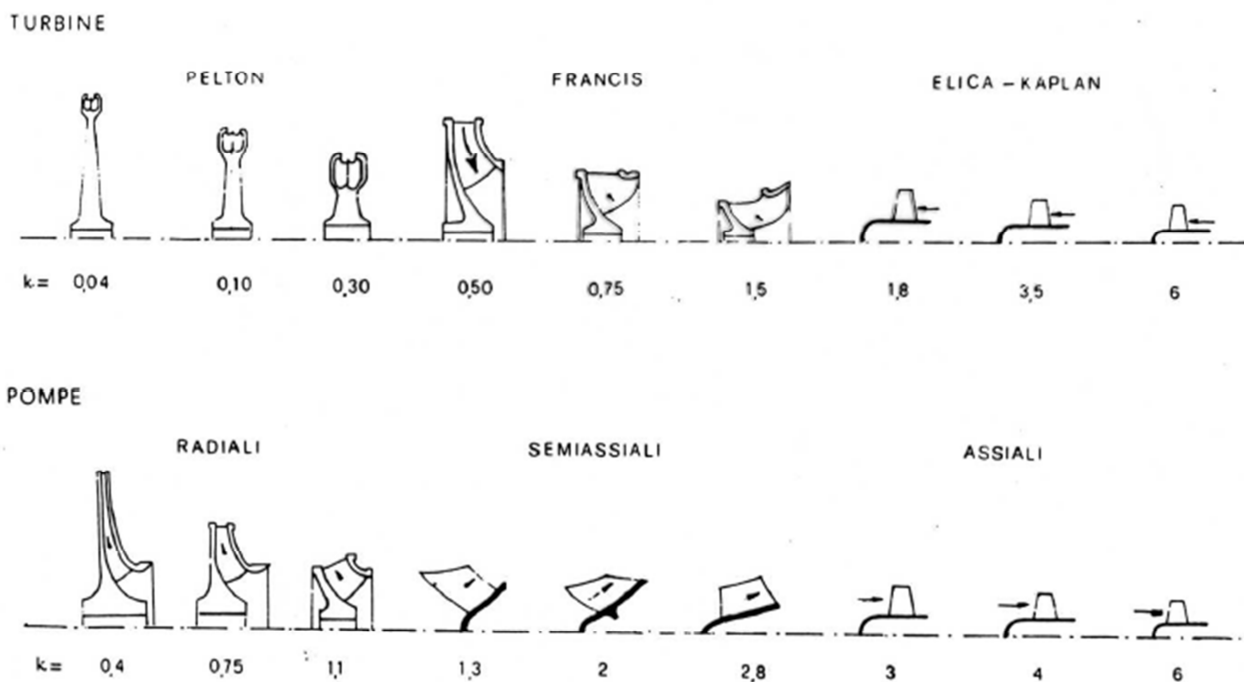


Fig. 3.5 - Variazione della forma delle giranti delle turbine e delle pompe idrauliche al variare del numero caratteristico di macchina.

Abbiamo le macchine idrauliche (turbine e pompe) ma si potrebbe fare un discorso analogo anche per le macchine termiche. Possiamo vedere come varia la forma con il valore di k . Avere dei k piccoli significa avere delle macchine nelle quali il termine di scambio di energia è prevalente rispetto al termine di portata.

Seguiamo l'evoluzione delle pompe. Nelle pompe valori di k più piccoli corrisponderanno a macchine centrifughe nelle quali lo scambio di energia è particolarmente intenso (perchè abbiamo la differenza della velocità di rotazione tra ingresso ed uscita). Avremo delle macchine fortemente radiali con canali di flusso piccolini perchè la portata è proporzionalmente piccola rispetto all'entità del lavoro scambiato.

Mano a mano che k aumenta il termine di portata comincia a diventare sempre più pesante. Quindi passiamo per pompe che sono sempre centrifughe ma con diametro di ingresso più grande e canali di flusso più grandi. Poi la geometria cambia diventando semi-assiale e poi assiale. In quest'ultime la prevalenza sviluppata è limitata dalla portata del fluido che è molto grande perchè è molto grande la sezione.

Ad ognuna delle geometrie presenti in fig. 3.5 corrisponderà una curva $\varphi-\psi$ e lo stesso discorso vale anche per le turbine idrauliche. Abbiamo un passaggio graduale di geometria analogo a quello delle pompe finchè rimaniamo nel campo delle turbine Francis ($k > 0,5$). Per valori di $k < 0,5$ la pratica ha dimostrato che occorre passare a macchine ad azione. Con k più piccolo abbiamo dimensioni del cucchiaio limitate rispetto il diametro della macchina ad indicare molto lavoro e poco portata.

Dal punto di vista della progettazione per capire come ci aiuta la definizione di k dobbiamo vedere quali sono le grandezze che ci servono per calcolarlo. Ricordando che

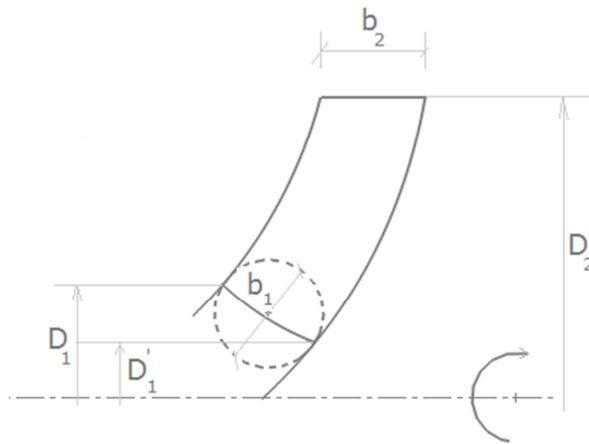
$$k \left. \vphantom{k} \right\} = \varphi^{1/2} \psi^{-3/4} = \omega \sqrt{\frac{\dot{m}}{\rho_{01}}} \cdot L_i^{-3/4} = \omega \frac{\sqrt{Q}}{L_i^{3/4}}$$

Abbiamo bisogno della portata, del lavoro scambiato e la velocità angolare. Portata e lavoro da scambiare (portata-prevalenza oppure portata-caduta oppure portata-salto entalpico disponibile) sono disponibili per cui per conoscere k devo conoscere la velocità angolare. La velocità angolare andrà scelta sulla base di vincoli. Il vincolo classico è quello della macchina che deve essere accoppiata direttamente ad un motore elettrico o un generatore elettrico che utilizza o fornisce corrente a 50Hz e quindi la sua velocità dipenderà dal numero di coppie di poli.

Nota anche la velocità angolare conosco k e quindi osservando le tabelle come la precedente (che si trovano nella letteratura tecnica) posso subito vedere come sarà la macchina di mio interesse. Questa è il primo passo del progetto.

Questo sarebbe utile ma abbastanza limitato. Tuttavia possiamo sfruttare l'esperienza. Possiamo analizzare le migliori macchine esistenti e vedere quanto valgono per quelle macchine le cifre adimensionali π_i , π_j e diagrammarle in funzione di k . Facciamo un esempio concreto considerando

una tipica macchina radiale (una pompa centrifuga) e consideriamo la sezione meridiana semplificata al massimo



Le dimensioni caratteristiche più significative sono:

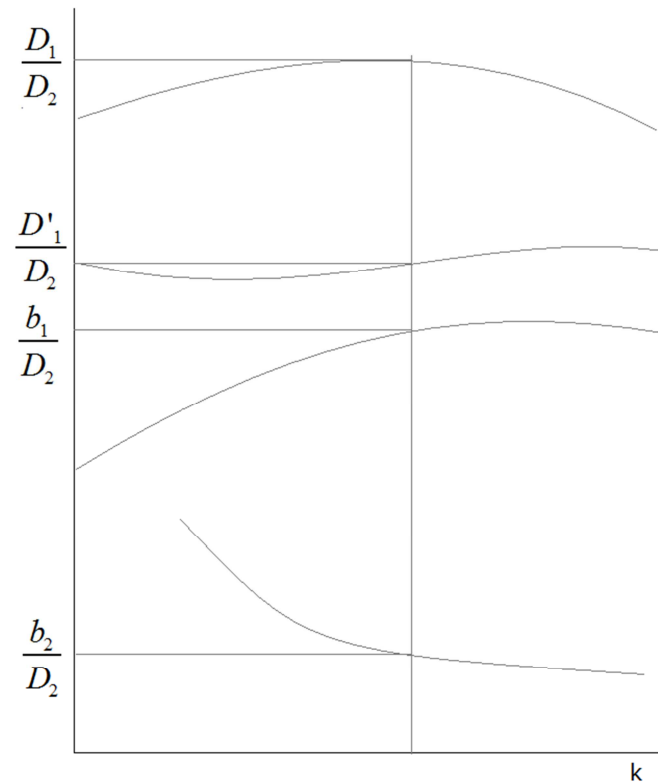
- D_2 : diametro massimo della girante;
- D_1 : diametro massimo della sezione d'ingresso;
- D'_1 : diametro minimo della sezione d'ingresso;
- b_2 : altezza della pala in uscita;
- b_1 : altezza della pala in ingresso (per definirla bisogna prendere il diametro medio e con riferimento al punto di intersezione tra questo ed il profilo della pala in ingresso posso tracciare la circonferenza inscritta nella sezione d'ingresso; come grandezza caratteristica della sezione d'ingresso prendo il diametro di questa circonferenza).

Per queste grandezze posso definire le cifre adimensionali

$$\underbrace{\frac{D_1}{D_2} \quad \frac{D'_1}{D_2} \quad \frac{b_1}{D_2} \quad \frac{b_2}{D_2}}_{f(k)}$$

queste sono le 4 cifre π che definiscono nella maniera più essenziale possibile la geometria di questa macchina. Queste cifre sono funzioni di k .

Posso allora costruire delle tabelle che riportano in ascisse il valore del numero caratteristico k ed in ordinate una serie di curve che mi riportano i valori dei 4 parametri



Allora ricapitolando, note portata, prevalenza e fissata la velocità di rotazione, conosco il valore di k . Entro in questi diagrammi e trovo i valori dei quattro parametri e quindi definisco per sommi capi la sezione meridiana della nostra macchina.

Come nota margine possiamo definire il *numero di giri specifico*

$$n_s = n \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

il cui significato è lo stesso della velocità periferica specifica.

Osservazioni

1) Abbiamo visto che possiamo definire una serie di rapporti

$$\frac{D_i}{D} = f(k) \quad \frac{l_i}{D} = f(k)$$

L'applicazione di questo criterio ci dà la forma della macchina ma non le sue dimensioni (sono tutte cifre adimensionali). Possiamo chiederci se esiste una dimensione ottimale?

2) Tutte queste cose valgono se le prestazioni sono indipendenti dal numero di Reynolds. Possiamo chiederci allora entro quali limiti si può trascurare l'influenza di Re?

2bis) Nelle turbomacchine esiste un "effetto scala"? In altre parole fino a che punto si può dire che una certa curva di prestazione vale per una certa geometria?

3) Come ci aiutano le cifre adimensionali in condizioni di funzionamento non usuali (cavitazione, pompaggio,...)?

4) Come le considerazioni che stiamo facendo devono essere modificate e corrette quando i fenomeni di comprimibilità non sono più trascurabili?

Vediamo di dare una risposta alle domande appena formulate.

1)

Si esiste una *dimensione ottimale* cioè una dimensione alla quale corrisponde il massimo rendimento. Bisogna però definire un'ulteriore grandezza detta *diametro specifico*

$$D_s = \varphi^{-1/2} \psi^{1/4} = D \cdot \frac{L_i^{1/4}}{\sqrt{Q}}$$

Bisogna cercare di eliminare la velocità di rotazione. È stato verificato che esiste, con riferimento alle dimensioni di massimo rendimento, un legame tra D_s e ω_s

$$D_s = f(\omega_s)$$

Questa funzione è un diagramma detto *Diagramma di Cordier*. Questo diagramma rappresenta un'interpolazione di una serie di dati sperimentali con un grado di dispersione parecchio limitato

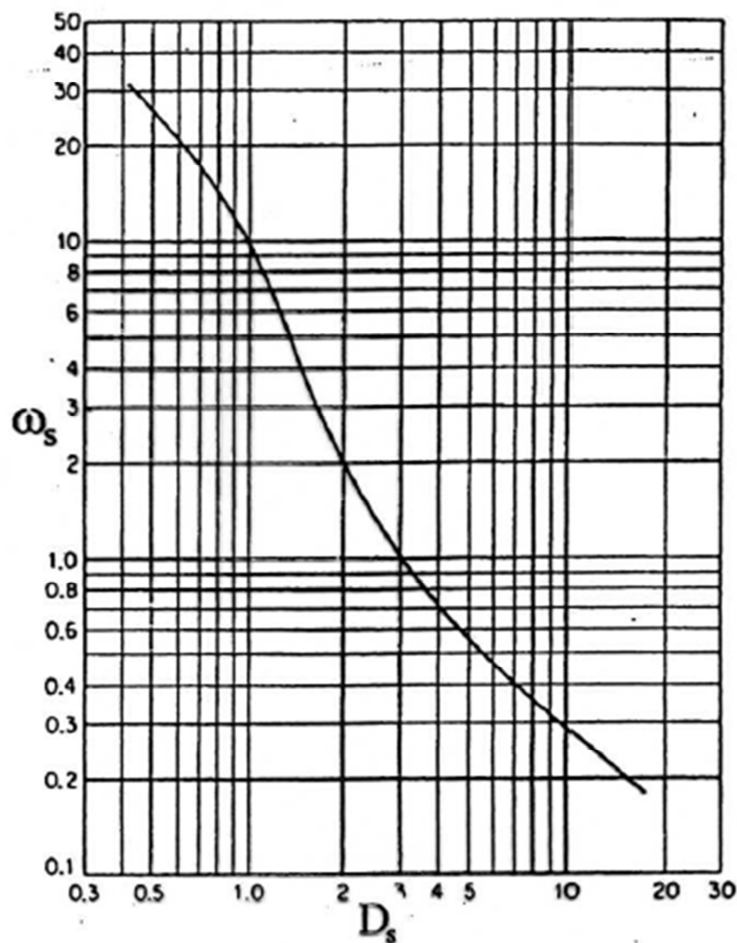


Figura 3.7: *Diagramma statistico di Cordier per correlare Diametro specifico e velocità specifica di turbomacchine operanti nel punto ottimo rendimento*

Allora nota ω_s possiamo entrare nel diagramma di Cordier e trovare il valore di D_s . Esiste un valore ottimale di D perchè esiste un'influenza del numero di Reynolds ed un effetto scala.

Se per motivi di vincoli di un progetto si è costretti ad operare con diametri diversi da quelli che risultano dai precedenti diagrammi ci possiamo chiedere di quanto andrò a penalizzare il rendimento? Possiamo rispondere a questa domanda sulla base di risultati reperibili in letteratura. Una serie di dati molto significativi sono quelli dati dai *Diagrammi di Baljè*

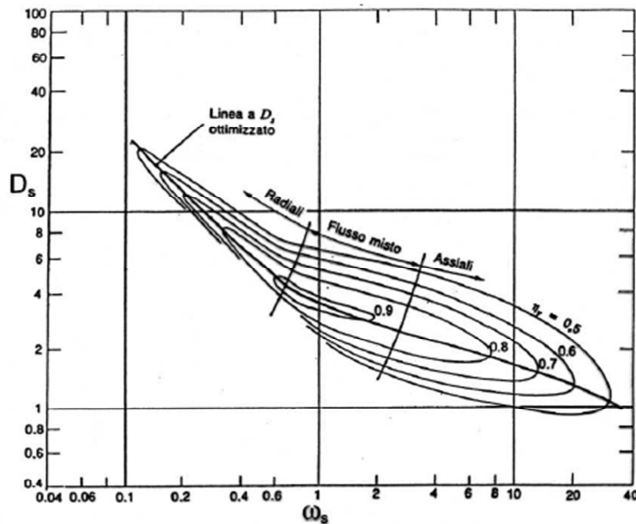


Figura 3.8: Diagramma di Baljè per pompe centrifughe ed assiali

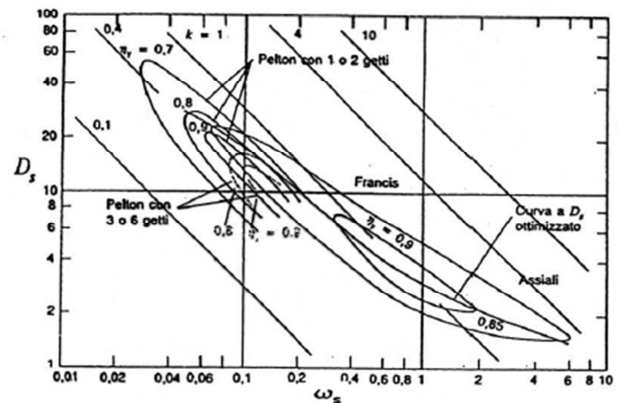


Figura 3.9: Diagramma di Baljè per turbine idrauliche

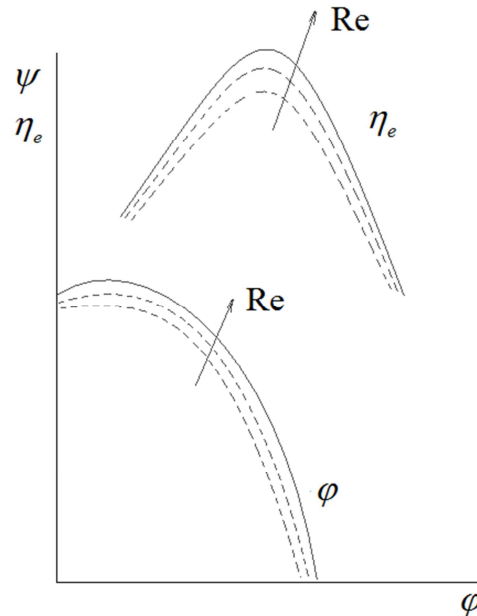
Sono diagrammi nei quali abbiamo sempre la correlazione tra diametro specifico e velocità specifica. Su questo piano riportiamo la linea centrale che rappresenta il luogo dei punti con massimo rendimento ed inoltre abbiamo curve di isolivello di valori di rendimento minori via via che ci allontaniamo dalle condizioni di massimo.

Questi sono valori che sono intesi sempre in senso relativo cioè il delta di rendimento è abbastanza significativo ma il valore assoluto potrebbe esserlo un pò meno. Questo valore dipenderà da come è ben dimensionata la macchina dal punto di vista idraulico, dalla finitura superficiale, ecc ecc. Però il gradiente di variazione è abbastanza indicativo.

Questi diagrammi sono dei classici ma non devono esser visti come un qualcosa di statico perchè mano a mano che la progettazione delle macchine evolve queste informazioni vengono integrate con informazioni di natura statistica.

2)

Per capire entro quali limiti si può trascurare l'influenza di Reynolds si inizia riportando qualitativamente il diagramma delle prestazioni adimensionali $\psi - \varphi$



Aggiungiamo anche la curva del rendimento effettivo. Se non vi fosse nessuna influenza del numero di Reynolds e dell'effetto scala queste due curve sarebbero uniche. In realtà abbiamo una dipendenza dal numero di Reynolds perchè sappiamo che non abbiamo differenze solo se il numero di Reynolds è molto elevato.

Questa influenza, dal punto di vista qualitativo, si traduce nel fatto che le curve non sono più una singola curva ma un fascio di curve. Per quanto riguarda la curva $\psi - \varphi$ abbiamo valori massimi al crescere di Re con una dispersione piuttosto limitata. Invece abbiamo una dispersione più ampia per quanto riguarda i valori del rendimento.

Si osserva che nelle curve di rendimento troviamo evidenziati tutti i limiti delle assunzioni semplificative che abbiamo posto nell'analisi del nostro problema.

Ci chiediamo se possiamo trovare degli strumenti che ci dicano di quanto possiamo scostarci se abbiamo valori di Re abbastanza bassi? Si esistono degli strumenti correttivi. Ricordiamo l'espressione del numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho_{01} \omega D^2}{\mu}$$

Osserviamo un diagramma

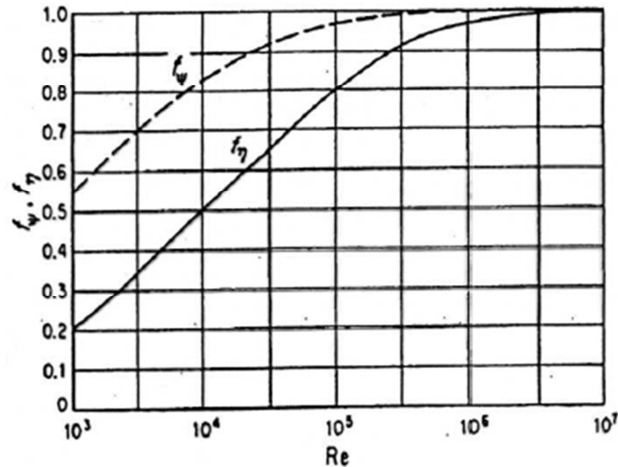
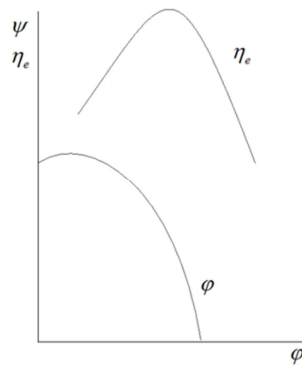


Figura 3.12: *Fattori universali di correzione delle prestazioni di famiglie di turbomacchine simili, in funzione del numero di Reynolds: $\text{Re} = \frac{\omega D^2}{\nu}$.*

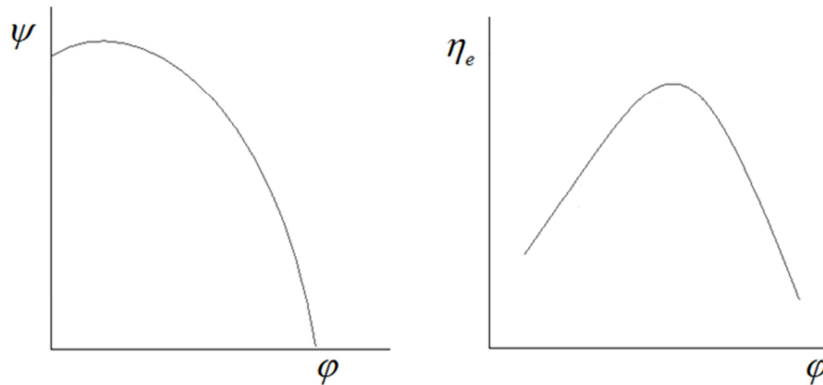
In questo diagramma vediamo i valori dei fattori universali di correzione delle prestazioni (hanno una validità abbastanza ampia) e sono relativi alla cifra di pressione e al rendimento effettivo. Questi coefficienti sono funzione di Re e per numeri di Reynolds elevati valgono entrambi 1 (non portano nessun tipo di correzione). Mano a mano che Re diminuisce il valore dei fattori di correzione diminuisce fino a quando Re è talmente basso che il fattore correttivo diventa parecchio pesante. In ogni caso, con riferimento anche al diagramma precedente, la correzione della curva relativa alla cifra di pressione è maggiore rispetto quella del rendimento.

Questi fattori si usano per fare la seguente operazione dal punto di vista grafico. Partendo dalla curva di riferimento (quella relativa a numeri di Reynolds sufficientemente alti da non avere influenza dallo stesso)



Applichiamo i fattori correttivi e quindi andiamo a ridisegnare le curve con un opportuna riduzione delle scale sia in ascisse che in ordinate in modo che, mantenendo la forma della curva, andiamo ad abbassarla.

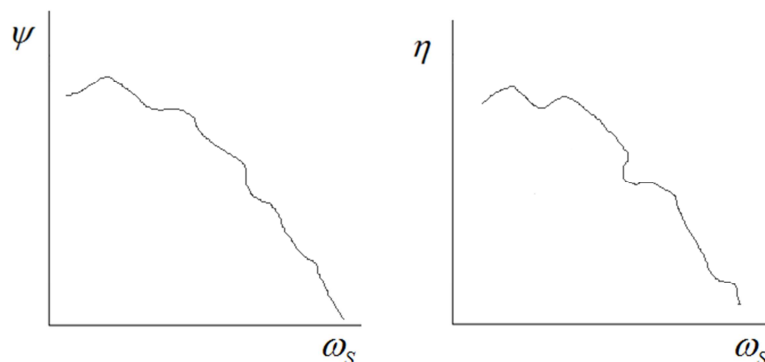
Il procedimento operativo è il seguente. Parto dalle curve con numero di Reynolds molto elevato



A questo punto introduciamo la definizione della velocità specifica

$$\omega_s = \varphi^{1/2} \psi^{-3/4}$$

Andiamo a considerare questa quantità non come il valore di k che otteniamo per la condizione di massimo rendimento ma proprio come funzione di $\psi - \varphi$ (una curva di ω_s) e tracciamo le curve $\psi - \omega_s$ e $\eta - \omega_s$ che saranno casuali



Queste quantità le possiamo chiamare

$$\psi = f(\omega_s) = \psi(\omega_s)$$

$$\eta = f(\omega_s) = \eta(\omega_s)$$

Utilizziamo allora i fattori di correzione che otteniamo dal diagramma

$$f_\psi = f(\text{Re})$$

$$f_\eta = f(\text{Re})$$

Quindi troviamo dei valori corretti

$$\psi_{\text{corretto}} = f_\psi \cdot \psi(\omega_s)$$

$$\eta_{\text{corretto}} = f_\eta \cdot \eta(\omega_s)$$

A questo punto possiamo procedere a ritroso. Trovato il valore corretto avrò

$$\omega_s = \varphi^{1/2} \psi^{-3/4} = \varphi_{\text{corretto}}^{1/2} \psi_{\text{corretto}}^{-3/4} = \text{costante}$$

Allora applicando la definizione di ω_s posso costruire le curve che mi daranno le curve di prestazioni corrette.

2bis)

Osserviamo subito una figura

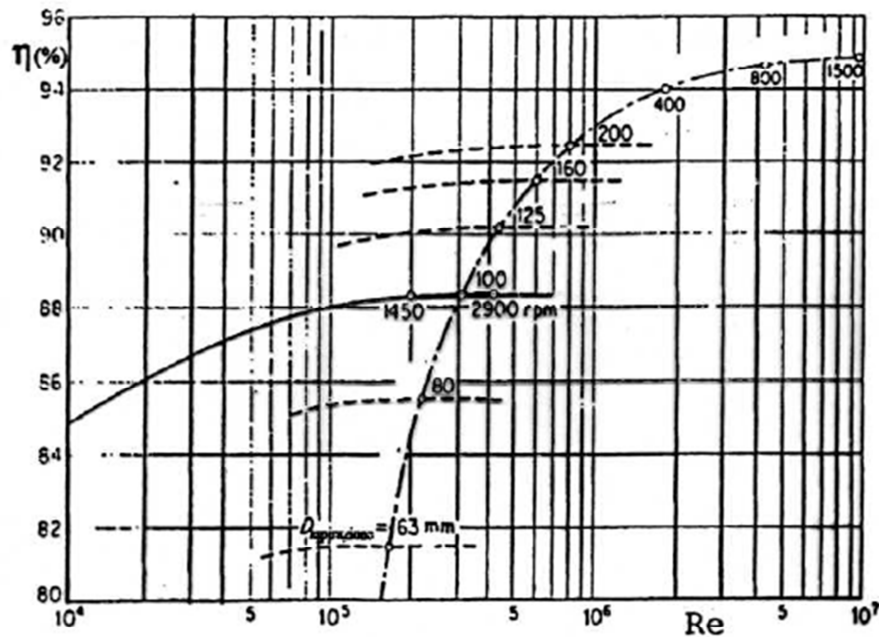


Figura 3.13: *Rendimento di una famiglia di pompe simili, al variare del numero di Reynolds, parametrato in funzione del diametro all'aspirazione.*

Se volessimo ricavare sperimentalmente curve $\psi - \varphi$ al variare del numero di Reynolds ci troveremo di fronte a grosse difficoltà perchè Re cambia con le caratteristiche del fluido, con le dimensioni della macchina e con le velocità.

Questo diagramma ci mostra che il rendimento di una famiglia di pompe simili al variare di Re , parametrato in funzione del diametro all'aspirazione.

Sul piano abbiamo una serie di curve che sono relative ad un determinato valore del diametro di aspirazione della curva ed è tracciata in modo più completo la curva relativa a 100mm. Assegnata una pompa di determinate dimensioni un modo per far variare Re è quello di far variare la velocità di rotazione della pompa. Per ogni valore del diametro, variando la velocità di rotazione, posso tracciare un certo range di valori di Re .

Inoltre osserviamo che man mano che Re aumenta, aumenta anche il rendimento. Poi per un certo valore della velocità di rotazione anche se continua ad aumentare il rendimento rimane costante. La curva tratto punto è il luogo dei punti in corrispondenza ai valori di Re oltre i quali le prestazioni diventano indipendenti da Re (Re critico). Questo aumenta all'aumentare delle dimensioni della macchina.

Quindi oltre all'influenza di Re abbiamo un'influenza dell'effetto scala. Esiste un effetto scala che non è separabile in maniera netta dall'effetto di Re .

A parità di bontà di progettazione, geometria, ecc la macchina grande ha rendimento più grande della macchina piccola. Questo si spiega osservando:

- a parità di tecnologia produttiva possiamo ritenere costante il valore della rugosità superficiale delle palettature della girante. È chiaro che in una macchina grande questa diventa un valore di rugosità relativa. Quindi le perdite di carico sono più forti in una macchina piccola che in una macchina grande
- i giochi. Tra parti fissa e mobile avremo dei giochi. I giochi non possono scendere al di sotto di un certo limite e si cercherà di far in modo che siano i più piccoli possibile. Posso considerare dei giochi relativamente grandi nella macchina piccola che saranno trascurabili nella macchina grande.

Per tener conto anche di questo si ricorre a metodi empirici. Una soluzione consiste nel considerare il seguente diagramma

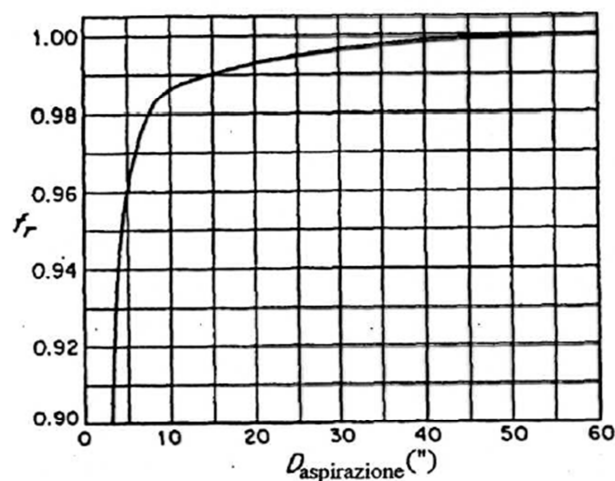


Figura 3.14: *Rendimento di una famiglia di pompe simili, al variare del numero di Reynolds, parametrato in funzione del diametro all'aspirazione.*

Vediamo il rendimento di una famiglia di pompe simili al variare del numero di Re parametrato in funzione del diametro all'aspirazione. Esiste un valore del diametro superato il quale non abbiamo più nessuna dipendenza dalle dimensioni. Al diminuire delle dimensioni possiamo applicare il fattore correttivo. A rigore questo diagramma è valido solo per la macchina sulla quale è stato fatto lo studio.

Praticamente possiamo dire che

$$\eta = \eta_s \cdot f_r(D)$$

dove η_s è il rendimento standard (relativo alla macchina grande). Il fattore $f_r(D)$ può essere ritenuto abbastanza generale.

Un altro approccio consiste nel considerare due valori diversi del rendimento

$$\frac{1-\eta_1}{1-\eta_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^\alpha$$

$\frac{D_2}{D_1}$ è il rapporto di scala della macchina; α è molto variabile.

3)

La cavitazione è un problema di funzionamento serio che può interessare tutte le macchine che operi su fluidi. Consiste nel fatto che in una zona della nostra macchina si crea localmente un punto di bassa pressione. Se questa pressione scende sotto il valore della tensione di vapore del liquido alla temperatura a cui si trova il fluido, questo evapora. Allora si formano delle bolle di vapore che vengono trascinate dal flusso in zone con pressione più alta e qui, con un processo molto rapido, implodono. L'implosione causa delle onde di pressione che vanno ad erodere le palettature, i condotti,...

Nel caso specifico delle turbomacchine la cavitazione si verifica dove abbiamo le sezioni minori (aspirazioni della pompa) o dove abbiamo delle velocità locali particolarmente elevate (pressione locale più bassa).

La cavitazione può essere affrontata definendo alcune quantità. L'approccio più utile si basa sulla definizione del NPSH (altezza totale netta all'aspirazione). Questa può essere definita in due modi diversi: o andando a fare delle misure in un punto della macchina oppure partendo a ritroso dal serbatoio.

$$(NPSH)_{POMPA} = \frac{P_A}{\rho g} + \frac{c_A^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g}$$

p_v è la tensione di vapore; con il pedice A indico che le grandezze sono misurate nella sezione di aspirazione della mia macchina (flangia di attacco) perchè sono sezioni sufficientemente distanti dalla girante da poter non risentire della periodicità del flusso che la girante impone alla corrente.

Posso definire

$$(NPHS)_{IMPIANTO} = \frac{p_B}{\rho g} - H_S - \Delta H_A - \frac{p_v}{\rho g}$$

La quantità è sempre la stessa. Cioè pressione totale del fluido somma della pressione statica più la pressione cinetica corretta con la tensione di vapore. p_B è la pressione manometrica; H_S differenza di quota tra il pelo libero del serbatoio e flangia di aspirazione; ΔH_A perdite di carico (attrito per attrito continuo, presenza di eventuali gomiti,...).

Fissata una certa condizione di funzionamento abbiamo che

$$(NPHS)_{IMPIANTO} = (NPHS)_{POMPA}$$

$(NPHS)_{POMPA}$ è il parametro che mi da il costruttore della pompa che la metterà sul banco di prova e porterà la pompa in cavitazione. In quelle condizioni andrà a misurare p_A e c_A .

L'installatore della pompa dovrà verificare che

$$(NPHS)_{IMPIANTO} > (NPHS)_{POMPA}$$

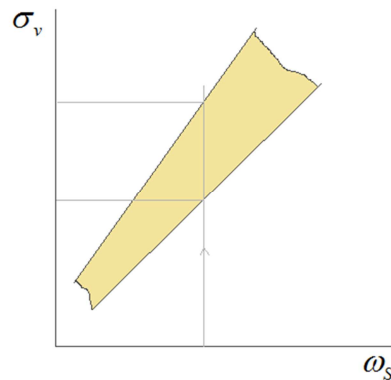
Questa disuguaglianza fisicamente non avrebbe senso perchè queste due equazioni sono uguali. Diventano una disuguaglianza nel momento in cui il termine di destra diventa il valore limite dato dal costruttore mentre il termine a sinistra è il valore operativo del mio impianto. In condizione di incipit di cavitazione i due valori sono uguali.

Un'altra grandezza citata nello studio della progettazione è la *cifra di Thoma* che è una cifra adimensionale che in condizioni di incipiente cavitazione è pari al rapporto

$$\sigma_v = \frac{NPHS}{H} = f(\omega_s)$$

dove H è la prevalenza della pompa. Questo rapporto può essere calcolata in qualsiasi punto di funzionamento però assume un valore significativo quando siamo in condizioni di inizio cavitazione. La cifra di Thoma è funzione della geometria della macchina. La cavitazione avviene perchè in un certo punto della macchina la velocità del flusso diventa elevata. Ma questa velocità dipende dalla geometria della macchina.

Possiamo trovare dei diagrammi



σ_v cresce con ω_s . Questo non ci sorprende perchè all'aumentare di ω_s cresce la portata ed in generale aumentano le velocità di flusso. Questo vuol dire rendere la macchina più soggetta alla cavitazione perchè è maggiore la depressione idrodinamica. Non abbiamo una linea ma una fascia quindi dato un certo valore di ω_s ho un certo livello di indeterminazione.

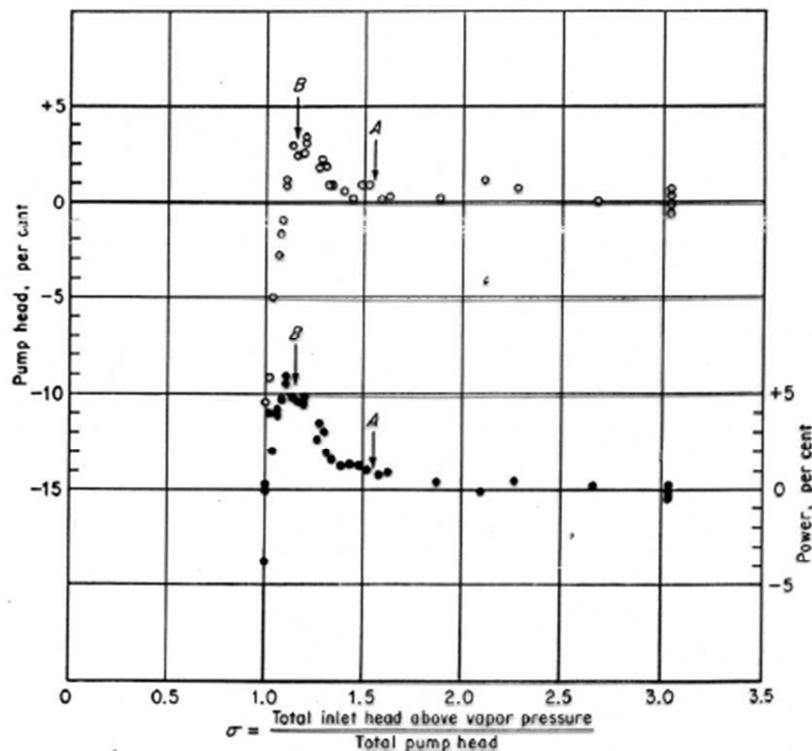


FIGURE 13. Cavitation test results of an axial-flow pump of specific speed $\Omega = 4.75$. Point *A* would be regarded as inception point, and it is interesting to note that a higher head is generated at point *B* in the cavitating region. However, a further inlet pressure reduction soon completely chokes the machine (after Wislicenus²⁴).

Questo diagramma ci mostrano i risultati di un test di cavitazione di una pompa assiale. In questo diagramma abbiamo in ascissa σ_v mentre in ordinate abbiamo la prevalenza della pompa.

Ad un certo punto inizia la cavitazione. L'avvio di questo fenomeno può essere rilevato o per via ottica (finestre trasparenti e strumenti di rilevazione ottica) o analizzando la frequenza del rumore.

Si verifica inizialmente un aumento delle prestazioni della macchina (si fanno delle eliche cavitanti) però dopo immediatamente tendono a crollare.

4)

Quando abbiamo a che fare con macchine che operano con fluidi comprimibili bisogna tener conto del numero di Mach

$$\psi = f(\varphi, Ma)$$

Il numero di Mach è

$$Ma = \frac{\omega D}{a_{01}}$$

Possiamo definire anche il *numero di Mach periferico*

$$Mu = \frac{\omega \frac{D}{2}}{a}$$

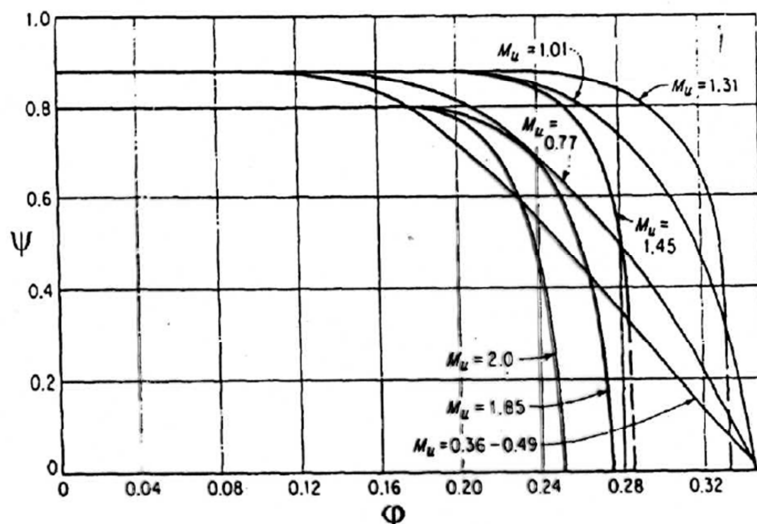


Figura 3.17: Curve adimensionali di funzionamento di una famiglia di compressori, per un fluido assegnato, a diversi numeri di Mach periferici.

Vediamo che abbiamo un groviglio di curve. Se operiamo con Ma basso (tali da risentire dell'effetto della comprimibilità ma non tali da introdurre delle variazioni di struttura delle linee di flusso) cioè

$$0,36 < Mu < 0,49$$

Abbiamo un'unica curva di funzionamento. Quando il numero di Mach aumenta le curve tendono a diventare verticali in corrispondenza di valori di φ (quindi di portata) diversi.

Abbiamo un fenomeno noto come *ingolfamento del compressore*. Intendiamo il raggiungimento di quella condizione di funzionamento in cui non è più possibile variare la portata variando il rapporto delle pressioni attorno alla macchina. Questo perchè in qualche punto si raggiungono le condizioni di flusso sonico e quindi, ricordando lo studio dell'ugello convergente-divergente, abbiamo un blocco sonico delle portata.

Il fatto che il blocco di portata avvenga per valori diversi della portata o per gli stessi valori dipende da dove si verifica l'ingolfamento (o nell'organo statorico o nell'organo rotorico). Se consideriamo un compressore centrifugo monostadio fintanto che l'ingolfamento avviene nel diffusore all'aumentare del numero di Mach abbiamo un'aumento del valore di portata di ingolfamento. Se l'ingolfamento avviene nella girante allora la portata di ingolfamento rimane bloccata ad un valore.

Questo tipo di curve non sono molto pratiche allora più spesso si vanno a definire altre cifre che perdono un pò di generalità (valgono solo per quella macchina provata con quel fluido) ma mantengono la generalità dal punto di vista della condizione di prova.

Partiamo dalle definizioni

$$M_{01} = \frac{\omega D}{a_{01}} = \frac{\omega D}{\sqrt{kRT_{01}}}$$

$$\varphi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}\omega D^3} = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}M_{01}a_{01}D^2} = \frac{\dot{m}RT_{01}}{\rho_{01}M_{01}\sqrt{kRT_{01}}D^2} = \frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{\rho_{01}M_{01}\sqrt{k}D^2}$$

$$\psi = \frac{L_i}{\omega^2 D^2} = \frac{\Delta h_{0s}}{\omega^2 D^2} = \frac{\frac{k}{k-1}RT_{01}\left[\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]}{M_{01}^2 kRT_{01}} = \frac{1}{M_{01}^2}\left[\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]$$

Δh_{0s} è il salto entalpico totale in condizioni di isoentropicità. Supponiamo di operare con gas perfetti.

Immaginiamo di operare su una macchina che abbia

$$D = \text{cost}$$

Quindi abbandoniamo l'idea di operare su una famiglia di macchine geometricamente simili (ragiono solo sulla mia macchina). Inoltre per questa macchina suppongo di operare sempre con lo stesso fluido

$$k, R = \text{cost}$$

Inoltre posso considerare

$$M_{01} = \text{cost}$$

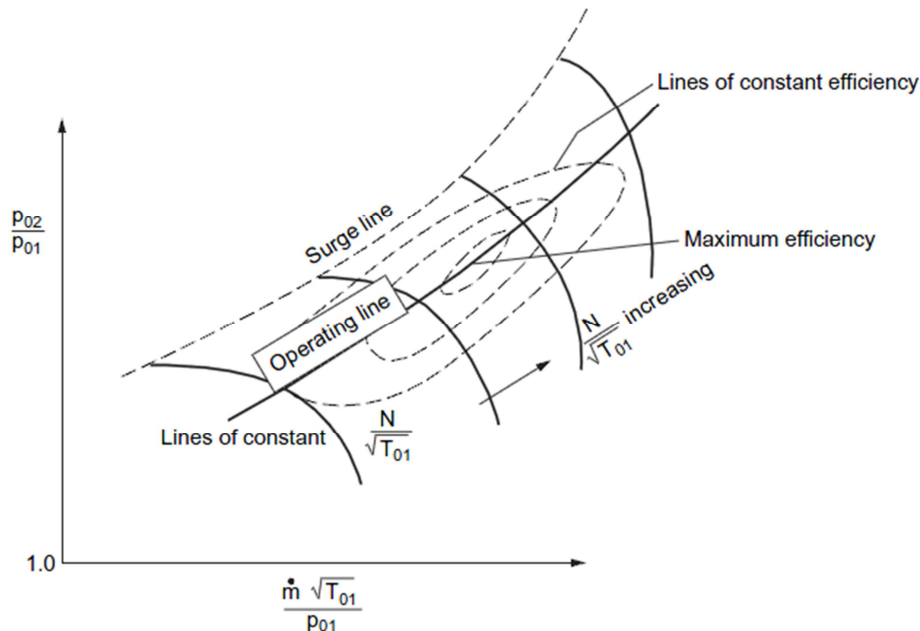
Se voglio mantenere l'adimensionalità

$$\begin{aligned} M_{01} &\rightarrow \frac{\omega D}{\sqrt{RT_{01}}} \\ \varphi &\rightarrow \frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{\rho_{01} D^2} \\ \psi &\rightarrow \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right) \end{aligned}$$

Queste hanno perso di generalità per quanto riguarda il fluido. Posso fare ancora un passo e rinunciare all'adimensionalità

$$\begin{aligned} M_{01} &\rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{T_{01}}} \\ \varphi &\rightarrow \frac{\dot{m} \sqrt{T_{01}}}{\rho_{01}} \\ \psi &\rightarrow \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right) \end{aligned}$$

Posso tracciare le curve di prestazione in funzione di queste grandezze. Consideriamo il caso di un compressore e rappresentiamo dei diagrammi in cui in ordinata abbiamo il rapporto di compressione ed in ascissa il coefficiente di portata



Il campo di funzionamento di un compressore dinamico è limitato sia alle alte portate che alle basse portate da fenomeni ben precisi. Alle alte portate abbiamo il fenomeno dell'*ingolfamento*: la curva diventa verticale e la portata diventa indipendente dalla pressione.

Alle basse portate, diminuendo la portata aumenta il rapporto di compressione. Arriviamo ad una condizione di funzionamento in corrispondenza della quale si verificherà lo *stallo*. Lo stallo si verifica secondo le modalità dello *stallo rotante*. Consideriamo un profilo isolato e variamo l'angolo d'incidenza della corrente sul profilo, oltre certi valori dell'angolo avremo il distacco di vena dal dorso del profilo stesso. Quindi viene a mancare quell'effetto di differenza di pressione tra dorso e ventre che dà la portanza. Questo si verifica anche nei profili in schiera e nei profili in stella. Però non accadrà mai che tutti i profili vadano a stallare contemporaneamente (questo rendere difficile anche mantenere valida l'equazione di continuità del fluido) perchè lo stallo del profilo avviene in maniera improvvisa per piccolissime variazioni dell'angolo di incidenza. Fino ad un certo valore la portanza è molto alta poi basta una piccola variazione che improvvisamente crolla. Allora sono sufficienti delle disuniformità del flusso (non sarà mai completamente assial-simmetrico) e delle disuniformità geometriche delle pale (non saranno mai perfettamente dritte) a far sì che si verifichi lo stallo. Questo stallo si verifica in corrispondenza di un profilo ma

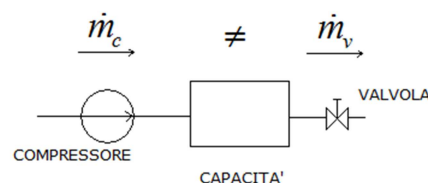
non rimane perfettamente ancorato ma si sposta da un profilo all'altro perchè questa condizione destabilizza il flusso dei profili vicini. Questa cella di stallo si sposta da un profilo all'altro dando luogo al fenomeno dello stallo rotante. Questa cella si sposta a velocità elevata (ad una frazione della velocità angolare del rotore che è molto elevata). Inoltre se c'è una stella questa si muoverà con una velocità angolare che sarà la metà di quella del rotore. Se si formano due celle di stallo si osserva sperimentalmente che queste si posizionano a 180° .

Questo stallo comporta una riduzione delle prestazioni. Una riduzione e non un annullamento. Tuttavia è da evitare perchè può indurre sulle palettature fenomeni vibratorii che possono portare al danneggiamento della macchina.

Lo stallo è una caratteristica del compressore cioè dipende da come è fatto il compressore.

Oltre lo stallo si può verificare un altro fenomeno di instabilità chiamato *pompaggio* per cui tracciamo una seconda curva limite (surge line). Il pompaggio è un'altra condizione di funzionamento instabile che dipende non solo dalle caratteristiche del compressore ma dall'iterazione tra caratteristiche del compressore e caratteristiche dell'impianto (in particolare i volumi). È un fenomeno che comporta un'oscillazione di pressione e un ciclo di variazione di portata che avviene a bassa frequenza (a differenza dello stallo che avviene ad alta frequenza) e che coinvolge tutto l'impianto e che ha un'intensità tale da comportare conseguenze distruttive dell'impianto.

Per capire perchè si verifica questo fenomeno consideriamo il seguente schema



Questo è un impianto di pompaggio che viene schematizzato con un compressore, una capacità (elemento che rappresenta il volume dell'impianto) e una valvola (elemento di regolazione che potrebbe essere la turbina nel caso del turbo-compressore). Se abbiamo un fluido comprimibile la portata che fluisce nel compressore è diversa da quella che fluisce attraverso la valvola perchè possiamo avere un accumulo di massa nel serbatoio. Quando nel nostro sistema siamo vicini alla condizione di stallo accade che queste portate iniziano a differire tra loro. Questo avviene alle basse portate cioè quando la valvola è molto chiusa (il compressore fornisce un pò di più). Abbiamo un accumulo di

massa e quindi un aumento di pressione nel serbatoio. Questo processo non può procedere all'infinito perchè la pressione diventa insostenibile per il compressore. Arriviamo ad una situazione di crisi in cui il serbatoio improvvisamente si svuota (riduce la massa) continuando a far uscire massa dalla valvola ma anche facendo arrivare massa in controcorrente nel compressore (la portata netta nel compressore diventa negativa). Con questo svuotamento ripristina le condizioni iniziali e quindi abbiamo un ciclo di pompaggio.

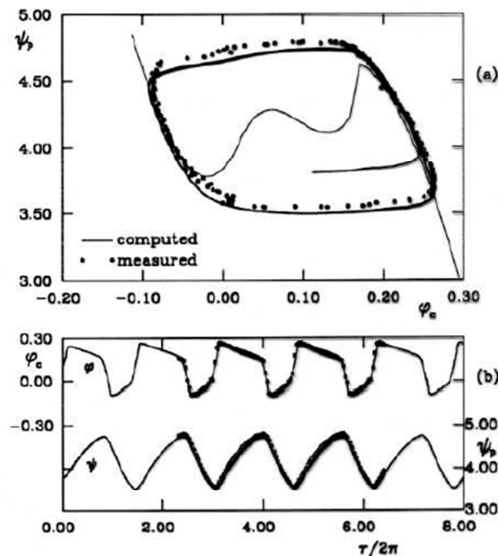
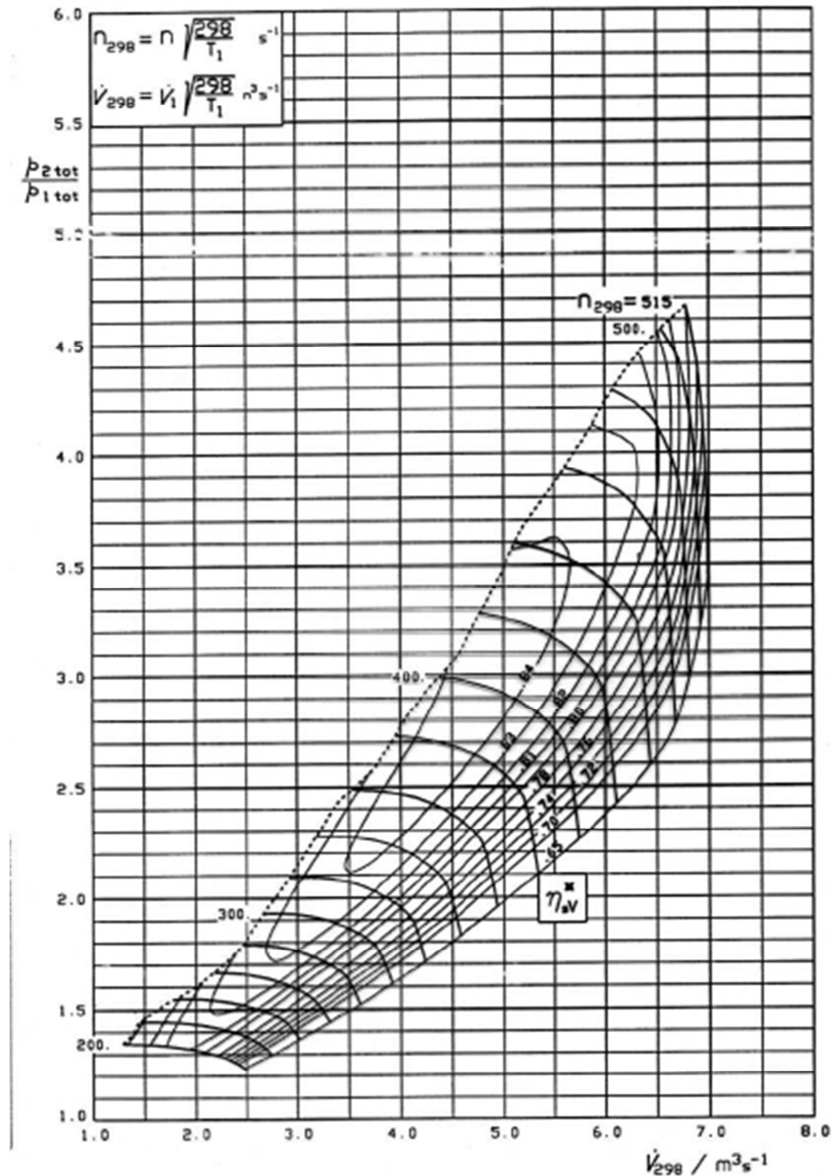


Fig. 6 - Transient compression system behaviour: 3000 rpm, $\phi_{ss} = 0.117$.

Questa è una curva caratteristica per una certa velocità di rotazione. La valvola viene chiusa in maniera tale che il punto di funzionamento sia in centro. abbiamo una fase in cui aumenta la pressione nell'impianto poi con un processo molto rapido si passa da una portata positiva ad una portata negativa.

Per completare la descrizioni delle curve vediamo dove troveremo le condizioni migliori di funzionamento. I massimi rendimenti saranno delle linee chiuse (elissi). L'area più piccola è quella corrispondente al massimo rendimento e si troverà vicina al limite di stallo.

Vediamo una curva di compressore



Queste sono le curve a numero di Mach costante. Sono rappresentati i soli tratti delle curve che possiamo ritenere utili. A destra abbiamo il limite di stallo oltre il quale le curve tendono a diventare verticali. Possiamo osservare che a bassi numeri di Mach le curve tendono a diventare verticali. Però quando arriviamo a velocità più alte tutte le curve tendono ad arrivare allo stesso valore limite di portata. Tutte queste sono condizioni di ingolfamento. Solo a sinistra (dove le curve sono orizzontali) non abbiamo ingolfamento.

A velocità di rotazione più basse, dove la portata di ingolfamento aumenta con i giri, l'ingolfamento avviene nel diffusore (elemento statorico a valle della girante). Dove invece tutte le curve tendono a bloccarsi sullo stesso valore di portata l'ingolfamento si trova nella girante.

Per capire il perchè di questa differenza bisogna ricordare che assegnati i valori di entalpia, pressione, ecc esiste un rapporto di pressioni in corrispondenza del quale nella sezione di gola si raggiunge la velocità del suono. Poi possiamo variare la velocità a valle ma la portata rimane bloccata.

Detto questo se lo stallo si verifica nel diffusore, all'aumentare della velocità di rotazione, aumentano le quantità totali del fluido a monte del diffusore. Aumenta la portata di ingolfamento del diffusore.

Se invece l'ingolfamento avviene nella girante (velocità diventa sonica all'apice della pala in ingresso), in questo caso le condizioni totali a monte del sistema non cambiano e quindi sono indipendenti dalla velocità di rotazione (la portata di ingolfamento rimane inalterata).

Condizioni ambientali standard

Un altro approccio per definire le curve consiste nel definire delle condizioni ambientali standard cioè stabilire un certo valore di pressione e di temperatura.

Quando andiamo a provare la macchina avremo valori di pressione e temperatura diversi e allora possiamo pensare di scrivere i valori corretti. Indichiamo con i pedici

- "s" : grandezze relative alle condizioni standard;
- "c" : valori corretti cioè riportati alle condizioni standard
- " " : valori da correggere (valori rilevati nel corso della prova)

a) Rapporto di compressione

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02c}}{p_{01s}} \quad \rightarrow \quad p_{02c} = p_{02} \frac{p_{01s}}{p_{01}}$$

Cioè il rapporto che mi definisce la prestazione è il rapporto di compressione. Se ho nella condizione di prova una pressione p_{01} diversa da quella standard posso definire il valore corretto della pressione di mandata.

b) Parametro di portata

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}} = \frac{\dot{m}_c\sqrt{T_{01s}}}{P_{01s}} \rightarrow \dot{m}_c = \dot{m}\sqrt{\frac{T_{01}}{T_{01s}}}\left(\frac{P_{01s}}{P_{01}}\right)$$

c) Parametro di velocità

$$\frac{n}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{n_c}{\sqrt{T_{01s}}} \rightarrow n_c = n\sqrt{\frac{T_{01s}}{T_{01}}}$$

Possiamo allora definire la *pressione "ridotta"*

$$\delta = \frac{P_{01}}{P_{01s}}$$

e la *temperatura "ridotta"*

$$\theta = \frac{T_{01}}{T_{01s}}$$

Quindi possiamo scrivere

$$P_{02c} = \frac{P_{02}}{\delta}$$

$$\dot{m}_c = \dot{m}\frac{\sqrt{\theta}}{\delta}$$

$$n_c = \frac{n}{\sqrt{\theta}}$$

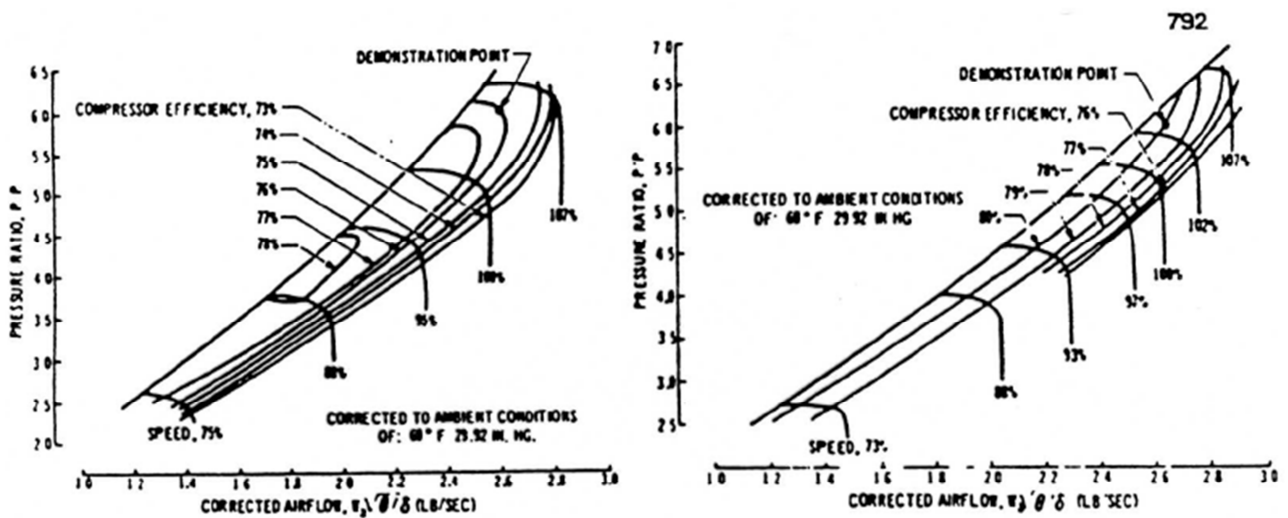


Figure 5.50. Sample Compressor Maps Showing $\partial pr / \partial m = 0$ at Surge

Possiamo trovare anche un'altra serie di definizioni. Abbiamo la *dimensione standard* D_s e una *costante dei gas standard* R_s (non serve tanto per consentire di confrontare macchine operanti con fluidi diversi ma può ritornare utile nel caso in cui la variazione di umidità dell'aria è importante ai fini delle prestazioni).

Diametro ridotto

$$\frac{D}{D_s}$$

Pressione ridotta

$$\delta = \frac{P_{01}}{P_{01s}}$$

Temperatura ridotta

$$\theta = \frac{RT_{01}}{R_s T_{01s}}$$

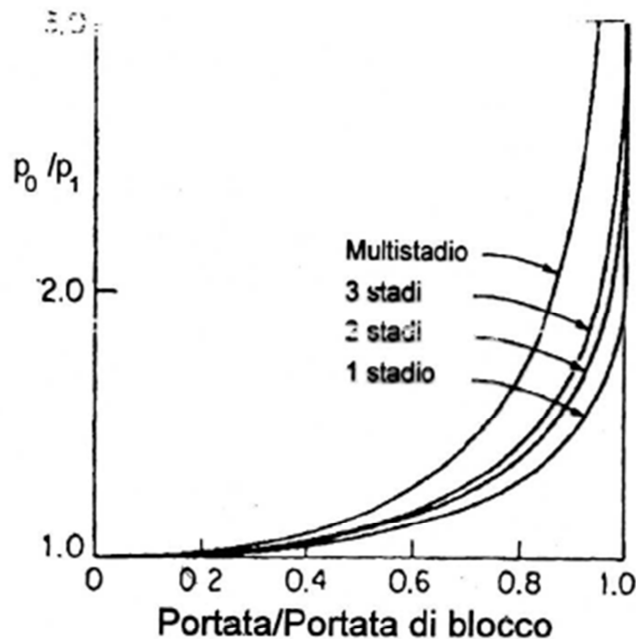
Portata corretta

$$\dot{m}_c = \dot{m} \frac{\sqrt{\theta}}{\delta \left(\frac{D}{D_s} \right)^2}$$

Numero di giri corretto

$$n_c = n \frac{D}{D_s \sqrt{\theta}}$$

Curve caratteristiche turbine termiche



18: Esempio di curve caratteristiche adimensionali per turbine

In ordinate abbiamo il rapporto di espansione quindi con p_0 si intende la pressione a monte della turbina e p_1 la pressione a valle. In ascissa abbiamo la portata adimensionalizzata dividendo per la portata di blocco cioè la portata in condizioni di ingolfamento (quindi il diagramma deve essere compreso tra 0 e 1). Le curve sono tracciate distinguendo in turbina monostadio, bistadio,...

Possiamo osservare che il comportamento è abbastanza diverso a seconda del numero di stadi perchè la portata di blocco viene raggiunta nel caso del monostadio per rapporti di espansione bassi poi aumentando il numero di stadi questo rapporto aumenta. Inoltre non è indicata l'influenza del numero di Mach. L'influenza di Ma è minima e le curve che ne derivano sono piuttosto vicine. Questo si spiega con il fatto che la turbina è costituita da un ugello e dalla girante. L'ugello molto comunemente opererà proprio in condizioni di ingolfamento. Allora è molto più comune il caso di ingolfamento nell'ugello. La portata che fluisce nell'ugello dipenderà dalle condizioni a monte e le prestazioni saranno scarsamente influenzate dalla velocità della girante.

Se abbiamo una turbina multistadio il salto di pressione globalmente disponibile viene suddiviso nei vari stadi. Allora il salto di pressione che determina l'ingolfamento nel singolo stadio sarà piccolo ma quello relativo all'intera macchina aumenterà all'aumentare del numero di stadi.

Queste curve caratteristiche hanno una forma che è abbastanza simile per tutte le macchine che è stata proposta una loro rappresentazione come un ramo di ellisse. Per la loro rappresentazione si può ricorrere alla *Legge dell'ellisse (Ellisse di Scodola)*. Possiamo descrivere l'andamento della curva con un'equazione

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 D^2} = B \sqrt{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2}$$

Per definire la curva bisogna definire il valore della costante B che definisce completamente la geometria della macchina.

La legge di Scodola si applica molto bene per le macchine che hanno un numero elevato di stadi perchè raggiungiamo le condizioni di ingolfamento quando la pressione $p_1 \rightarrow 0$. Se abbiamo una macchina monostadio si propone di sostituire nella precedente espressione al posto di p_1 la differenza $p_1 - p_{1c}$.

p_{1c} è la p_1 critica cioè quel valore di pressione a valle in corrispondenza al quale si raggiunge l'ingolfamento.

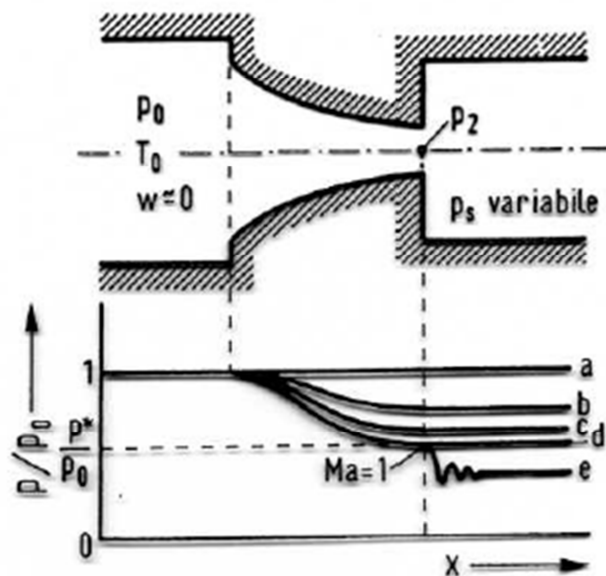


Fig. 14.10. Ugello convergente nel quale un gas si espande isoentropicamente in diverse condizioni operative.

Se considero la curva a) vuol dire che la pressione è costante. Incominciamo ad abbassare la pressione a valle p_s . Osservando le curve b) e c) abbiamo una graduale diminuzione della pressione a cui corrisponde un aumento di velocità del fluido. Se abbassiamo ulteriormente la pressione (caso d)) arriviamo in un

punto in cui nella sezione di uscita abbiamo la velocità del suono ($Ma=1$) e il rapporto delle pressione assume il valore critico p^*/p_0 . Queste sono le condizioni di funzionamento nominali. Se continuiamo a diminuire la pressione a valle, data la sua geometria, l'ugello non riesce a seguire una linea di evoluzione diversa da quella precedente perchè la portata rimane bloccata. Allora abbiamo una differenza tra valore di pressione all'uscita dell'ugello e il valore della pressione allo scarico. Il sistema risponde con delle onde di pressione (onde d'urto).

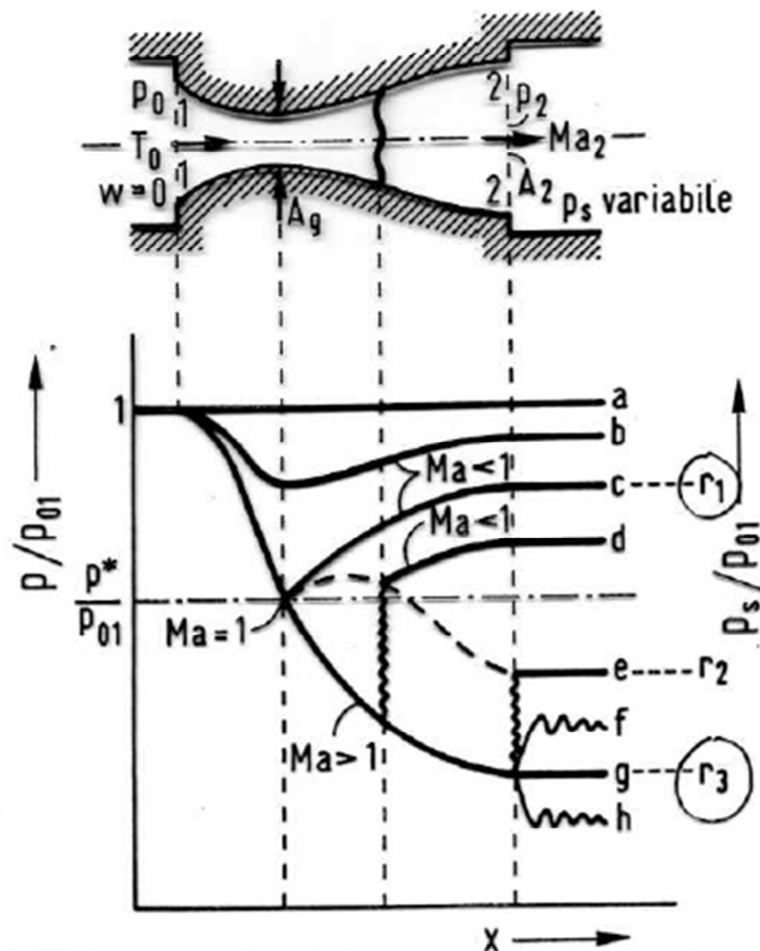


Fig. 14.13. Ugello convergente-divergente nel quale un gas si espande isoentropicamente (con eventuale formazione di onde d'urto normali) in diverse condizioni operative.

Per realizzare un flusso supersonico devo dimensionare un ugello convergente-divergente. a) la pressione è uguale ovunque e quindi non succede nulla. La situazione di funzionamento nominale è quella indicata con la g). Nel tratto

convergente abbiamo una diminuzione di pressione con aumento di velocità. Raggiungiamo il valore $Ma=1$ (condizioni soniche nella sezione di gola) e poi nel divergente la pressione continua a diminuire e la velocità del flusso continua ad aumentare ($Ma>1$ flusso supersonico) ma pressione d'uscita è uguale a quella dell'ambiente di scarico.

Il comportamento tipo tubo di Venturi si mantiene fino a quando la pressione non raggiunge il valore critico. Vediamo il caso c) che è ancora un tubo di Venturi però nella sezione di gola raggiungo la velocità del suono.

Nelle altre situazioni intermedie accade che per un certo tratto l'espansione nell'ugello procede come se fosse il caso g) (cioè è come se l'ugello non si accorge che la pressione a valle non è quella giusta) però ad un certo punto abbiamo la formazione di onde interne. L'onda d'urto si sposta sempre più verso la sezione di uscita.

Manca lezione4

1.2 RICHIAMI E COMPLEMENTI DI TERMODINAMICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Rotore adiabatico

Se consideriamo un rotore di una turbomacchina con il flusso adiabatico (ipotesi che faremo sempre nelle turbomacchine perchè, all'interno della turbomacchina, non sussistono generali condizioni di flusso che consentano degli scambi termici di un'intensità apprezzabile) possiamo scrivere che il *lavoro tecnico* tra la sezione d'ingresso e di uscita è uguale alla differenza tra l'entalpie totali:

$$L'_{12} = h_{t1} - h_{t2}$$

Questo deriva dal I° principio della termodinamica. Ricordiamo che

$$h_t = h + \frac{c^2}{2} + gz$$

h è l'entalpia statica.

Lo stesso lavoro tecnico può essere espresso anche in funzione dei triangoli di velocità come espressioni del lavoro euleriano:

$$L'_{12} = \begin{cases} u_1 c_{u1} - u_2 c_{u2} \\ \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \end{cases}$$

w indica la velocità relativa. Questa espressione è molto significativa perchè ci fa vedere che una macchina radiale, a parità di valori di velocità, svilupperà più lavoro di una macchina assiale perchè in una macchina radiale ci sarà il termine delle velocità u che in una macchina assiale non c'è. Inoltre possiamo osservare che una macchina operatrice dovrà essere centrifuga mentre una macchina motrice dovrà essere centripeta perchè il termine delle u dia contributo al lavoro. Convenzionalmente vogliamo che il lavoro sia sempre positivo per cui scrivendo 1-2 vuol dire che l'energia in 1 è maggiore di quella in 2 per cui questa macchina è motrice. Per avere un contributo positivo deve essere $u_1 > u_2$ (macchina centripeta).

Sempre da questa espressione possiamo dedurre l'espressione del *grado di reazione* che rappresenta quella quota parte di lavoro statico che viene elaborato nella girante. Il lavoro viene fatto tutto nella girante però da questa espressione possiamo distinguere la quota parte di lavoro fatto sulla variazione di energia cinetica

$$\frac{c_1^2 - c_2^2}{2}$$

dalla quota parte statica

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}$$

Rotalpia

Possiamo scrivere che

$$u_1 c_{u1} - u_2 c_{u2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 - h_2 - \frac{c_2^2}{2} - gz_2$$

Raccogliendo i termini con i pedici uguali possiamo scrivere che

$$h + \frac{c^2}{2} + gz - uc_u = \text{cost} = I$$

I è la *rotalpia* o *entalpia totale del moto relativo*. Analogamente possiamo scrivere l'uguaglianza della seconda espressione

$$\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 - h_2 - \frac{c_2^2}{2} - gz_2$$

$$h + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} + gz = \text{cost} = I$$

L'introduzione di questa grandezza ci permette di scrivere un'equazione di conservazione. In un *rotore adiabatico* la conservazione dell'energia può essere espressa da

$$I = \text{cost}$$

Mentre in uno *statore adiabatico* è nullo lo scambio di calore, è nullo lo scambio di lavoro e quindi abbiamo la conservazione dell'entalpia totale

$$h_t = \text{cost}$$

Nello studiare il comportamento di una macchina possiamo utilizzare dei grafici con tutte le grandezze in gioco

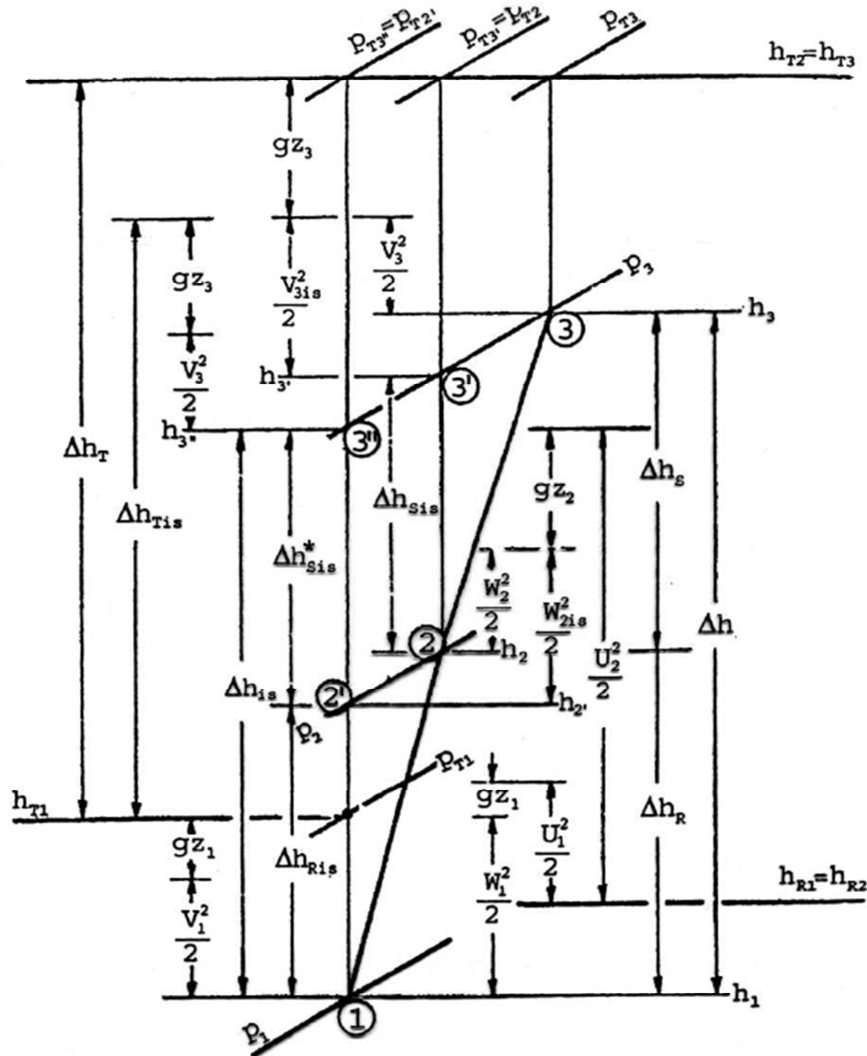
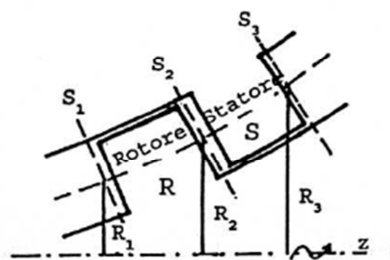


Figura 4.11: Trasformazioni nel piano $h-s$ per uno stado di macchina operatrice



b) operatrice

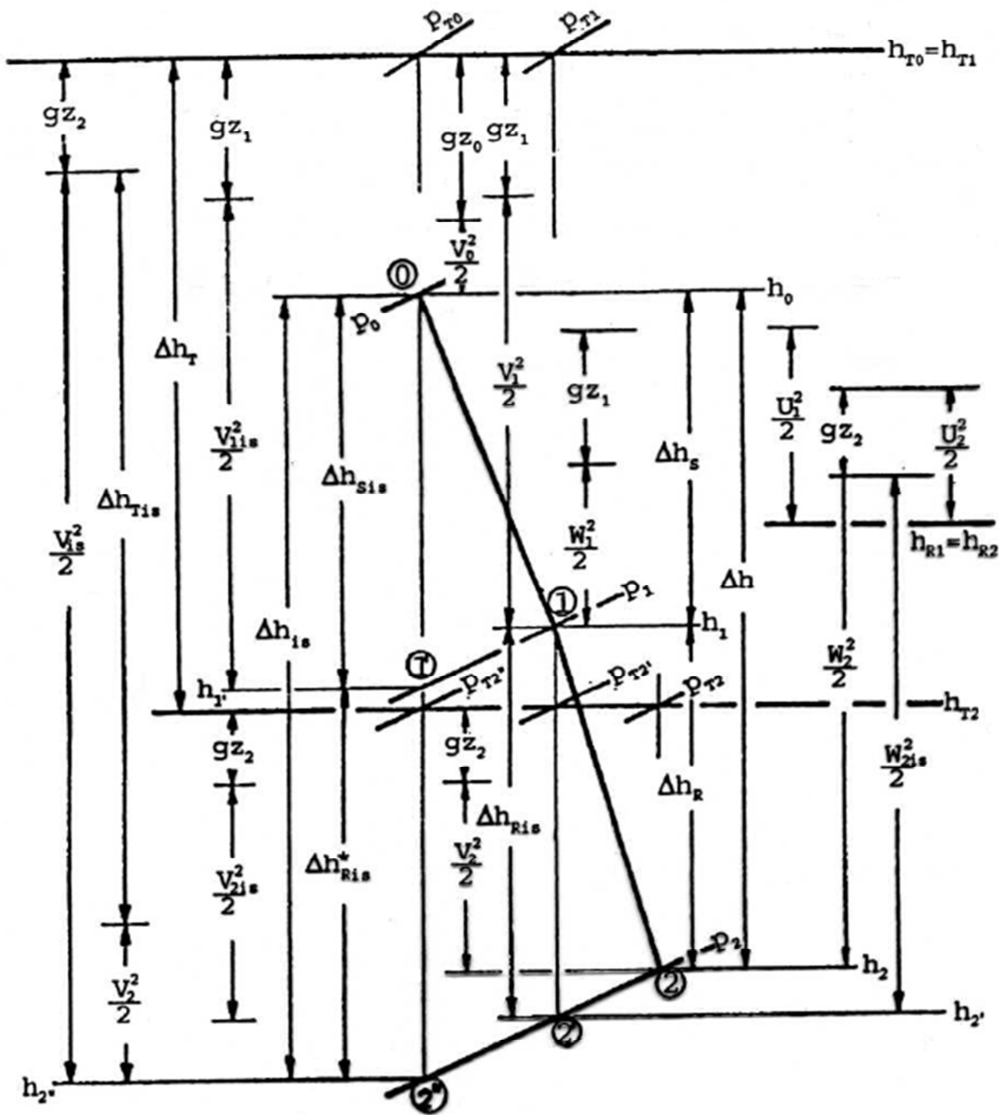
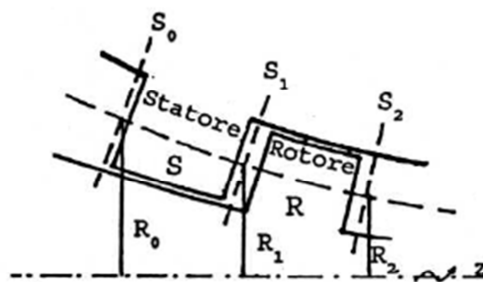


Figura 4.10: Trasformazioni nel piano h-s per uno stadio di turbina



e) motrice

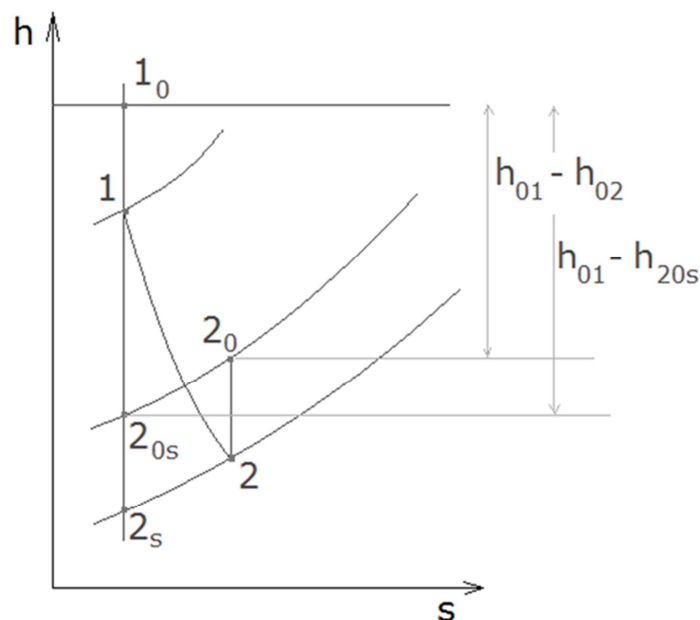
Rendimenti

Sulla base di queste rappresentazioni possiamo definire dei rendimenti:

- Rendimento effettivo o globale o ... η_e ;
- (legato alla qualità della turbomacchina) Rendimento idraulico o adiabatico o isoentropico o ... $\eta_{id(o is)}$; (rendimento idraulico o isoentropico che differisce se abbiamo a che fare con macchine termiche o idrauliche)
- Rendimento meccanico $\eta_m = \frac{\eta_e}{\eta_{id(o is)}}$

Turbine termiche

Facciamo riferimento al diagramma h-s



Rappresentiamo sul piano h-s il processo globale tra ingresso ed uscita della turbomacchina. Avremo un punto iniziale 1 a cui corrisponde un punto rappresentante la sua entalpia di ristagno 1_0 (che possiamo confondere con l'entalpia totale). Avremo un punto finale 2 della nostra trasformazione in corrispondenza del quale avremo un'energia cinetica che ci consente di definire il punto 2_0 . Se il processo fosse isoentropico il punto finale della trasformazione sarebbe 2_s così come, sulla stessa isoentropica troveremo il punto 2_{0s} .

Ricordiamo che la trasformazione 1-2 non rappresenta l'espansione reale della nostra turbina ma rappresenta un'approssimazione politropica, quindi reversibile

e quindi tracciabile sul piano termodinamico che ha in comune con la trasformazione reale solo i punti iniziale e finale.

Con riferimento a questo processo possiamo definire il rendimento isoentropico considerando due diversi casi:

- 1) supponiamo che l'energia cinetica residua allo scarico non vada perduta cioè possiamo immaginare che questa energia cinetica è l'energia che poi entrerà allo stadio successivo e quindi è una situazione che ritroviamo negli stadi intermedi delle turbomacchine. Definiamo il *rendimento isoentropico total to total*

$$\eta_{is,tt} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{20s}}$$

Confronto il salto entalpico totale effettivo con il salto entalpico di riferimento (ritenendo come condizione finale di riferimento quella corrispondente alla pressione totale e quindi al punto 2₀).

- 2) Supponiamo che l'energia cinetica residua allo scarico vada perduta possiamo definire il *rendimento isoentropico total to static* nel quale confrontiamo sempre il salto entalpico effettivamente elaborato con il salto di riferimento relativo alla pressione statica

$$\eta_{is,ts} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{2s}}$$

Attenzione che per qualsiasi turbomacchina saranno definibili entrambe le quantità ma la differenza è che una può essere più interessante in un caso piuttosto che nell'altro.

Il rendimento $\eta_{is,ts}$ è quello che, parlando delle turbine a vapore, era stato definito come rendimento "della palettatura".

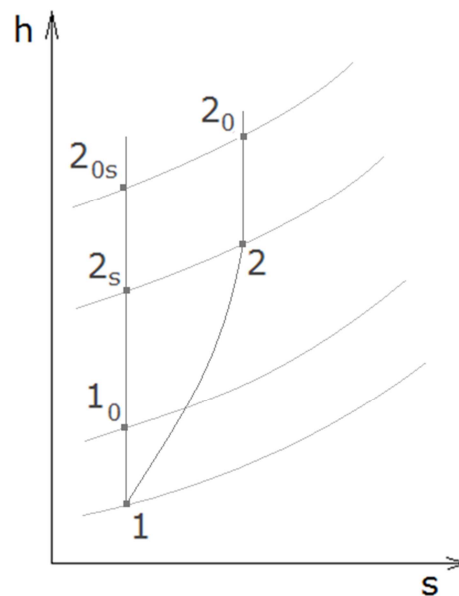
Turbine idrauliche

Nel caso delle turbine idrauliche non definiamo più il rendimento isoentropico ma il *rendimento idraulico*

$$\eta_{id} = \frac{gH_{id}}{gH_t}$$

H_{id} è il salto idraulico effettivo che viene elaborato; H_t è il salto idraulico teorico.

Compressori



Abbiamo una compressione adiabatica. L'energia cinetica in ingresso mi consente di definire il punto 1₀ mentre l'energia cinetica in uscita mi consente di definire il punto 2₀. Di solito quello che interessa maggiormente è il *rendimento isoentropico total to total*

$$\eta_{is,t} = \frac{h_{20s} - h_{10}}{h_2 - h_{10}}$$

Pompe

Possiamo definire un *rendimento idraulico*

$$\eta_{id} = \frac{gH_t}{gH_{id}}$$

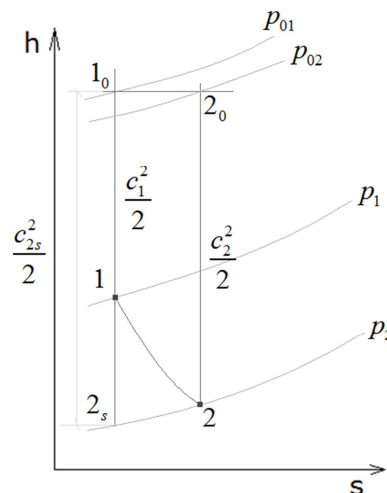
gH_{id} è l'energia scambiata all'interno della macchina; H_t è la prevalenza effettivamente sviluppata dalla pompa.

I rendimenti appena definiti si applicano alla macchina nel suo complesso ad un componente della macchina in cui ho uno scambio di lavoro e quindi scambio con variazione di entalpia. È utile però definire dei rendimenti (meglio chiamarli *efficienze* visto che non abbiamo scambio di energia ma solo trasformazione di energia) che vengono applicati agli elementi statorici. Distinguiamo due casi:

- 1) Nell'elemento abbiamo un incremento di velocità a spese di una riduzione di pressione. Questi saranno gli *ugelli*.
- 2) Nell'elemento l'energia cinetica diminuisce ed aumenta la pressione. Questi saranno i *diffusori*.

Ugello

In questi elementi statorici il fluido viene accelerato.



Passiamo da uno stato iniziale 1 in cui abbiamo una pressione p_1 , una velocità c_1 e quindi una velocità cinetica $\frac{c_1^2}{2}$ ad uno stato finale 2 con contenuto entropico più elevato, con una pressione inferiore a quella di partenza a fronte di un'energia cinetica in uscita maggiore. Una proprietà di questo elemento è che l'entalpia totale si conserva per il primo principio della termodinamica.

Possiamo definire un'energia cinetica di riferimento $\frac{c_{2s}^2}{2}$ che corrisponde all'intero salto entalpico tra il punto 1₀ e 2_s. Questa è una velocità ideale e corrisponde alla velocità che avremmo se facessi espandere il fluido dallo stato 1₀ allo stato 2_s in maniera isoentropica.

Ci sono diverse possibilità per definire il rendimento isoentropico di questo elemento. Possiamo definirlo come la variazione di energia statica avvenuta effettivamente nel nostro sistema su lo stesso salto che avremmo avuto con un processo isoentropico con la stessa pressione finale

$$\eta_{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} = \frac{\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2}}{\frac{c_{2s}^2}{2} - \frac{c_1^2}{2}} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_{2s}^2 - c_1^2}$$

Facciamo l'ipotesi che il fluido che subisce questo processo sia un fluido incomprimibile cioè supponiamo che ci sia un processo in cui i fenomeni di comprimibilità siano trascurabili cioè $Ma < 0,3$. Viene introdotta questa ipotesi perchè così sarà semplice tradurre questa espressione in un'espressione in funzione delle pressioni. Allora possiamo scrivere il rapporto tra pressione e velocità

$$\begin{aligned} p_{01} &= p_1 + \frac{1}{2} \rho c_1^2 & \rightarrow & c_1^2 = \frac{2}{\rho} (p_{01} - p_1) \\ p_{01} &= p_2 + \frac{1}{2} \rho c_{2s}^2 & \rightarrow & c_{2s}^2 = \frac{2}{\rho} (p_{01} - p_2) \\ p_{02} &= p_2 + \frac{1}{2} \rho c_2^2 & \rightarrow & c_2^2 = \frac{2}{\rho} (p_{02} - p_2) \end{aligned}$$

Sostituendo

$$\eta_{is} = \frac{p_{02} - p_2 - (p_{01} - p_1)}{p_{01} - p_2 - (p_{01} - p_1)} = \frac{p_{02} - p_2 - (p_{01} - p_1)}{p_1 - p_2} = 1 - \frac{\Delta p_0}{p_1 - p_2}$$

Δp_0 è la perdita di carico; $p_1 - p_2$ è la diminuzione di pressione.

Questa espressione troverà applicazione quando parleremo di schiere di pale.

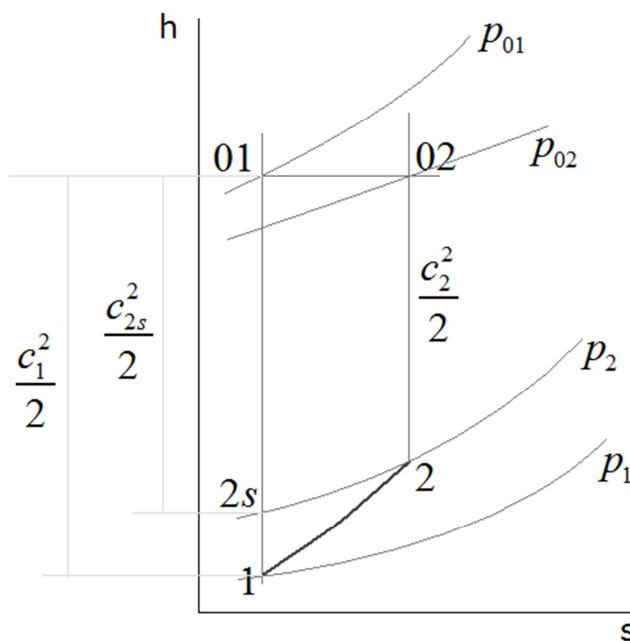
Questo non è l'unico modo ma abbiamo anche una formulazione alternativa

$$\eta_{is} = \frac{h_{10} - h_2}{h_{10} - h_{2s}} = \frac{c_2^2}{c_{2s}^2} = 1 - \frac{\Delta p_0}{p_{01} - p_2}$$

Facciamo riferimento non alle condizioni statiche ma alle condizioni totali (h_{10}).

Diffusori

Questi sono componenti particolarmente delicati. Sono elementi statorici nei quali il flusso è decelerato.



Il rendimento isoentropico di questo elemento può essere scritto come

$$\eta_{is} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{c_1^2 - c_{2s}^2}{c_1^2 - c_2^2}$$

Anche in questo caso, nell'ipotesi di avere basso numero di Mach ($Ma < 0,3$), possiamo scrivere l'espressione in funzione delle pressioni:

$$\eta_{is} = \frac{p_{01} - p_1 - (p_{01} - p_2)}{p_{01} - p_1 - (p_{02} - p_2)} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta p_0}{p_2 - p_1}}$$

L'espressione intermedia sarà richiamata successivamente.

Per definire le prestazioni di un diffusore si definiscono altre grandezze. Lo scopo del diffusore è quello di trasformare in energia di pressione la maggior quota parte possibile di energia cinetica. Quindi possiamo definire le prestazioni definendo una grandezza detta *coefficiente di recupero di pressione*:

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{p_{01} - p_1}$$

Sarà pari al recupero di pressione statica effettivamente realizzato sul massimo recupero di energia cinetica.

Osserviamo che la condizione di massimo rendimento non corrisponde con la condizione di massimo coefficiente di recupero di pressione.

a) *Legame tra c_p e η_{is}*

Ricordiamo la definizione

$$\eta_{is} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})}$$

Possiamo scrivere il suo reciproco

$$\frac{1}{\eta_{is}} = \frac{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})}{p_2 - p_1} = \frac{p_{01} - p_1 - (p_{02} - p_2)}{p_2 - p_1} = \frac{1}{c_p} - \frac{p_{02} - p_2}{p_2 - p_1}$$

Per completare l'analisi posso chiedermi quale sarebbe il valore del coefficiente di recupero di pressione se il processo fosse isoentropico? Avrei il *coefficiente di recupero di pressione ideale*

$$c_{pi} = \frac{p_2 - p_1 + (p_{01} - p_{02})}{p_{01} - p_1}$$

Cioè abbiamo al numeratore l'effettivo recupero di pressione che ho realizzato più la perdita di carico (se il processo fosse ideale non avrei una perdita di carico ma un recupero di pressione) e divido per il massimo recupero di pressione possibile.

Ricordando che, per bassi numeri di Mach

$$p_2 = p_{02} - \frac{1}{2} \rho c_2^2$$

$$p_1 = p_{01} - \frac{1}{2} \rho c_1^2$$

Quindi abbiamo

$$c_{pi} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2} = 1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 = 1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{A_R^2}$$

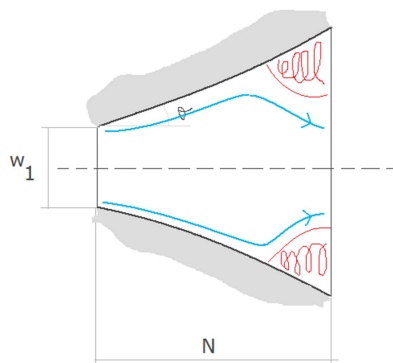
Stiamo considerando un diffusore ideale ed abbiamo un fluido praticamente incomprimibile (basso numero di Mach) quindi posso associare al rapporto tra le velocità il rapporto tra le sezioni normali alla velocità. A_R è il rapporto tra le sezioni

$$A_R = \frac{A_2}{A_1}$$

b) Legame tra c_p , η_{is} e c_{pi}

$$\frac{c_p}{c_{pi}} = \frac{p_2 - p_1}{p_{01} - p_1} \cdot \frac{p_{01} - p_1}{(p_2 - p_1) + (p_{01} - p_{02})} = \eta_{is}$$

Possiamo vedere l'andamento che hanno questi coefficienti per un diffusore.



Abbiamo un semplice diffusore monodimensionale costituito da un canale la cui geometria è definita da tre parametri:

- Altezza della sezione d'ingresso w_1
- Sviluppo assiale N
- Il semiangolo di apertura θ

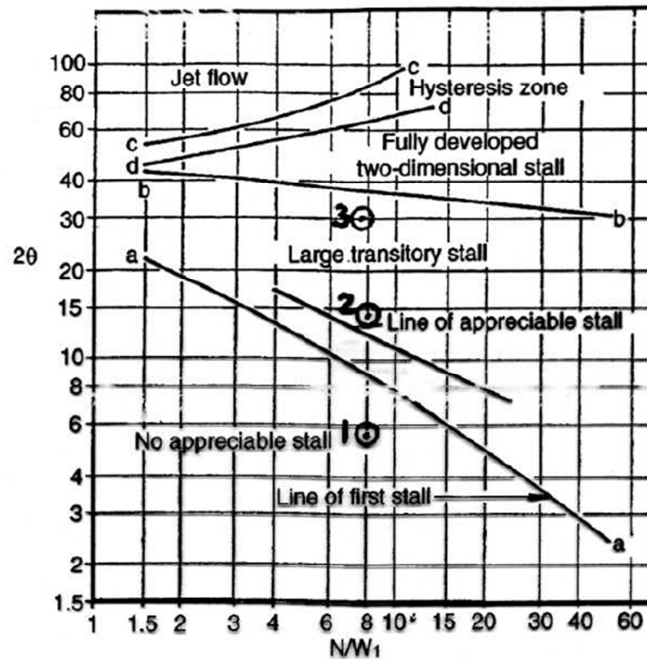


FIG. 2.15. Flow regime chart for two-dimensional diffusers (adapted from Sovran and Klomp 1967).

Vediamo classificato il tipo di flusso che si instaura nel precedente diffusore in funzione dell'angolo 2θ e del suo rapporto geometrico caratteristico N/w_1 . Le condizioni di flusso possono essere completamente diverse. Quello che domina è l'andamento dello stato limite e cioè la capacità che ha lo strato limite di rimanere aderente alla parete e di non ingrossarsi. Se θ diventa troppo grande ad un certo punto lo strato limite si ingrossa e poi si stacca. Il diffusore si comporta bene solo per valori piccoli di θ . Infatti esiste un campo di valori (parte in basso a sinistra) in cui non avremo stallo apprezzabile (stallo = distacco dello strato limite).

jet flow vuol dire che siamo arrivati in un punto tale che il canale è così divergente che il flusso uscente dalla sezione si comporta come un flusso libero.

Devo rimanere nel campo in basso a destra e quindi devo mantenere

$$2\theta = 8^\circ \div 10^\circ$$

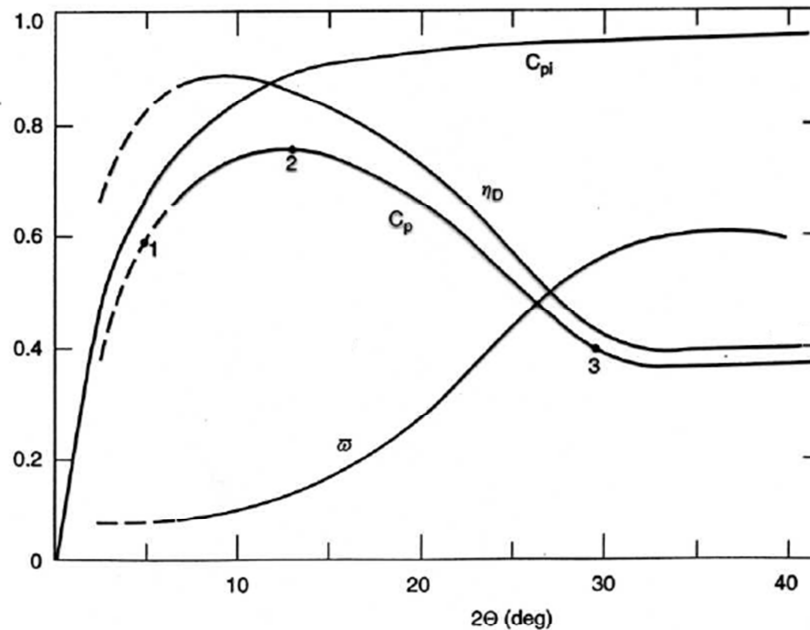


FIG. 2.16. Typical diffuser performance curves for a two-dimensional diffuser, with $L/W_1 = 8.0$ (adapted from Kline *et al.* 1959).

In questo grafico consideriamo il caso con $L/w_1 = 8$. Vediamo come si comportano i diversi parametri.

- Per $\theta = 5^\circ$ abbiamo il valore massimo del rendimento $\eta_D = \eta_{is}$; il coefficiente di recupero di pressione ha un valore buono ma non è il suo massimo.
- Il coefficiente di recupero di pressione ideale non risente dei fenomeni perchè si assume che la corrente sia sempre uniforme ed attaccata alle pareti.

Basta che aumenti di poco 2θ che c_p ed η_D decadono velocemente perchè interviene il distacco del fluido.

Se il campo di velocità in w_1 non è uniforme le prestazioni saranno peggiori quindi il precedente grafico vale per campo di velocità uniforme. Difficilmente troveremo un diffusore in cui la velocità in ingresso sia uniforme. Infatti all'uscita di una turbomacchina generale non abbiamo un flusso uniforme ma abbiamo un flusso periodico semistazionario. I coefficienti di pressione saranno diversi. Quindi la cosa da ricordare è che il diffusore, pur essendo un elemento concettualmente e geometricamente semplice, è soggetto a condizioni di flusso complicate e quindi ha prestazioni difficilmente prevedibili.

CAPITOLO 2

PROGETTO DI TURBOMACCHINE A FLUSSO ASSIALE

2.1 ANALISI DEL FLUSSO NELLE TURBOMACCHINE ASSIALI

Nel *corso di Macchine* le macchine sono state studiate sulla base di una teoria che possiamo definire *monodimensionale* cioè come se ci fosse un flusso privo di caratteristiche bi o tridimensionali quindi immaginando che tutti i piani meridiani siano uguali a se stessi e trascurando quanto avviene in direzione radiale.

Questa analisi monodimensionale è uno strumento utilissimo che consente di capire come funziona una macchina e come si può procedere al dimensionamento di massima. Per procedere oltre nel dimensionamento e nella verifica delle prestazioni possiamo passare da un approccio monodimensionale ad un *approccio bidimensionale*.

L'approccio bidimensionale sarà ancora approssimato perchè il flusso per una turbomacchina è tridimensionale. Però questa approssimazione già si avvicina alla realtà. Quest'analisi bidimensionale potrebbe essere applicata a qualsiasi tipo di macchina ma trova applicazione particolarmente utile proprio nel caso di macchine assiali. Per capire con cosa consiste questo approccio osserviamo la seguente figura

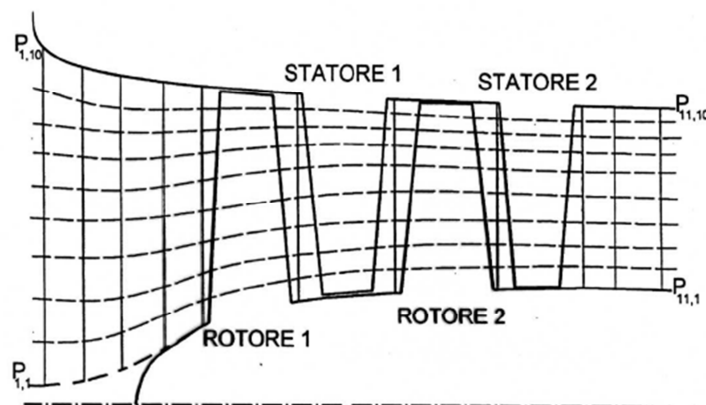


Figura 5.31: Reticolo di calcolo quasi-3D per un compressore assiale bistadio

Questa figura mostra la sezione meridiana di un compressore assiale bistadio. Possiamo applicare un'analisi di tipo bidimensionale per esempio alla coppia ROTORE2-STATORE2 in cui lo sviluppo della macchina è quasi perfettamente

assiale. Immaginiamo che le linee di corrente siano parallele all'asse di rotazione e che tutte le sezioni meridiane siano uguali a se stesse cioè supponiamo che le linee di corrente siano assialsimmetriche.

Quindi nello studio della macchina studiamo separatamente le due sezioni. Prendiamo una linea di corrente e sezioniamo la macchina lungo la superficie cilindrica di questa linea. Questa superficie cilindrica andrà a sezionare tutte le pale in corrispondenza di quel valore di raggio. Se immaginiamo di prendere la superficie cilindrica, tagliarla lungo una generatrice e stenderla sul piano trasformiamo la stella di pale in una schiera piana di pale.

Poi lo studio è completato con lo studio del piano meridiano dove andremo a vedere come cambiano le condizioni del flusso al variare del raggio. Quest'analisi verrà fatta in corrispondenza dei punti compresi tra delle sezioni tra una pala e l'altra. Le linee verticali sono linee che riusciamo sempre ad individuare e che non intersecano le pale ed in corrispondenza di queste sezioni ortogonali vengono calcolate le condizioni di equilibrio radiale del flusso. Bisogna sempre supporre di avere l'assialsimmetria. Se consideriamo delle sezioni che intersecano la pala avremo un flusso periodico e quindi bisogna tener conto delle forze scambiate tra fluido e pala.

Quindi i due punti fondamentali dell'analisi bidimensionale sono:

- Studio della schiera di pale
- Studio dell'equilibrio radiale

Unendo i risultati di questi due studi otteniamo il comportamento della macchina (abbastanza simile a quello reale).

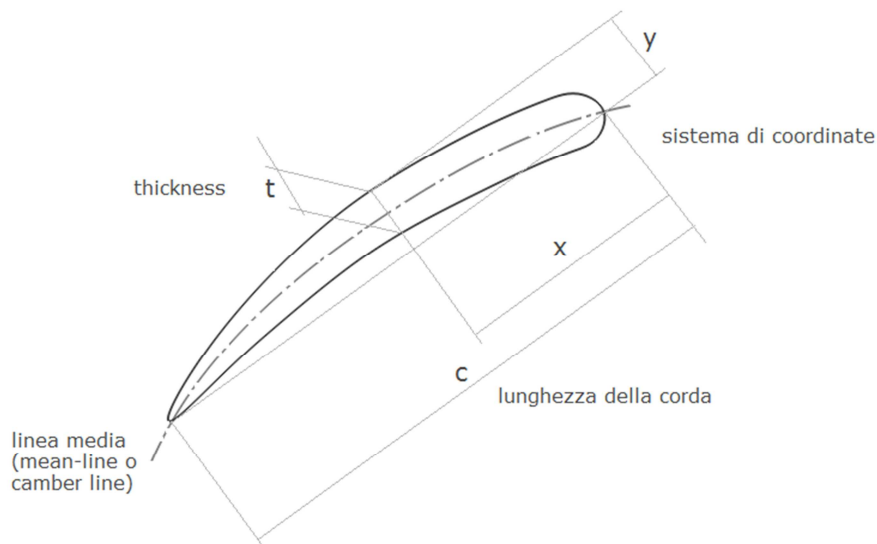
Con l'approccio bidimensionale trascuriamo il fatto che la linea di corrente non è perfettamente assiale (abbiamo una componente radiale) e vedremo che nella sezione studiata il flusso non è perfettamente assialsimmetrico. Tutto quello che sfugge a questa analisi costituisce una serie di strutture di flusso che chiamiamo *flussi secondari* che sono funzione di come abbiamo modellizzato i flussi principali.

2.2.1 SCHIERE DI PALE BIDIMENSIONALI

Nomenclatura

Profilo isolato

Si definisce una linea media (mean-line) che può essere costituita da una curva semplice (arco di cerchio o arco di parabola). Attorno alla linea media si sovrappone un'opportuna distribuzione di spessori. Una delle dimensioni fondamentali del profilo è la lunghezza della corda. La corda è la distanza tra i punti di intersezione della linea media con la sagoma del profilo. Una definizione talvolta utilizzata prevede di appoggiare il profilo su un piano. Possiamo definire poi per ogni punto della linea media un sistema di coordinate cartesiane x, y a partire dal bordo d'ingresso. Per ogni coppia di valori si stabilisce un valore dello spessore.



La geometria viene spesso trattata in termini di grandezze adimensionali in modo tale che sia rappresentativa della famiglia di profili geometricamente simili. Si trovano delle tabelle che danno valori adimensionalizzati

$$\frac{x}{c} \quad \frac{y}{c} \quad \frac{t}{c}$$

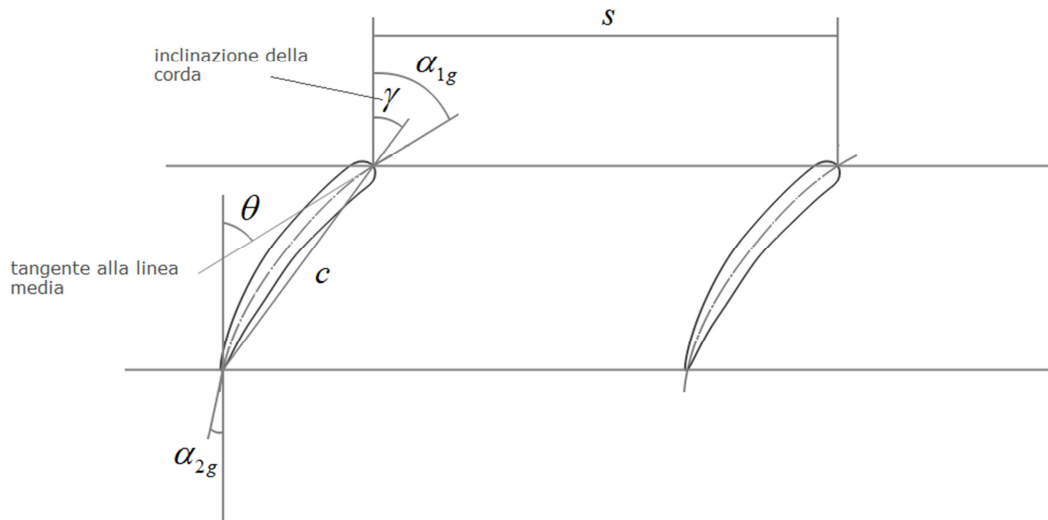
Una delle serie più note di profili è la serie NACA.

Schiere di pale

Quando il profilo non è isolato ma è utilizzato in una macchina parliamo di schiere di pale. Definiamo due serie di grandezze:

- 1) Geometriche
- 2) Cinematiche

Rappresentiamo una schiera di profili per compressore (sottili)



Quando un profilo va inserito in una schiera si introducono due dati geometrici che definiscono la geometria della schiera. Questi sono il passo palare s e la corda c . Possiamo allora definire la *solidità della schiera*

$$\sigma = \frac{c}{s}$$

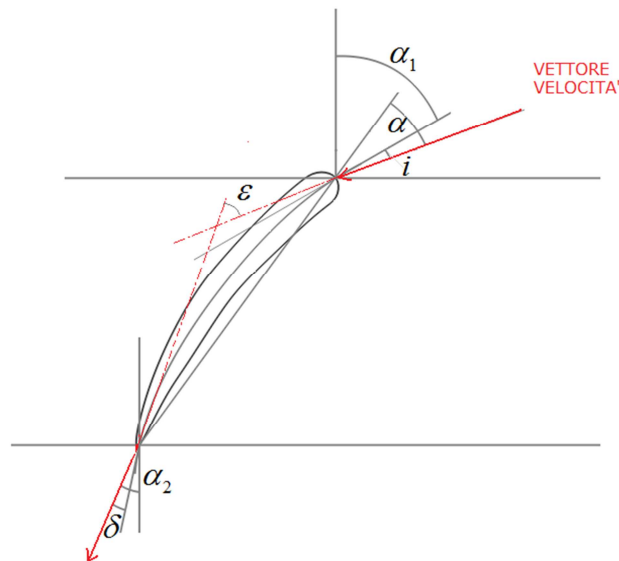
Tracciando le tangenti alla linea media del profilo in corrispondenza all'imbocco d'ingresso e d'uscita, possiamo definire i seguenti angoli:

- θ : deflessione geometrica del profilo ("angolo di camber")
- γ : angolo di calettamento del profilo della schiera (inclinazione della corda rispetto alla direzione ortogonale)
- α_{1g} e α_{2g} : inclinazioni delle tangenti alla linea media rispetto la direzione ortogonale

Abbiamo l'innarcamento del profilo o la deflessione geometrica del profilo

$$\theta = \alpha_{1g} - \alpha_{2g} = \Delta\alpha_g$$

Vediamo adesso le grandezze che possiamo definire con riferimento al flusso che va ad investire questa schiera (grandezze cinematiche).



Posso definire l'inclinazione del vettore velocità rispetto diversi riferimenti:

- α_1 : inclinazione del vettore velocità rispetto la direzione di riferimento ortogonale alla schiera
- α : inclinazione del vettore velocità con riferimento alla corda (angolo di attacco del flusso rispetto la schiera)
- i : inclinazione del vettore velocità rispetto la tangente alla linea media (angolo di incidenza)
- δ : angolo di deviazione o deviazione (angolo di deviazione del flusso in uscita rispetto la tangente alla linea media)
- ε : entità della deflessione subita dal flusso tra ingresso ed uscita

$$\varepsilon = \alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\alpha$$

Noi abbiamo riferito le grandezze alla direzione ortogonale ma potevamo riferirle alla direzione tangenziale (adottata in Europa).

L'incidenza è positiva quando la deflessione del flusso è maggiore di quella che si ha ad incidenza nulla. Si assume positiva la deviazione quando la deviazione del flusso sarà minore di quella imposta dalla deviazione geometrica. In questo modo sono definiti positivi i valori di i e δ che troviamo più frequentemente.

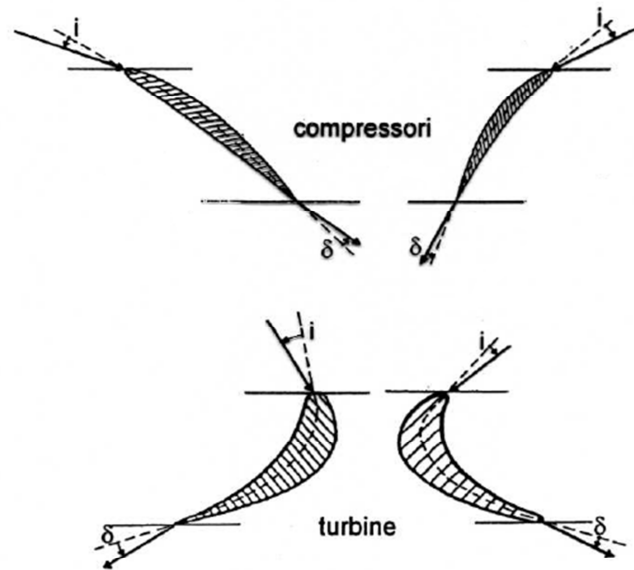


Figura 5.8: *Incidenza e deviazione positive per diverse pale di turbomacchina*

In questa figura sia i che δ sono definiti positivi. Non accadrà mai che la corrente riesca ad essere inclinata in uscita dello stesso angolo di inclinazione del profilo. La corrente che esce dal profilo al massimo può avere un valore di δ piccolo. Questa è la situazione comune.

Possiamo allora scrivere il legame tra questi angoli

$$\varepsilon = \theta + i - \delta$$

Analisi delle forze agenti sulle pale e della dissipazione di energia

La corrente fluida può essere descritta mediante i vettori di velocità e le variazioni di velocità. Queste velocità interagiscono ed il risultato di questa interazione è uno scambio di energia. Questo scambio di energia può essere studiato con diversi approcci che devono portare a risultati uguali. Gli approcci sono:

- Vedere la variazione di forma dei triangoli di velocità e la variazione di pressione tra una sezione posta a monte ed una posta a valle della schiera. Vediamo qual'è l'effetto globale del passaggio attraverso la schiera del flusso ma non vediamo le modalità dello scambio.
- Per avere il dettaglio dobbiamo analizzare le forze agenti sui profili. Queste forze possono essere valutate in termini di portanza-resistenza (sono le componenti delle forze scambiate valutate in direzione normale e parallela al flusso) o in termini di direzioni normale e parallela al fronte di sviluppo della schiera.

L'analisi sarà impostata nel seguente modo. Troveremo le espressioni generiche di

$$\text{a) } \begin{aligned} F_a &= f(\Delta\text{velocità}, \Delta p_0) \\ F_r &= f(\Delta\text{velocità}, \Delta p_0) \end{aligned} \quad (\Delta\text{velocità} = \text{triangolo di velocità}, \Delta p_0 \text{ perdite di carico})$$

$$\text{b) } \begin{aligned} L &= f(F_a, F_r) \\ D &= f(F_a, F_r) \end{aligned} \quad (\text{portanza e resistenza})$$

c) Adimensionalizzazione di F_a, F_r, L, D

Questa trattazione sarà fatta secondo alcune ipotesi:

- 1) Flusso incomprimibile (operiamo a basso numero di Mach)
- 2) Schiera piana

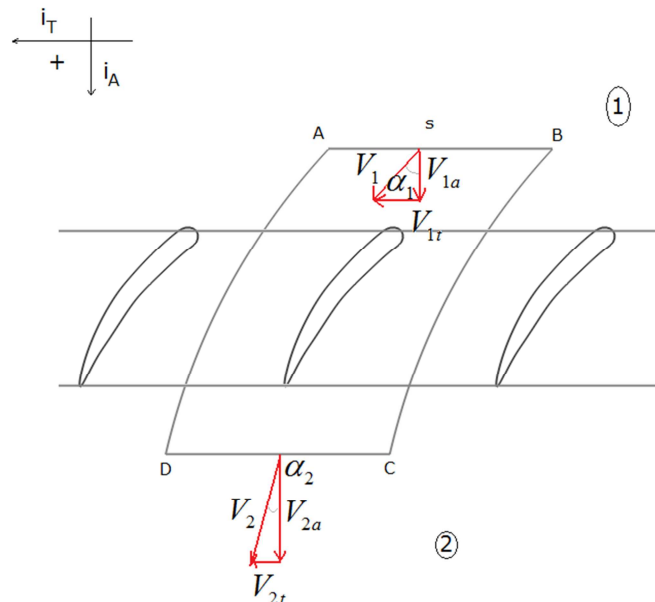
Assumiamo che il flusso sia incomprimibile perchè la maggior parte dei risultati sperimentali e numerici di cui disponiamo sono stati ottenuti operando con correnti a basso numero di Mach. In moltissime applicazioni la variazione di densità in realtà è piccola.

Per un compressore assiale ogni singolo stadio ha un rapporto di compressione molto piccolo. Nell'ambito di questi rapporti di compressione la variazione di densità è effettivamente molto piccola. Nel complesso della macchina la variazione di densità non è trascurabile.

Le ipotesi vanno un pò in difetto se parliamo di turbine. Nelle turbine le condizioni di flusso sono meno impegnative di quelle dei compressori. In ogni stadio si raggiungono rapporti di espansione più alti. Esistono delle correlazioni che consentono di correggere i risultati.

Lo scopo dell'analisi è fornire delle relazioni utili per la progettazione delle turbomacchine cioè tradurre i risultati dei rilievi sperimentali (rilievi di campi di velocità, di campi di pressione,...) e tradurli in termini di coefficienti globali.

Consideriamo una schiera di pale che abbiano una profondità unitaria e fissiamo i versi positivi. Immaginiamo che una corrente incomprimibile vada ad investire la schiera e supponiamo di essere ad una distanza sufficientemente grande dal fronte di ingresso e di uscita da poter ritenere la corrente uniforme. Avere il flusso uniforme vuol dire non avere nessun scorrimento tra stati di fluido paralleli. Studiamo l'effetto del flusso sulla pala. È sufficiente studiare un profilo e definire intorno al profilo una linea di controllo chiusa.



La linea di controllo avrà le sezioni d'ingresso e uscita parallele. Inoltre la distanza tra due punti che si trovano alla stessa altezza deve essere sempre pari al passo palare s .

Applichiamo al nostro sistema le equazioni di conservazione.

- *Conservazione della portata (equazione di continuità)*

$$s \cdot \rho \cdot V_{1a} = s \cdot \rho \cdot V_{2a} \quad \Rightarrow \quad V_{1a} = V_{2a} = V_a$$

- *Conservazione della quantità di moto in direzione tangenziale*

$$F_t = \dot{m} \Delta V_t = s \cdot \rho \cdot V_a \cdot (V_{1t} - V_{2t})$$

- *Conservazione della quantità di moto in direzione assiale*

$$F_a = s \cdot (p_1 - p_2)$$

Questa quantità può essere positiva o negativa a seconda dei casi (per esempio in un compressore sarà negativa).

Queste espressioni le possiamo elaborare in modo da introdurre delle grandezze di particolare significato fisico o di particolare importanza. Partiamo dalla forza assiale

$$F_a = s \cdot (p_1 - p_2)$$

Possiamo scrivere la pressione statica come differenza della pressione di ristagno e la pressione cinetica

$$\begin{aligned} F_a &= s \cdot (p_1 - p_2) = \\ &= s \cdot \left(p_{01} - \frac{1}{2} \rho V_1^2 - p_{02} + \frac{1}{2} \rho V_2^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \rho s (V_2^2 - V_1^2) + s (p_{01} - p_{02}) = \\ &= \frac{1}{2} \rho s (V_{t2}^2 + V_a^2 - V_{t1}^2 - V_a^2) + s \Delta p_0 = \\ &= \frac{1}{2} \rho s (V_{t2} - V_{t1})(V_{t2} + V_{t1}) + s \Delta p_0 \end{aligned}$$

$(p_{01} - p_{02})$ è la perdita di carico.

Arrivati a questo punto introduciamo il concetto di *flusso medio indisturbato* e definiamo la velocità tangenziale del flusso medio indisturbato

$$V_{t\infty} = \frac{V_{t1} + V_{t2}}{2}$$

Quindi alla fine possiamo scrivere

$$F_a = \rho s V_{t\infty} (V_{t2} - V_{t1}) + s \Delta p_0$$

Questa equazione è un risultato utile perchè ci mette in evidenza la perdita di carico separandola dal resto; ci lega la forza assiale alle componenti tangenziali della velocità; ci permette di introdurre la definizione di flusso medio.

Quando abbiamo a che fare con un profilo isolato il concetto di flusso indisturbato è univoco perchè il vettore velocità indisturbata è uguale sia a monte che a valle del profilo. Quando abbiamo profili in schiera, la schiera va a modificare i vettori velocità. Per definire la portanza (componente di forza normale al flusso indisturbato) dobbiamo avere una direzione di riferimento. Il flusso indisturbato non è ne quello a monte ne quello a valle. Posso scrivere l'equazione che mi lega la portanza alla circuitazione con un'equazione formalmente identica a quella per il profilo isolato purchè scelga quella direzione di riferimento (quella del flusso indisturbato).

Cerchiamo il legame tra F_a e F_t sfruttando il fatto che in entrambe le equazioni compare la differenza tra le componenti di velocità tangenziali. Sostituiamo F_t in F_a

$$F_a = -F_t \frac{V_{t\infty}}{V_a} + s \Delta p_0 = -F_t \tan \alpha_\infty + s \Delta p_0$$

Coefficiente adimensionale di perdita

$$y = \frac{\Delta p_0}{p_{02} - p_2} = \frac{\Delta p_0}{\frac{1}{2} \rho V_2^2}$$

A questo punto possiamo visualizzare l'andamento di queste forze e trovare la scomposizione della forza nelle due direzioni ortogonali e parallela al flusso medio per definire la portanza e la resistenza.

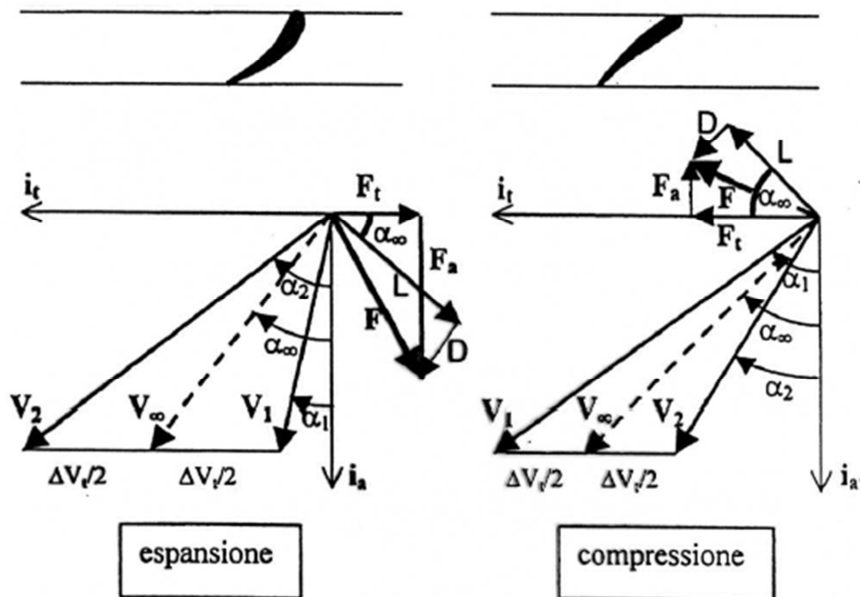


Figura 5.11: Portanza e resistenza agenti sui profili di schiere piane di pale.

Questa figura ci mostra l'andamento delle forze in corrispondenza ad un aumento delle velocità nei due casi significativi di schiera di espansione e schiera di compressione.

Capiamo che quella di sinistra è una schiera di espansione dalla forma del profilo e dall'aumento delle velocità. Espansione significa che la velocità in uscita deve essere più grande della velocità in ingresso.

F è la forza risultante che potremmo ottenere compinando F_a e F_t . Inoltre F può essere scomposta nella componente ortogonale alla V_∞ (portanza L) e nella componente parallela alla V_∞ (resistenza D). Possiamo osservare che in una schiera di espansione la componente F_a sarà positiva mentre nella schiera di compressione sarà negativa.

$$L = F_t \cos \alpha_\infty - F_a \sin \alpha_\infty$$

$$D = F_t \sin \alpha_\infty + F_a \cos \alpha_\infty$$

Attenzione ai segni! Questa scrittura è giusta se tutte le grandezze vettoriali ed angolari sono intese come grandezze con i loro segni rispetto quel sistema di riferimento.

Possiamo anche scrivere le equazioni inverse

$$F_a = -(L \sin \alpha_\infty - D \cos \alpha_\infty)$$

$$F_t = L \cos \alpha_\infty + D \sin \alpha_\infty$$

Per generalizzare i risultati conviene procedere con l'adimensionalizzazione. Definiamo allora il *coefficiente di portanza*

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2}$$

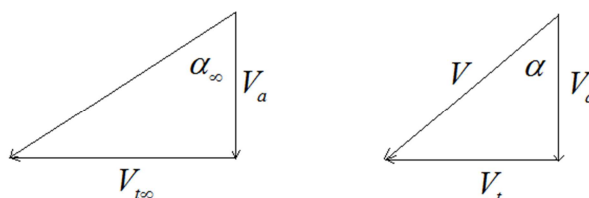
c è la corda. È pari alla portanza diviso la pressione moltiplicata per la superficie sulla quale essa si esercita.

Poi definiamo il *coefficiente di resistenza*

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2}$$

Coefficiente di forza tangenziale

$$c_F = \frac{F_t}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2} = \frac{s \rho V_a \cdot (V_{t1} - V_{t2})}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2}$$



$$V_a = V_\infty \cos \alpha_\alpha$$

$$V_{t1,2} = V_a \tan \alpha_{1,2}$$

Quindi sostituendo

$$c_F = \frac{F_t}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2} = \frac{s \rho V_a \cdot (V_{t1} - V_{t2})}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2} = 2 \left(\frac{s}{c} \right) \cos^2 \alpha_\infty (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$$

Questa espressione è importante perchè ci consente di definire la forza tangenziale adimensionalizzata della nostra schiera purchè conosciamo la solidità della schiera, la direzione della corrente indisturbata e i valori degli angoli in ingresso ed uscita. Vogliamo collegare l'entità della forza alla variazione della corrente.

Coefficiente di (forza assiale) pressione

$$c_P = \frac{F_a}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2} = \frac{s \Delta p_0 - F_t \tan \alpha_\infty}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2} = \frac{s \Delta p_0}{\frac{1}{2} \rho c \cdot V_\infty^2} - c_F \tan \alpha_\infty$$

Introduciamo il coefficiente di perdita di carico

$$y = \frac{\Delta p_0}{\frac{1}{2} \rho V_2^2}$$

Per cui

$$c_P = \left(\frac{s}{c} \right) y \left(\frac{V_2}{V_\infty} \right)^2 - c_F \tan \alpha_\infty$$

Sostituendo ancora le relazioni trigonometriche

$$c_P = \left(\frac{s}{c} \right) y \frac{\cos^2 \alpha_\infty}{\cos^2 \alpha_2} - 2 \left(\frac{s}{c} \right) (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \sin \alpha_\infty \cdot \cos \alpha_\infty$$

Possiamo trovare allora

$$c_L = c_F \cos \alpha_\infty - c_p \operatorname{sen} \alpha_\infty$$

$$c_D = c_F \operatorname{sen} \alpha_\infty + c_p \cos \alpha_\infty$$

Sostituendo c_F e c_p si ottiene

$$c_L = 2 \left(\frac{s}{c} \right) (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \cos \alpha_\infty - c_D \tan \alpha_\infty$$

$$c_D = \left(\frac{s}{c} \right) y \frac{\cos^3 \alpha_\infty}{\cos \alpha_2}$$

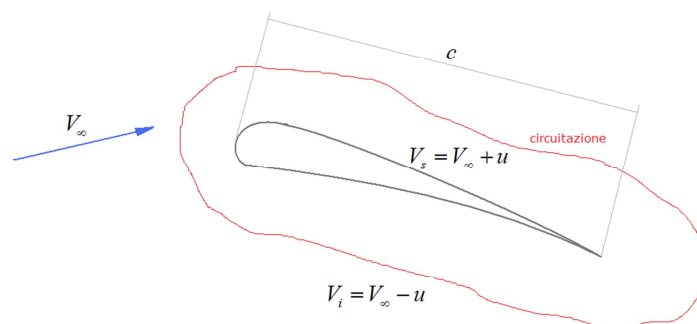
Nel caso ideale di resistenza nulla

$$c_D = 0$$

$$c_L = 2 \left(\frac{s}{c} \right) (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \cos \alpha_\infty$$

Teorema di Kutta-Joukowski (o teorema della "circuitazione")

È particolarmente significativo trovare α_∞ perchè ci permette di avere una direzione di riferimento. Questo teorema illustra in termini matematici il meccanismo che porta all'effetto della portanza del profilo. Possiamo dare una dimostrazione molto semplice e rapida ma precisa dal punto di vista fisico. Consideriamo un profilo investito da una corrente fluido per la quale abbiamo una velocità V_∞ . Le linee di corrente di questo flusso sono disturbate dalla presenza del profilo per cui avremo una differenza di velocità tra il dorso ed il ventre del profilo stesso. Abbiamo un'accelerazione del flusso sul dorso ed una decelerazione sul ventre che si traduce in una differenza di pressione che genera la portanza.



Sulla parte superiore del profilo avremo una V_s che sarà pari alla $V_\infty + u$ mentre sulla parte inferiore avremo V_i . La differenza di pressione che si crea tra le due superfici sarà uguale a

$$\Delta p = p_i - p_s = \frac{1}{2} \rho (V_s^2 - V_i^2) = 2\rho u V_\infty$$

Il profilo ha una corda c ed una profondità unitaria per cui la forza agente sul profilo (generata dalla differenza di pressione tra le due superfici) sarà

$$L = c \cdot 1 \cdot \Delta p = 2c\rho u V_\infty$$

Profilo isolato

Indichiamo la circuitazione della velocità attorno al profilo come

$$\Gamma = 2cu$$

Abbiamo la portanza (teorema di Kutta-Joukowski)

$$L = \rho \Gamma V_\infty$$

Γ appena considerato è l'espressione semplificata della seguente

$$\Gamma = \oint_{\ell} \bar{v} \cdot d\bar{\ell}$$

ℓ è una linea chiusa; \bar{v} è il vettore velocità; $d\bar{\ell}$ è una porzione della linea chiusa. Questa linea può coincidere con la forma del profilo. Con un approccio più generale la linea chiusa non deve essere necessariamente la forma del profilo ma può essere una qualsiasi linea chiusa che contenga al suo interno il profilo.

Il teorema di Kutta-Joukowski dice che condizione essenziale perchè una corrente fluida dia luogo a portanza non nulla sul corpo immerso è che la circuitazione della corrente intorno al corpo sia diversa da zero.

Profilo in schiera

Sfruttando le relazioni trovate in precedenza possiamo vedere che anche la portanza in una schiera risulta in un'espressione che formalmente è la stessa. Il teorema di Kutta-Joukowski può essere applicato in maniera precisa nel caso in cui non ci siano perdite di carico per cui la forza risultante coincide con la portanza

$$\Delta p_0 = 0$$

Abbiamo visto che

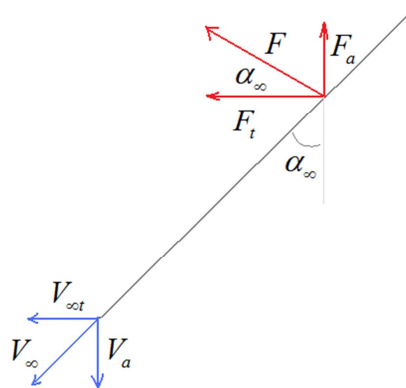
$$F_a = s\rho V_{\infty t} (V_{2t} - V_{1t})$$

$$F_t = s\rho V_a (V_{1t} - V_{2t})$$

Troviamo il rapporto

$$\frac{V_{\infty t}}{V_a} = -\frac{F_a}{F_t} = \tan \alpha_{\infty}$$

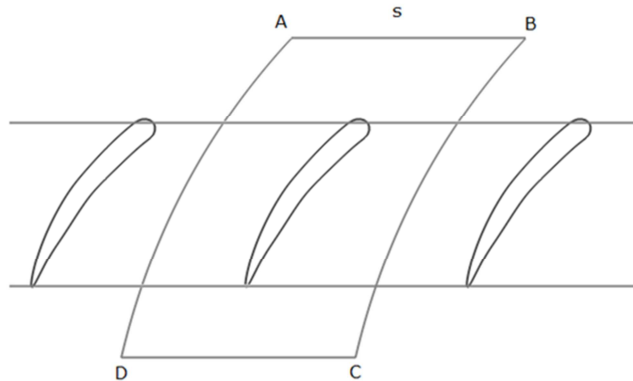
Facendo una rappresentazione dei vettori sui quali operiamo prendendo in considerazione la schiera di un compressore.



F è ortogonale a V_{∞} . Il modulo della forza risultante è

$$F = \frac{F_t}{\cos \alpha_{\infty}} = \rho \frac{V_a}{\cos \alpha_{\infty}} s (V_{1t} - V_{2t}) = \rho V_{\infty} s (V_{1t} - V_{2t}) = L$$

Se valutiamo la circuitazione del vettore velocità attorno al profilo ed assumiamo quale linea ABCD



Calcoliamo la circuitazione attorno a questa linea

$$\Gamma = s(V_{1t} - V_{2t}) \quad \rightarrow \quad L = \rho V_{\infty} \Gamma$$

Abbiamo trovato una relazione formalmente identica che il teorema di Kutta-Joukowski ci dà per il profilo isolato con la differenza che per ottenerla abbiamo dovuto definire V_{∞} . Questo non vuol dire che troverò lo stesso valore di portanza se considero il profilo nella schiera e poi lo stesso isolato. Nei due casi il valore della circuitazione sarà diverso. Il fenomeno della portanza però può essere studiato con gli stessi strumenti matematici.

Effetto schiera sulle prestazioni del profilo

In pratica vogliamo vedere di quanto varierà la circuitazione in funzione della solidità della schiera e degli altri parametri geometrici. A questa domanda possiamo rispondere con i risultati di uno studio classico

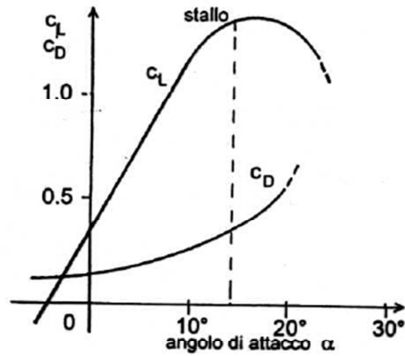


Figura 5.9: *Coefficienti di portanza e resistenza per un profilo isolato.*

Questa figura ci farà vedere un andamento piuttosto tipico dei coefficienti di portanza e resistenza per un profilo isolato in funzione dell'angolo di attacco. All'aumentare dell'angolo di attacco il coefficiente di portanza aumenta in maniera spesso abbastanza lineare. Raggiunti i valori più elevati in maniera improvvisa sorge lo stallo. La resistenza invece ha un andamento crescente e spesso è una curva che presenta un'ampia zona di valori minimi. Ad un certo punto all'aumentare dell'angolo di incidenza il coefficiente di resistenza aumenta. In prossimità di stallo il suo valore è abbastanza elevato.

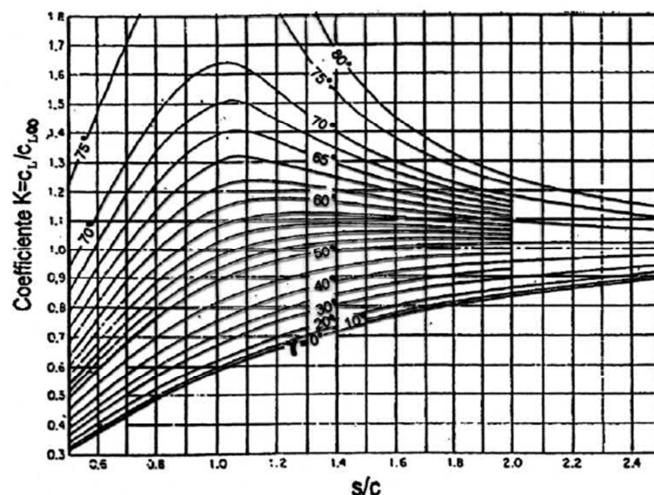


Figura 5.15: *Effetto di schiera sul coefficiente di portanza.*

Questo diagramma rappresenta i risultati di uno studio classico che illustra l'effetto di schiera sul coefficiente di portanza. In ascisse abbiamo la solidità

della schiera. In ordinate abbiamo il coefficiente k , rapporto tra il coefficiente di portanza del profilo in schiera e il coefficiente di portanza del profilo isolato. Su questo piano abbiamo una serie di curve tracciate per angoli di calettamento del profilo diversi. Se abbiamo una solidità unitaria (tipica) fintanto che l'angolo di calettamento si mantiene tra i 50° - 55° le prestazioni del profilo isolato e in schiera saranno abbastanza simili. Allontanandosi da queste condizioni (sia in termini di solidità che di calettamento) la prestazione del profilo cambia in maniera notevole.

Questo diagramma è stato presentato da Weining nel 1935. È stato ottenuto lavorando su schiere rettilinee realizzate con spessore costante (non abbiamo schiere con profili alari ma semplici profili rettilinei) ed operando nell'ipotesi di flusso ideale incomprimibile.

La geometria del profilo avrà influenza sul risultato. Tuttavia l'andamento generale non sarà molto diverso da quello presentato da Weining. Quindi per poter utilizzare delle informazioni relative ai profili nella progettazione di una turbomacchina sarà sempre preferibile disporre di informazioni sperimentali relativi alla schiera. Tuttavia, con alcuni limiti, è possibile partire dalle prestazioni note dei profili isolati e ricondurre queste proprietà al caso delle schiere ragionando con diagrammi specifici.

Rendimento della schiera di pale (statoriche)

Le schiere di pale possono essere:

- Schiere di espansione (il flusso accelera e quindi abbiamo un ugello)
- Schiere di compressione (il flusso decellera e quindi abbiamo dei diffusori)

Schiera di espansione (assimilabile ad un ugello)

Abbiamo visto che per flussi a bassa velocità è

$$\eta_{is} = 1 - \frac{\Delta p_0}{p_1 - p_2}$$

Possiamo elaborarla e renderla valida anche nel caso delle schiere ricordando

$$p_1 - p_2 = \frac{F_a}{s}$$

$$F_a = -F_t \tan \alpha_\infty + s \Delta p_0$$

Allora sostituendo

$$\eta_{is} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta p_0 s}{F_t \tan \alpha_\infty}}$$

Schiere di compressione (assimilabile ad un diffusore)

$$\eta_{is} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta p_0}{p_2 - p_1}}$$

$$p_2 - p_1 = -\frac{F_a}{s}$$

$$F_a = -F_t \tan \alpha_\infty + s \Delta p_0$$

$$\eta_{is} = 1 - \frac{\Delta p_0 s}{F_t \tan \alpha_\infty}$$

Possiamo elaborare entrambe le espressioni appena trovate.

$$F_t = c_F \frac{1}{2} \rho c V_\infty^2$$

$$V_\infty = \frac{V_a}{\cos \alpha_\infty}$$

$$\Delta p_0 = y \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$V_2 = \frac{V_a}{\cos \alpha_2}$$

Andando a sostituire queste nel termine

$$\frac{\Delta p_0 s}{F_t \tan \alpha_\infty} = \frac{y}{c_F \tan \alpha_\infty} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_\infty}{\delta \cdot \cos^2 \alpha_2}$$

Sostituendo questa nelle espressioni del rendimento isoentropico troviamo

$$\eta_{is} = 1 - \frac{2c_D}{c_L \sin(2\alpha_\infty)}$$

Nuovamente abbiamo un'espressione del rendimento funzione dei coefficienti adimensionali di forza, della direzione del flusso indisturbato, della direzione del flusso in uscita, della solidità e della perdita di carico.

Con riferimento a schiere di pale di un compressore possiamo trovare la condizione di massimo rendimento.

$$\frac{\partial \eta_{is}}{\partial \alpha_{\infty}} = 0$$

Con ipotesi

$$\frac{c_D}{c_L} = \cos t$$

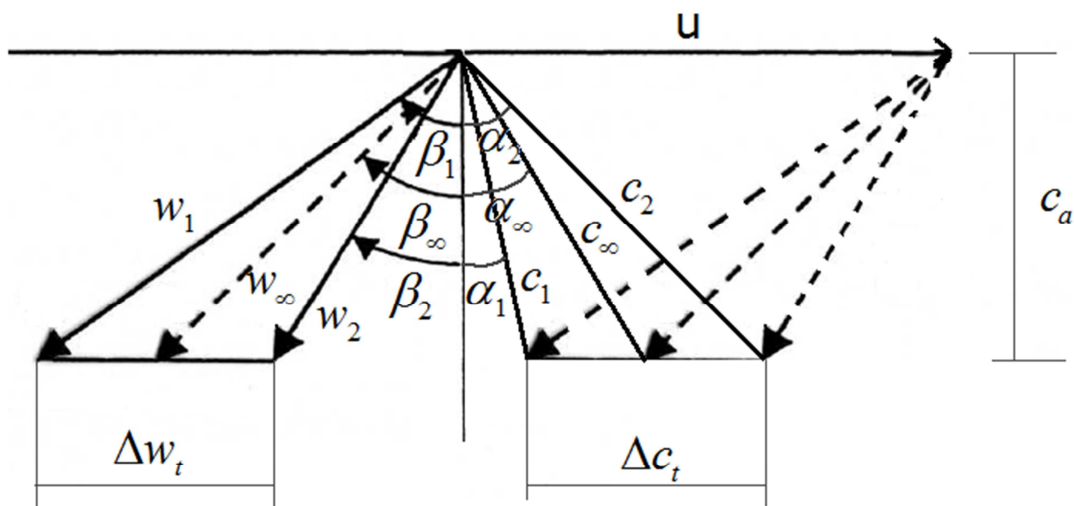
Allora risulta

$$\eta_{is,max} = 1 - \frac{2c_D}{c_L}$$

$$|\alpha_{\infty}|_{ott} = 45^{\circ}$$

Schiere di pale in movimento

Immaginiamo che la schiera sia dotata di moto di traslazione quindi consideriamo la schiera dotata di una "velocità di traslazione", u (analoga al concetto di velocità periferica). In un moto di schiera piana non ci sarà l'effetto in direzione ortogonale al moto del campo delle forze centrifughe. L'effetto delle forze centrifughe darà il problema di dover considerare l'equilibrio radiale. Partiamo da una schiera piana di pale per compressore



Come prima cosa si somma ai vettori velocità relative la velocità u e quindi otteniamo i vettori velocità assoluta. Possiamo definire le variazioni delle componenti tangenziali della velocità relativa ed assoluta (assumendo come verso positivo quello della u)

$$\Delta c_t = c_{2t} - c_{1t} = w_{1t} - w_{2t} = |\Delta w_t|$$

Il valore della forza tangenziale scambiata tra il fluido e la palettatura sarà

$$F_t = s \rho c_a (w_{1t} - w_{2t})$$

Elaborando le grandezze coinvolte possiamo riscrivere tutte le espressioni precedenti. Ora possiamo introdurre la definizione della potenza che il fluido scambia con la pala che sarà

$$P = F_t \cdot u$$

Ricordando che la portata di massa è

$$\dot{m} = \rho s c_a$$

possiamo definire il lavoro scambiato per unità di massa di fluido

$$L_u = \frac{P}{\dot{m}} = \frac{F_t \cdot u}{\rho s c_a} = u (w_{t1} - w_{t2})$$

Questa è l'espressione del lavoro Euleriano.

Inoltre possiamo osservare che

$$F_t = c_F \frac{1}{2} \rho c w_\infty^2 = \frac{c_F \frac{1}{2} \rho c c_a^2}{\cos^2 \beta_\infty}$$

Quindi

$$L_u = \frac{F_t \cdot u}{\rho s c_a} = \frac{c_F \delta}{2 \cos^2 \beta_\infty} \cdot c_a \cdot u$$

Espressione del lavoro Euleriano in funzione dei parametri della schiera.

Possiamo anche introdurre il *lavoro adimensionale*

$$\lambda = \frac{L_u}{\omega^2 D^2} = \frac{L_u}{4u^2}$$

$$\varphi = \frac{Q}{\omega D^3} \propto \frac{c_a}{u}$$

$$\lambda = \frac{c_F \delta}{8 \cos^2 \beta_\infty} \cdot \frac{c_a}{u} = \frac{c_F \delta}{8 \cos^2 \beta_\infty} \cdot \varphi$$

Quest'ultima è l'equazione che costituisce la curva caratteristica della schiera cioè la relazione tra lavoro e portata in funzione dei valori caratteristici della schiera.

Rendimento di schiere di pale (rotoriche)

Schiere di compressione

$$\eta_{is} = \frac{L_u - \frac{\Delta p_0}{\rho}}{L_u} = 1 - \frac{\Delta p_0}{L_u}$$

$$\Delta p_0 = y \frac{1}{2} \rho w_2^2$$

$$L_u = \frac{c_F \delta}{2 \cos^2 \beta_\infty} \cdot c_a \cdot u$$

$$w_2 = \frac{c_a}{\cos \beta_2}$$

$$\varphi = \frac{c_a}{u}$$

Otteniamo

$$\eta_{is} = 1 - \frac{y}{c_F} \cdot \frac{\cos^2 \beta_\infty}{\delta \cos^2 \beta_2} \cdot \varphi$$

Schiere di espansione

$$\eta_{is} = \frac{L_u}{L_u + \frac{\Delta p_0}{\rho}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{L_u} \Delta p_0}$$

Operando con le stesse sostituzioni del caso precedente otteniamo

$$\eta_{is} = \frac{1}{1 + \frac{y}{c_F} \cdot \frac{\cos^2 \beta_\infty}{\delta \cos^2 \beta_2} \cdot \varphi}$$

Rendimento di uno stadio

Lo stadio per una turbomacchina si intende la coppia pale rotoriche e statoriche. Dobbiamo valutare il rapporto tra il lavoro effettivamente scambiato e quello che avremmo dovuto spendere. Però in questo caso

$$\Delta p_0 = \Delta p_{0,stat} + \Delta p_{0,rot}$$

RILIEVI SPERIMENTALI IN GALLERIA DEL VENTO

Prestazioni delle schiere di pale bidimensionali

Ci occupiamo di come possiamo rilevare le prestazioni delle schiere di pale bidimensionali alla luce di quanto abbiamo osservato in precedente. Consideriamo una famiglia di schiere di pale geometricamente simili cioè schiere che differiscono solamente per le dimensioni (hanno profili con la stessa forma, stessa solidità e angolo di calettamento). Il legame funzionale che descriverà le prestazioni delle schiere sarà dato da

$$y, \alpha_2 = f(\alpha_1, Re, M_1)$$

La perdita di carico e la direzione del flusso in uscita saranno funzione della geometria, dell'angolo di ingresso, di Reynolds e del numero di Mach.

Il numero di Reynolds per queste applicazioni è definito come

$$Re = \frac{\rho c V_\infty}{\mu}$$

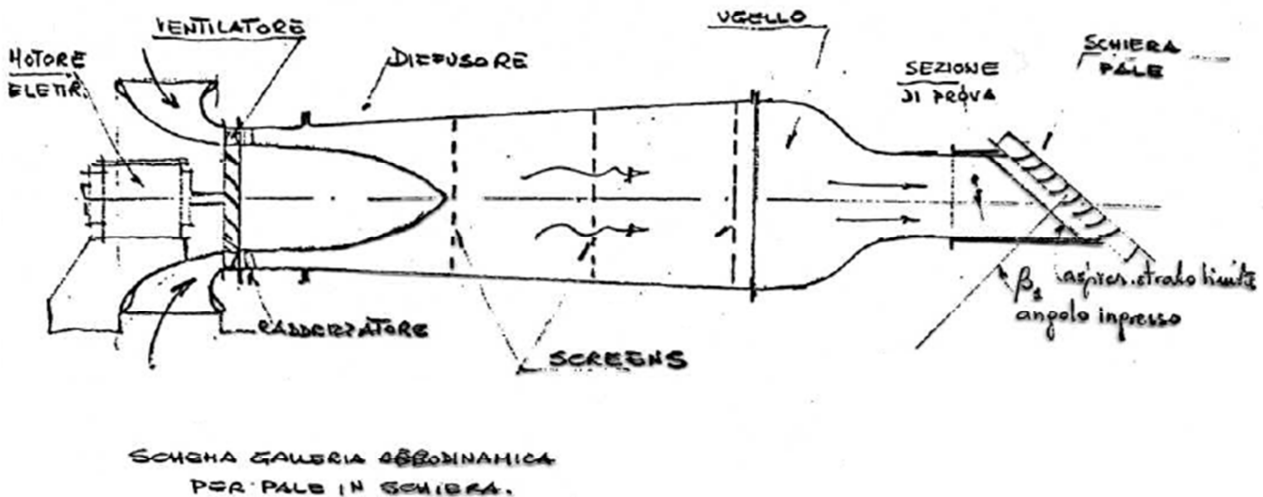
Mentre il numero di Mach

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1}$$

Questo legame funzionale può essere esplicitato mediante dei rilievi sperimentali in galleria del vento oppure mediante dei calcoli fluidodinamici (bidimensionali, viscosi). Nonostante gli sviluppi in campo numerico dal punto di vista della simulazione rimangono ancora dei limiti dei codici di calcolo nella capacità di predire in maniera esatta i distacchi di vena e quindi le condizioni di stallo dei profili e la rappresentazione delle prestazioni ad alti numeri di Mach. Quindi continua ad essere importantissima la fase sperimentale integrata dalle simulazioni fluidodinamiche.

Sia che trattiamo rilievi sperimentali che trattiamo risultati di calcoli numerici ci troviamo di fronte ad una serie di informazioni (campi di velocità, di pressioni, inclinazione punto per punto del vettore velocità,...) che devono essere elaborate sfruttando i concetti precedentemente definiti. Non esiste una normalizzazione.

Vediamo l'attrezzatura che si può utilizzare per il rilievo delle prestazioni e le problematiche che si riscontrano

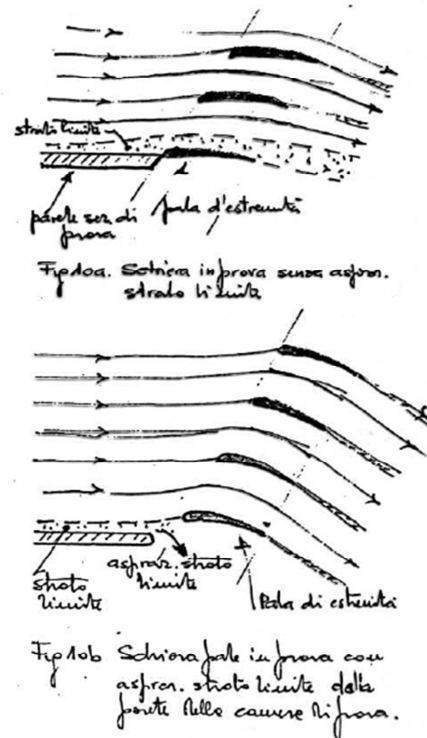
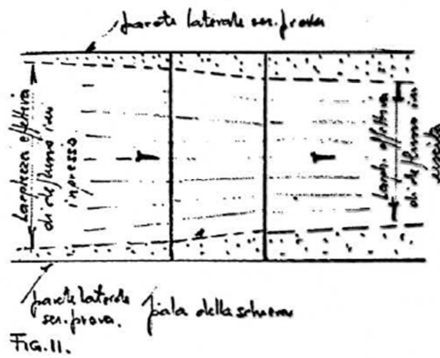


Questo è lo schema di una galleria aerodinamica per pale in schiera. Si tratta di una galleria per prove con basso numero di Mach ($<0,3$) e quindi anche l'ipotesi di incomprimibilità del fluido (introdotta nella nostra analisi) rimane soddisfatta. Tuttavia esistono anche delle attrezzature per il rilievo delle prestazioni ad alto numero di Mach. Sono gallerie molto particolari perchè per poter rilevare le prestazioni bisogna avere delle portate di aria molto elevate. Non è possibile farlo con un sistema a flusso continuo. Allora le gallerie per flussi ipersonici hanno una specie di flusso impulsivo cioè sono costituite da un serbatoio di accumulo dell'aria in pressione che poi viene liberata e per un certo periodo (frazioni di secondi) la schiera viene investita dalla corrente fluida. Abbiamo un sistema di acquisizione dati ad alta frequenza.

Sono più diffuse per l'ampissimo campo di applicazione, sono le gallerie a bassa velocità. Abbiamo un ventilatore e poi la galleria costituita da un diffusore (per aumentare la pressione), da una sezione con raddrizzatori per ridurre la turbolenza, prima della sezione di prova abbiamo un ugello (per accelerare il fluido in modo da ridurre lo spessore dello strato limite).

I problemi principali di misura riguardano l'interazione tra strato limite che si sviluppa su tutte le pareti della sezione di prova e le pale. Se questo effetto non venisse corretto porterebbe a risultati sbagliati. Osserviamo una sezione lungo l'asse della galleria. Sulle pareti della galleria si sviluppa lo strato limite. Se queste sono schiere di pale di compressione lo strato limite tende a

diventare più spesso e quindi tutte le grandezze misurate sono riferite ad una sezione utile di schiera provata minore.



Sul piano ortogonale si sviluppa uno strato limite che potrebbe far stallare i profili estremi della schiera. Questo allontana il flusso dalle condizioni di bidimensionalità.

Allora bisogna cercare di avere schiere grandi (con elevato numero di pale e sezioni trasversali elevate). Questo però porta ad avere grandi sezioni di prova e quindi gallerie costose e con forte consumo di energia. Allora la soluzione consiste nell'*aspirazione dello strato limite* a monte della sezione. Possiamo adottare a monte della schiera delle pareti porose con un sistema aspirante.

Ottenuta una corrente bidimensionale, rilevare le prestazioni vuol dire misurare a monte ed a valle della schiera con opportuni sistemi (sonde aereodinamiche) punto per punto l'andamento della pressione e del vettore velocità (modulo ed angolo). Così facendo si ottengono risultati del tipo

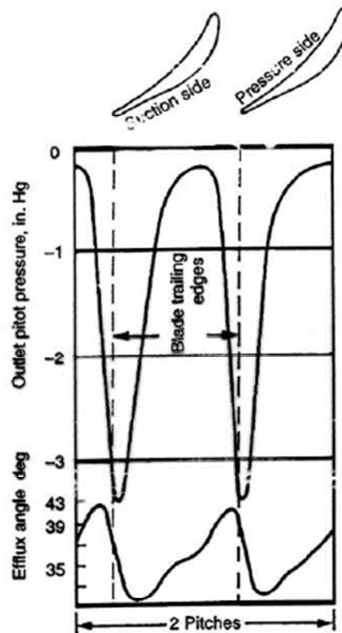


FIG. 3.11. A sample plot of inlet and outlet stagnation pressures and fluid outlet angle (adapted from Todd 1947).

Vediamo una coppia di profili: lato in pressione e lato in depressione. Vediamo il rilievo effettuato lungo due passi palari. I risultati riguardano l'angolo della corrente in uscita e l'andamento della pressione totale in uscita. Queste sono rilevate punto per punto con sonde aerodinamiche. Se avessimo fatto delle simulazioni numeriche avremmo trovato gli stessi risultati.

Il problema è tradurre questi dati in informazioni utili. Noi avremo delle medie ma in realtà gli andamenti reali sono quelli rappresentati nella figura precedente. Per quanto riguarda le medie queste possono essere fatte in maniera diversa: si possono fare delle medie aritmetiche o pesate.

Torniamo alla relazione di partenza. Se vado a mediare i valori del diagramma precedente avrò proprio

$$y, \alpha_2 = f(\alpha_1, Re, M_1)$$

Le prove vengono fatte con

$$M_1 < 0,3$$

e quindi i risultati della prova sono indipendenti dal numero di Mach. Per quanto riguarda il numero di Reynolds le prove vengono condotte ad un numero di Reynolds sufficientemente elevato cioè superiore al valore critico al di sopra del quale una variazione di Re non ha più influenza sulle prestazioni. Questo numero di Reynolds critico è

$$Re_1 = \frac{\rho c V_1}{\mu} > 2 \times 10^5$$

In questa condizione le prove risultano indipendenti dal numero di Reynolds. Ne deriva che nelle nostre prove rappresentare le prestazioni di una famiglia di schiere di pale geometricamente simili vuol dire rappresentare l'andamento

$$y, \alpha_2 = f(\alpha_1)$$

Vediamo alcuni esempi ricordando che non esiste una standardizzazione. Esistono varie possibilità che si basano sul legame tra queste grandezze ed i coefficienti di portanza e resistenza che sono funzione della geometria della schiera, della solidità,...

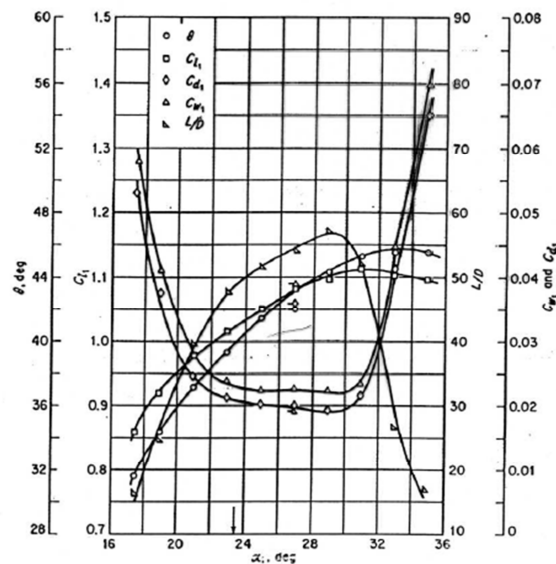


FIGURE 8. NACA cascade data from ref. 8: $\theta = \lambda_1 - \lambda_2$; α_1 = incidence angle, $\alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2$; $l/l = 1.0$; $\lambda_1 = 45^\circ$. Section: NACA 65 (27):10.

In questo caso i risultati delle prove sono presentati in funzione dell'angolo di incidenza (angolo d'attacco). Sono dati il valore della deflessione cinematica ($\alpha_1 - \alpha_2$) e l'andamento dei coefficienti di portanza, di resistenza, di resistenza di scia e del rapporto portanza-resistenza, il rapporto portanza-resistenza ha un massimo nelle vicinanze della condizione di stallo.

All'aumentare dell'angolo d'attacco la deflessione geometrica aumenta, contemporaneamente aumenta il coefficiente di portanza, il coefficiente di resistenza si mantiene su valori minimi per un ampio campo.

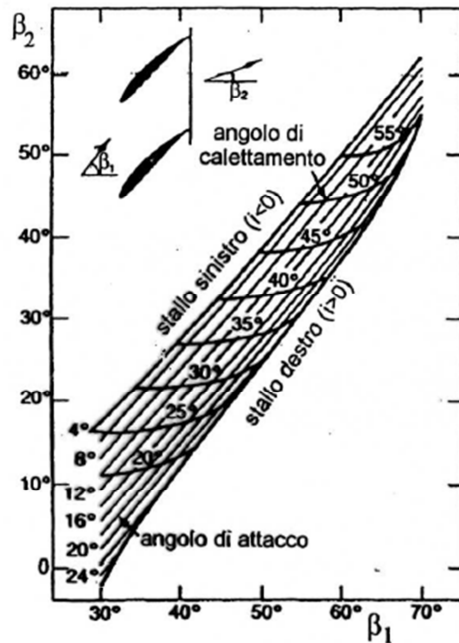


Figura 6.11: Angolo sperimentale a valle per una schiera di profili NACA 65(12)10, $s/c=1$.

Questa rappresentazione ci dà direttamente i dati geometrici. Abbiamo l'angolo del flusso in ingresso e del flusso in uscita. Questo diagramma esprime la relazione

$$\beta_2 = f(\beta_1)$$

In questo diagramma quindi manca y (perdita di carico).

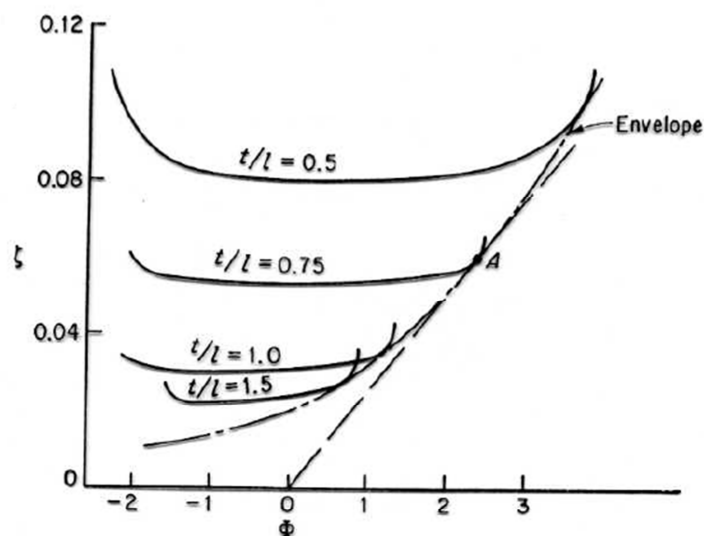


FIGURE 9. Loss-coefficient versus tangential-force-coefficient curves of cascades.

Questo tipo di rappresentazione ha in ascisse il coefficiente di forza tangenziale ed in ordinate il coefficiente di perdita di carico (sarebbe il nostro y). Abbiamo il rapporto t/l cioè il rapporto corda-passo (solidità della schiera). Un utilità di questa rappresentazione è data dal fatto che l'efficienza della schiera dipende dal rapporto tra il coefficiente di perdita di carico e il coefficiente di forza tangenziale. Allora prendiamo una semiretta che parte dallo 0 e vediamo che il coefficiente angolare della retta mi dà questo rapporto. Trovo il punto A (massimo dei massimi) dove ho il massimo rendimento della schiera. Facendo questa operazione per tutte le curve trovo una curva di involuppo (envelope) che mi dà per ogni solidità la condizione di massimo rendimento. Con il punto A individuo la solidità ottimale della mia schiera.

Il coefficiente di perdita di carico si impenna ai valori estremi dell'incidenza e si mantiene su valori minimi nella zona centrale. Sulla base dell'andamento di queste grandezze si può definire convenzionalmente il campo operativo di una schiera.

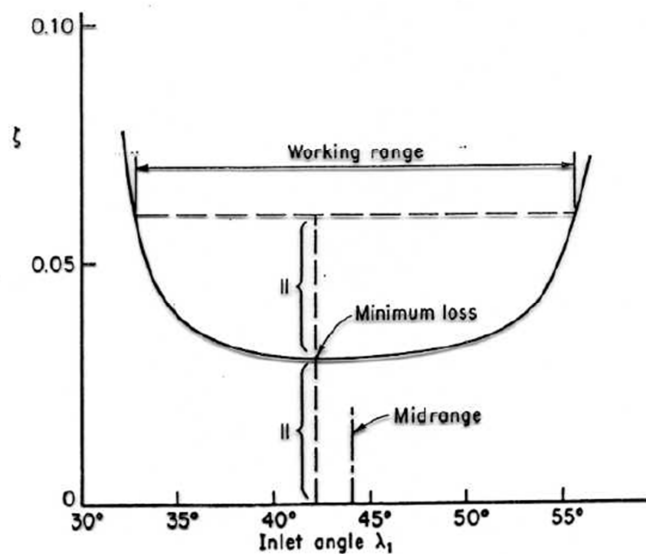


FIGURE 10. Working range of a cascade.

Si può convenzionalmente affermare che potremmo utilizzare la schiera in maniera tecnicamente accettabile nel campo di valori dell'angolo d'ingresso comunque limitandoci al campo nel quale la perdita di carico si mantiene inferiore al doppio della perdita minima. Trovato il punto di minimo definiamo il campo di funzionamento della schiera raddoppiando questa perdita.

A questo concetto di campo di funzionamento si associa la *condizione di funzionamento nominale o di riferimento*. Questa può essere o quella in corrispondenza della perdita minima o quella in corrispondenza al punto medio.

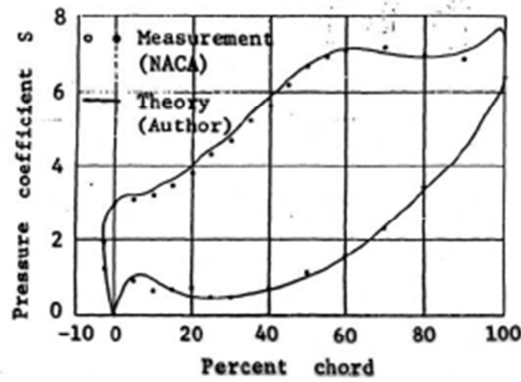


Figure 3.13 Comparison of measured and predicted pressure distribution on a turbine cascade with $\theta = 110^\circ$, $t_{max}/C = 0.15$, $\sigma = 1.8$, $\lambda = 35^\circ 30'$, and $\alpha_1 = 30^\circ$, $S = (1 - C_p)$ (Eq. 3.53). (Copyright © Shirakura, 1972; reprinted with permission of JSME.)

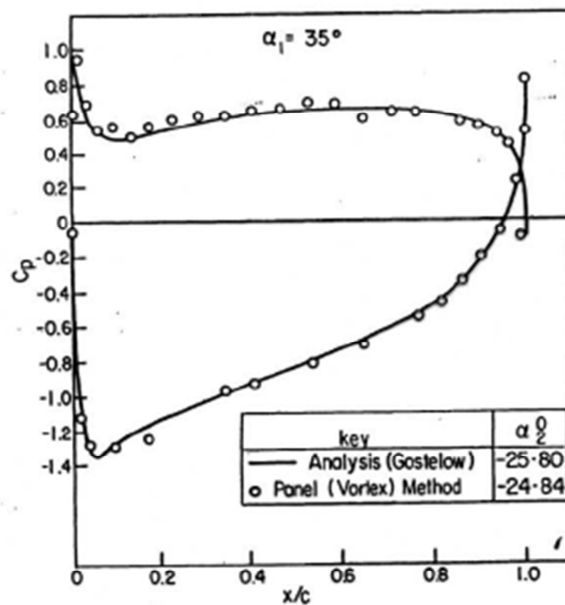


Figure 3.16 Pressure distribution for 70° camber airfoil in cascade 10c4 / 70c50, $S/C = 0.9$. (From Gostelow, 1964, 1965; reprinted with permission of the University of Liverpool.)

È interessante avere delle indicazioni in dettaglio di quanto avviene all'interno della schiera (non solamente nelle sezioni in ingresso ed uscita). Bisogna disporre di diagrammi come quelli sopra che ci danno l'andamento dei coefficienti di pressione lungo il profilo. Possiamo vedere la corrispondenza tra valori numerici e sperimentali.

Indicazioni di questo tipo serve per capire quanto il profilo potrà essere soggetto a fenomeni di distacco di vena, a cavitazione, massimo grado di decelerazione cioè definiamo il *rapporto di diffusione*

$$\frac{V_{max}}{V_2}$$

V_{max} è la velocità massima che si raggiunge sul profilo della pala.

Profili NACA

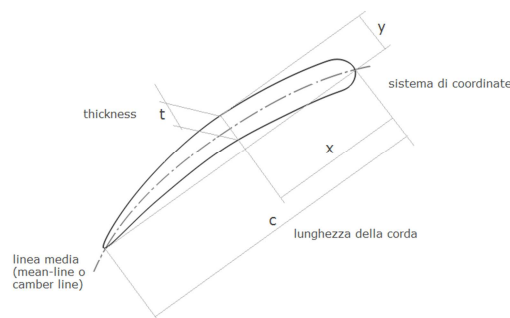
I profili della serie NACA sono stati studiati molto nei laboratori della NASA a partire dal 1950. Sono applicati a moltissime applicazioni (rotori eolici). Il profilo sarà indicato nella seguente maniera

NACA 65(10)14

- “**6**” sta ad indicare una particolare serie di profili (particolare forma).
- “**5**” sta ad indicare la linea media adottata. Questa linea media nei profili NACA è realizzata con rami di parabole che sono stati calcolati in maniera tale da avere certi valori di portanza. Una linea media in cui la seconda cifra è il numero 5 indica che il massimo incurvamento della linea media si ha al 50% della corda.

I NACA 65 sono la tipica famiglia di profili per compressore.

- “**(10)**” indica $c_{L0} \times 10$. c_{L0} è il coefficiente di portanza di un profilo isolato di spessore nullo e quindi coincidente con la linea media stessa. Nel caso particolare in cui $c_{L0} = 1$ viene tabellata per questa serie di profili la forma della linea media. Supponiamo di avere la linea media



Abbiamo un sistema di coordinate x,y rispetto la corda. Per ogni punto possiamo dare i valore della coordinata adimensionale

$$\frac{x}{c} \text{ e } \frac{y}{c}$$

Le tabelle ci daranno la linea media nel caso in cui $c_{L0} = 1$.

Se abbiamo un profilo NACA 65(12) per trovare la linea media di questo profilo dovremmo moltiplicare la coordinata

$$\frac{y}{c} \times 1,2$$

Quindi la cifra tra parentesi divisa per 10 mi dà il fattore moltiplicativo per cui devo moltiplicare la coordinata per avere la forma della linea media sempre partendo dalla tabella che mi dà i valori per $c_{L0} = 1$.

Ci sono dei profili NACA 65(00) che sono simmetrici con linea media che è una retta.

- “**14**” che si riferisce allo spessore del profilo. 14 vuol dire che lo spessore massimo è pari al 14% della corda. Le tabelle danno gli spessori per il caso di riferimento 10 (spessore massimo pari al 10% della corda).

Le tabelle sono completate con informazioni che riguardano il raggio della circonferenza che mi consente di raccordare la parte estrema del profilo.

In maniera analoga esistono diverse famiglie di profili come la “serie C”. In questo caso la linea media non è costituita da archi di parabole ma da archi di cerchi. Sono sempre del tipo “5” cioè con curvatura massima in corrispondenza del 50% della corda.

Profili di questo tipo sono tipici per applicazioni a medio numero di Mach. Profili per alto numero di Mach sfuggono a questa classificazione. Si parla di profili a doppio arco di cerchio (DCA) o multiplo arco di cerchio (MCA).

2.2.1 DISTRIBUZIONE RADIALE DEL FLUSSO

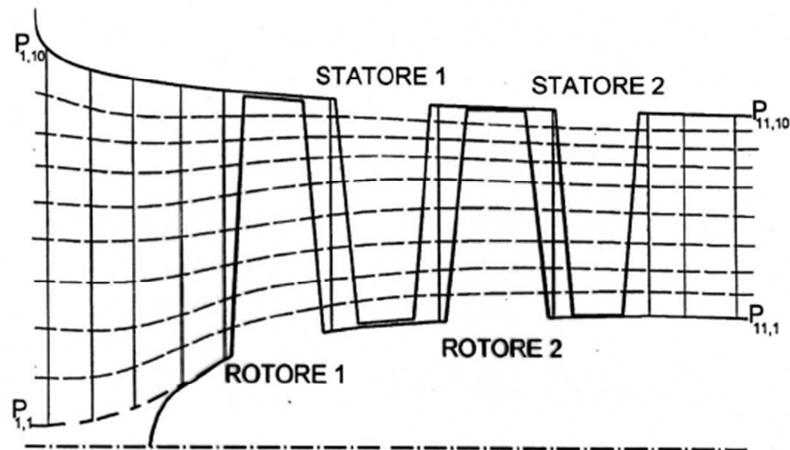
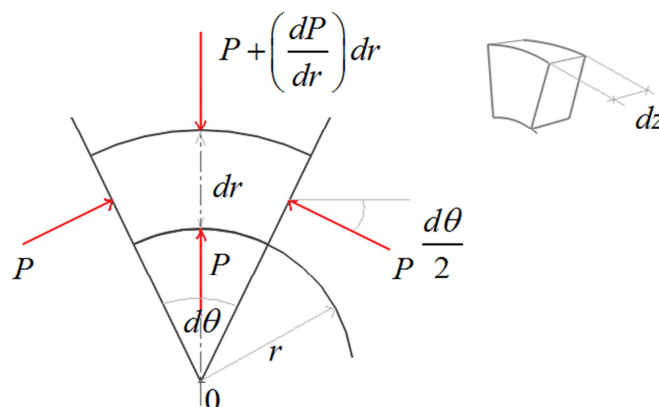


Figura 5.31: Reticolo di calcolo quasi-3D per un compressore assiale bistadio

Stiamo parlando di macchine assiali. Immaginiamo che le linee di corrente siano delle superfici cilindriche. Sezioniamo la macchina lungo superfici cilindriche e sul mantello di queste superfici cilindriche abbiamo studiato l'andamento delle schiere.

Consideriamo delle sezioni ortogonali all'asse e quindi dei sistemi radiali (linee verticali) che si trovano negli spazi tra una schiera palare e l'altra. Supponiamo che lungo queste sezioni il flusso sia perfettamente assial-simmetrica (nella realtà non è proprio così). Su queste superfici i vettori velocità hanno componenti tangenziali ne deriva un moto elicoidale del fluido che genera una forza centrifuga che si esercita da uno strato all'altro. Questa forza centrifuga dovrà essere compensata da un campo di pressione opposta che mantenga in equilibrio il flusso.

Partiamo con la nostra analisi considerando un elementino fluido che si trovi in una di queste sezioni



Vediamo qual'è il valore della forza radiale che si esercita su questo elemento fluido. Allora scriviamo

$$\begin{aligned} & \left(p + \frac{dp}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta dz - pr d\theta dz - 2pd\theta dz \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} = \\ & = r \frac{dp}{dr} dr d\theta dz \end{aligned}$$

Considerando $\operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$ e trascurando i termini di ordine superiore trovati sviluppando il primo termine. Questa rappresenta la risultante delle forze dovuta all'azione delle pressioni. Questa forza radiale viene equilibrata dalla forza centrifuga agente sull'elemento che vale

$$\rho r d\theta dr dz \cdot \frac{V_t^2}{r}$$

Facendo l'equilibrio uguagliando le due espressioni trovo

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V_t^2}{r}}$$

Ricordiamo la definizione dell'entalpia di ristagno

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = h + \frac{1}{2} (V_t^2 + V_a^2)$$

supponendo che il flusso sia cilindrico abbiamo un'ulteriore ipotesi : $V_r = 0$.

Andando a differenziare lungo il raggio

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} = \frac{dh}{dr} + V_t \frac{dV_t}{dr} + V_a \frac{dV_a}{dr}}$$

Ricordiamo ancora che il primo principio della termodinamica ci permette di scrivere

$$Tds = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

Quindi introduciamo la conservazione dell'energia. Differenziando le grandezze in direzione radiale diventa

$$\boxed{T \frac{ds}{dr} = \frac{dh}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}}$$

Combinando le tre equazioni nei riquadri troviamo l'equazione dell'equilibrio radiale.

$$\frac{dh_0}{dr} = T \underbrace{\frac{ds}{dr}}_{\frac{dh}{dr}} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + V_t \frac{dV_t}{dr} + V_a \frac{dV_a}{dr}$$

$$\frac{dh_0}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{V_t^2}{r} + V_t \frac{dV_t}{dr} + V_a \frac{dV_a}{dr}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r)}$$

Questa è l'*Equazione dell'equilibrio radiale*. Compaiono i gradienti radiali dell'entalpia di ristagno, dell'entropia e una combinazione della velocità assiale e tangenziale.

Importanza termini $\frac{dh_0}{dr}$ e $T \frac{ds}{dr}$

Talvolta possiamo trovar scritto

$$V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r) = 0$$

Questo vuol dire che lungo il raggio non c'è variazione di ristagno e variazione di entropia (non contrasta con nessun principio fisico)

$$V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r) = 0 = \frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr}$$

Questo significa imporre in fase di progetto di non avere il gradiente $\frac{dh_0}{dr}$ cioè imporre che il valore di entalpia di ristagno sia uguale lungo una sezione. Questa molto spesso è una precisa scelta di progetto.

Questo ragionamento ci porta al vortice libero.

Posso ritenere che il termine $\frac{dh_0}{dr}$ sia noto perchè o è nullo o impongo una certa legge di variazione.

$\frac{ds}{dr}$ è leggermente più critico perchè significa che l'entropia non varia con il raggio. Non significa che non ci sono dissipazioni di energia ma vuol dire che la dissipazione di energia sia indipendente dal raggio (stesso valore sia in prossimità del mozzo che della periferia). È un'ipotesi più forte perchè sappiamo che le dissipazioni di energia sono più concentrate nelle zone dello strato limite.

Con questa equazione possiamo affrontare due problemi tipici:

- 1) *Problema "diretto" (o problema di verifica)* : nota la geometria di una macchina e la distribuzione radiale dell'angolo α determinare la distribuzione radiale di tutte le grandezze del flusso e termodinamiche;
- 2) *Problema "inverso" (o problema di progetto)* : assegnata una certa distribuzione di una grandezza fluidodinamica o termodinamica trovare qual'è la geometria della schiera che la realizza.

Questi due tipi di problema portano all'utilizzo di vortici diversi.

Vortice Libero

Ricordiamo che abbiamo trovato che per una macchina assiale l'equazione per l'equilibrio radiale è la seguente

$$\frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr} (V_t \cdot r)$$

È di particolare interesse il caso in cui il termine sinistro è nullo. Facciamo dei ragionamenti supponendo che

$$\frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = 0$$

Vediamo il caso in cui vogliamo rispettare questa equazione progettando la macchina secondo il principio del *vortice libero*.

Questo significa che vogliamo fare una macchina che rispetti la seguente condizione

$$\boxed{(V_t \cdot r) = \text{cost}}$$

Cioè che la componente tangenziale della velocità assoluta segua la legge del vortice libero. La costante può essere esplicitata anche nel seguente modo

$$V_t \cdot r = V_{ti} \cdot r_i$$

dove con i si indica un raggio di riferimento.

Se andiamo ad introdurre questa condizione nell'equazione dell'equilibrio radiale nel caso in cui

$$\begin{cases} \frac{dh_0}{dr} = 0 \\ T \frac{ds}{dr} = 0 \end{cases}$$

Ne deriva che per questo tipo di flusso

$$\boxed{V_a = \text{cost}}$$

Questa è una proprietà importante del dimensionamento a vortice libero. La componente assiale della velocità è costante lungo la sezione trasversale cioè in altre parole la portata volumetrica è costante lungo la sezione. Dobbiamo osservare che nel caso di macchine che operino su fluidi incomprimibili questa condizione comporta anche uniformità della portata di massa. Se abbiamo fluidi comprimibili, poichè l'equilibrio radiale ci porta a concludere che lungo la sezione radiale abbiamo un gradiente di pressione, abbiamo una variazione della densità per cui abbiamo la costanza della portata di volume ma una variazione con il raggio della portata di massa.

Se aggiungiamo che se applichiamo l'equazione dell'equilibrio radiale a due sezioni successive a cavallo di un rotore, su entrambe le sezioni potremmo imporre il dimensionamento a vortice libero ma il valore della costante sarà diverso perchè è intervenuto uno scambio di energia con la macchina. Questo significa che saranno diversi anche i gradienti di pressione e quindi anche a parità di raggio avremo una diversa distribuzione di densità. Inevitabilmente questo porta ad avere una componente di velocità radiale piccola

$$c_r \neq 0$$

che contrasta con una delle ipotesi introdotte per fare questo tipo di analisi.

A noi interessa poter calcolare l'andamento delle velocità ma anche l'andamento con il raggio delle grandezze termofluidodinamiche come l'entalpia.

Per quanto riguarda la variazione di entalpia con il raggio ricordiamo che abbiamo assunto

$$h_0 = \text{cost}$$

Quindi

$$\begin{aligned} h + \frac{V^2}{2} &= h_i + \frac{V_i^2}{2} \\ h &= h_i + \frac{V_i^2 - V^2}{2} \\ \frac{h}{h_i} &= 1 + \frac{1}{2h_i} (V_i^2 - V^2 + \cancel{V_a^2} - \cancel{V_a^2}) = \\ &= 1 + \frac{V_i^2}{2h_i} \left(1 - \frac{V^2}{V_i^2} \right) \end{aligned}$$

Ricordando che

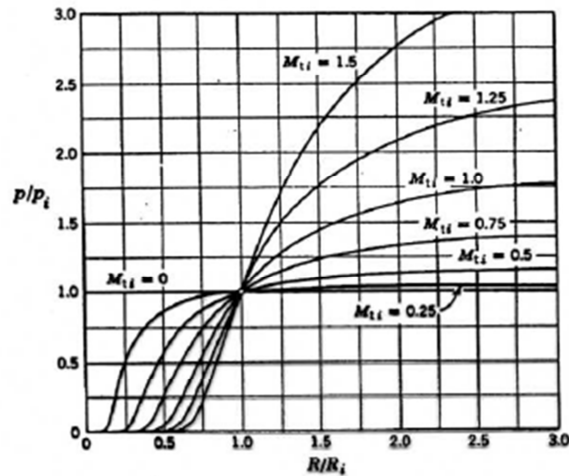
$$V_t \cdot r = V_{ii} \cdot r_i \quad \Rightarrow \quad \frac{V_t}{V_{ii}} = \frac{r_i}{r}$$

Troviamo

$$\boxed{\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_{ii}^2}{2h_i} \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right)}$$

Questa è l'equazione che ci dà la variazione dell'entalpia con il raggio nel dimensionamento a vortice libero.

Nota l'entalpia possiamo poi calcolare le altre grandezze in funzione del raggio. Vediamo il seguente diagramma



a 5.23: Pressione in funzione del raggio per un flusso a vortice libero

Ci fornisce la pressione in funzione del raggio per un flusso a vortice libero. Abbiamo che

$$M_{ii} = \frac{V_{ii}}{a_i}$$

con le grandezze riferite al raggio di riferimento. Possiamo allora fare delle osservazioni:

- $\uparrow r \Rightarrow \uparrow p$
- $\uparrow M_{ii} \Rightarrow \uparrow p \Rightarrow \uparrow$ gradiente forza centrifuga
- Se prendo M_{ii} esiste un valore di r in corrispondenza del quale si raggiunge l'annullamento della pressione (condizione fisica limite). Questo rappresenta il limite che deve essere rispettato progettando a vortice libero. Se andassimo al di sotto di questo r accadrebbero dei fenomeni non descritti dall'equazione.
- Il flusso a vortice libero diventa più assiale all'aumentare di r

È possibile dimensionare la macchina con un flusso con portata di massa costante e quindi con V_a variabile. Allora avremmo componente radiale

$$c_r \neq 0$$

Inoltre anche se

$$\frac{dh_0}{dr} \neq 0$$

Nella sezione diversa questa proprietà non sarebbe rispettata.

Vortice Forzato (Rigido)

L'equazione che lo definisce è

$$\boxed{\frac{V_t}{r} = \text{cost}}$$

Questa non trova applicazione nelle turbomacchine ma viene trattato perchè rappresenta un caso limite.

Abbiamo alcune implicazioni tra cui il fatto che la velocità assiale non è costante ma varia con il raggio per cui

$$\frac{V_t}{r} = \frac{V_{ti}}{r_i} \quad \rightarrow \quad V_t = V_{ti} \frac{r}{r_i}$$

Ricordando che

$$\begin{cases} \frac{dh_0}{dr} = 0 \\ T \frac{ds}{dr} = 0 \end{cases}$$

Abbiamo

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left(\frac{V_a^2}{2} \right) + \frac{V_{ti}}{r_i} \frac{d}{dr} \left(\frac{V_{ti}}{r_i} r^2 \right) = 0}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{V_a^2}{2} \right) = -2 \left(\frac{V_{ti}}{r_i} \right)^2 \cdot r$$

Integrando

$$\left(\frac{V_a^2}{2} \right) = -2V_{ti}^2 \left(\frac{r}{r_i} \right)^2 + C$$

C è la costante di integrazione. Poniamo

$$\begin{aligned} V_a &= V_{ai} \\ r &= r_i \\ \Rightarrow C &= \frac{V_{ai}^2}{2} + V_{ti}^2 \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\frac{V_{ti}}{V_{ai}} = \operatorname{tg} \alpha_i$$

Troviamo

$$\left[\left(\frac{V_a^2}{2} \right) = 1 - 2 \tan^2 \alpha_i \left[\left(\frac{r}{r_i} \right)^2 - 1 \right] \right]$$

La V_a segue questa legge nel caso del *vortice forzato*.

Vediamo come si arriva a $\frac{h}{h_i}$ nel caso del vortice forzata:

$$\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{1}{2h_i} (V_{ti}^2 - V_t^2 + V_a^2 - V_a'^2)$$

Introduciamo l'equazione che caratterizza il nostro vortice, troveremo:

$$\left[\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_{ti}^2}{2h_i} \left[1 - \left(\frac{V_t}{V_{ti}} \right)^2 \right] + \frac{V_{ai}^2}{2h_i} \left[1 - \left(\frac{V_a}{V_{ai}} \right)^2 \right] \right]$$

Ricordando che

$$\frac{V_t}{V_{ti}} = \frac{r}{r_i}$$

Sostituendo e facendo alcune semplificazioni

$$\left[\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_{ti}^2}{2h_i} \left[\left(\frac{r}{r_i} \right)^2 - 1 \right] \right]$$

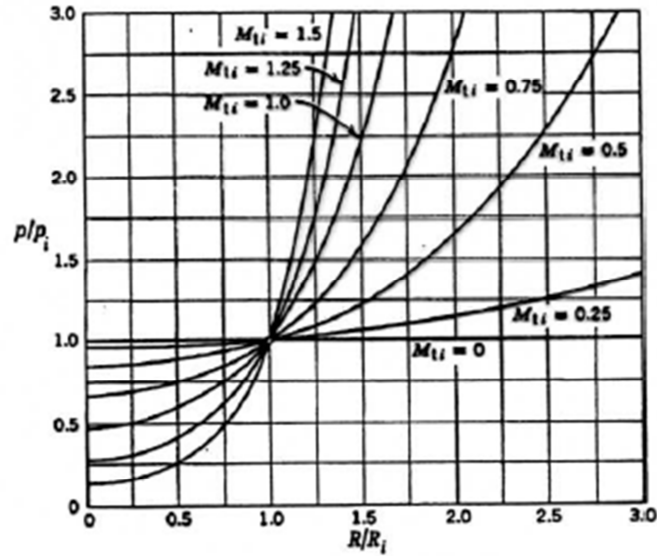


Fig. 5.23: Pressione in funzione del raggio per un flusso a vortice forzato

Non abbiamo il limite fisico per quanto riguarda le pressioni. Tuttavia questo tipo di vortice presenta un limite fisico per quanto riguarda le velocità.

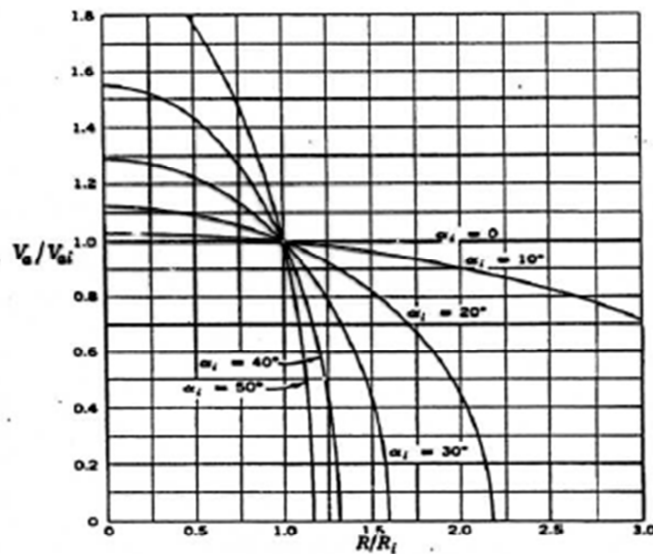


Figura 5.24: Velocità assiale in funzione del raggio per un flusso a vortice forzato

Possiamo osservare che se aumenta r abbiamo un'inversione del flusso per cui abbiamo una condizione sul valore massimo del raggio.

Se impongo

$$\frac{dh_0}{dr} = 0$$

è possibile che questa si mantenga su una sezione successiva?

Consideriamo la sezione 1 a monte del rotore

$$\begin{aligned} h_{01} &= \text{cost} \\ V_{t1} &= K_1 \cdot r \end{aligned}$$

ed imponiamo il vortice forzato

$$\frac{V_t}{r} = K$$

Potremmo applicare tutte le equazioni trovate. Consideriamo la sezione 2 a valle del rotore

$$V_{t2} = K_2 \cdot r$$

Il lavoro scambiato sarà

$$\begin{aligned} h_{02} - h_{01} &= u(V_{t2} - V_{t1}) = \omega r (K_2 r - K_1 r) = \\ &= \omega (K_2 - K_1) r^2 = \Delta h_{012} \end{aligned}$$

Se abbiamo

$$\Delta h \propto r^2$$

Allora la variazione di entalpia non sarà uniforme e quindi

$$h_{02} \neq \text{cost}$$

Avremo

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta h_{012}}{dr} &= \frac{d(h_{02} - h_{01})}{dr} = \frac{dh_{02}}{dr} = V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t r) = \\ &= 2\omega (K_2 - K_1) r = \frac{d}{dr} \left(\frac{V_{a2}^2}{2} \right) + K_2 \frac{d}{dr} (K_2 r^2) \end{aligned}$$

Questa rappresenta l'equazione dell'equilibrio radiale nel caso considerato.

$$V_{a2}^2 = -2 \left[K_2^2 - \omega (K_2 - K_1) \right] r^2 + C$$

Imponendo la conservazione della massa possiamo trovare la costante di integrazione

$$\frac{\dot{m}}{2\pi\rho} = \int_{rh}^{rs} V_{a1} r dr = \int_{rh}^{rs} V_{a2} r dr$$

h: hub (mozzo)

s: skroud (raggio massimo)

nel caso del problema diretto avremo l'angolo di flusso costante

$$\frac{V_r}{V_a} = \tan \alpha = \text{cost}$$

Vortice "generico"

Possiamo definire diversi tipi di vortici chiamati vortici generici. Consideriamo una sezione a monte di un rotore e scriviamo

$$V_{t1} = a \cdot r^n - \frac{b}{r}$$

$a, b =$ sono due costanti

Mentre a valle del rotore

$$V_{t2} = a \cdot r^n + \frac{b}{r}$$

Il lavoro che viene realizzato nel rotore in base a questo tipo di vortice sarà

$$L_u = h_{02} - h_{01} = u(V_{t2} - V_{t1}) = 2 \cdot b \cdot \omega$$

Con questo tipo di definizione di vortice si conserva la proprietà di avere lavoro costante indipendente dal raggio. Definiamo due leggi generali di distribuzione a monte e a valle del rotore tali per cui anche se non sono delle distribuzioni a vortici libero si mantiene una delle proprietà fondamentali del vortice libero (cioè avere lavoro costante).

I casi che possiamo segnalare sono:

- $n = 0$ “zero power blanding”
- $n = 1$ “fast power blanding”

$n = 1$ “Palettatura a grado di reazione costante” (? Non è del tutto vero)

Se applichiamo il vortice libero o il vortice forzato e troviamo l'andamento delle velocità con il raggio e calcoliamo qual'è il valore medio del grado di reazione corrispondente ai diversi valori del raggio troveremo che sono tutte palettature a grado di reazione variabile con il raggio. Può essere interessante costruire una palettatura che abbia grado di reazione costante ed una soluzione che si avvicina a questo è il caso in cui $n = 1$.

In questo caso avremo

$$V_{t1} = a \cdot r - \frac{b}{r}$$

$$V_{t2} = a \cdot r + \frac{b}{r}$$

Il grado di reazione può essere definito in funzione delle velocità assolute

$$R = 1 - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2L_u} = 1 - \frac{V_{t2}^2 + V_{a2}^2 - V_{t1}^2 - V_{a1}^2}{2L_u}$$

Se le velocità assiali fossere uguali (condizione rispettata nel vortice libero)

$$V_{a2} = V_{a1}$$

$$R = 1 - \frac{\cancel{(V_{t2} - V_{t1})} (V_{t2} + V_{t1})}{2u \cancel{(V_{t2} - V_{t1})}} = 1 - \frac{(V_{t2} + V_{t1})}{2u} = 1 - \frac{a}{\omega} = \text{cost}$$

L'ultimo passaggio è ottenuto andando a sostituire

$$V_{t1} = a \cdot r - \frac{b}{r}$$

$$V_{t2} = a \cdot r + \frac{b}{r}$$

In realtà questa trattazione è approssimata perchè la condizione $V_{a2} = V_{a1}$ non è rispettata esattamente con questo tipo di vortice. Tuttavia riusciamo a

realizzare una palettatura in cui la variazione del grado di reazione con la palettatura è modesta.

Problema "diretto": angolo di flusso costante

La condizione di angolo di flusso costante la possiamo scrivere come

$$\frac{V_t}{V_a} = \tan \alpha = \text{cost}$$

Si tratta di un problema diretto cioè assegnato un certo valore degli angoli trovare qual'è l'andamento delle grandezze del flusso. Questo caso è molto interessante perchè è molto comune. Avere delle palettature ad angolo di flusso costante vuol dire avere delle palettature non svergolate. Lo svergolamento viene realizzato perchè in ogni sezione bisogna realizzare delle determinate condizioni per avere dei determinati vortici. Pale di questo tipo hanno dei costi non trascurabili mentre è più semplice realizzare pale che non presentano svergolature. Chiaramente si realizzerà un tipo di vortice particolare. Si possono realizzare pale di questo tipo quando il rapporto tra i diametri si avvicina all'unità cioè quando lo sviluppo radiale della pala rispetto le dimensioni della macchina è piccolo.

Assegnato il valore dell'angolo, in un problema diretto bisogna chiedersi quale sarà l'andamento delle velocità con il raggio. Si può dimostrare che con questo tipo di vortice le distribuzioni delle velocità sono le seguenti:

$$\frac{V}{V_i} = \frac{V_a}{V_{ai}} = \frac{V_t}{V_{ti}} = \left(\frac{r_i}{r} \right)^{\text{sen}^2 \alpha}$$

Siamo sempre in condizioni

$$\begin{cases} \frac{dh_0}{dr} = 0 \\ T \frac{ds}{dr} = 0 \end{cases}$$

L'equazione di equilibrio radiale può essere scritta come

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{V_a^2}{2} \right) + \frac{V_t}{r} \frac{d(rV_t)}{dr} = 0$$

Ricordando il triangolo delle velocità

$$V_a = V \cos \alpha$$

$$V_t = V \sin \alpha$$

Introducendo nell'equazione l'ipotesi dell'angolo di flusso costante otteniamo

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{V^2 \cos^2 \alpha}{2} \right) + \frac{V \sin \alpha}{r} \frac{d(r V \sin \alpha)}{dr} = 0$$

Si arriva a

$$\boxed{\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \sin^2 \alpha = 0}$$

È l'equazione che dobbiamo integrare. Questa è un'equazione differenziale analoga a

$$y' + \varphi(x)y + \psi(x) = 0$$

il cui integrale generale è

$$y = e^{-\int \varphi(x) dx} \left[C - \int \psi(x) e^{\int \varphi(x) dx} dx \right]$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\varphi(x) = 0$$

Quindi integrando la nostra equazione di partenza otteniamo

$$V = e^{-\int \frac{\sin^2 \alpha}{r} dr} \cdot C = r^{-\sin^2 \alpha} \cdot C$$

Per quanto riguarda il valore della costante di integrazione, imponendo che

$$V = V_i \quad \text{se} \quad r = r_i \quad \rightarrow \quad C = \frac{V_i}{r_i^{-\sin^2 \alpha}}$$

Anche in questo caso si può vedere la variazione dell'entalpia con il raggio ottenendo

$$\boxed{\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_i^2}{2h_i \sin^2 \alpha} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^{2 \sin^2 \alpha} \right]}$$

Vediamo l'andamento delle grandezze termodinamiche

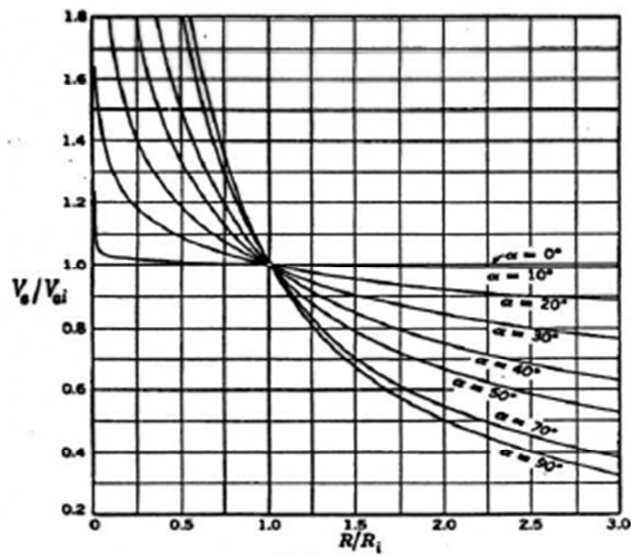


Figura 5.26: *Velocità assiale in funzione del raggio per un flusso ad angolo costante.*

A differenza dei casi analizzati in precedenza per questo tipo di distribuzione non esistono limiti teorici sui valori minimi e massimi del raggio. È un caso intermedio tra il vortice libero e quello forzato.

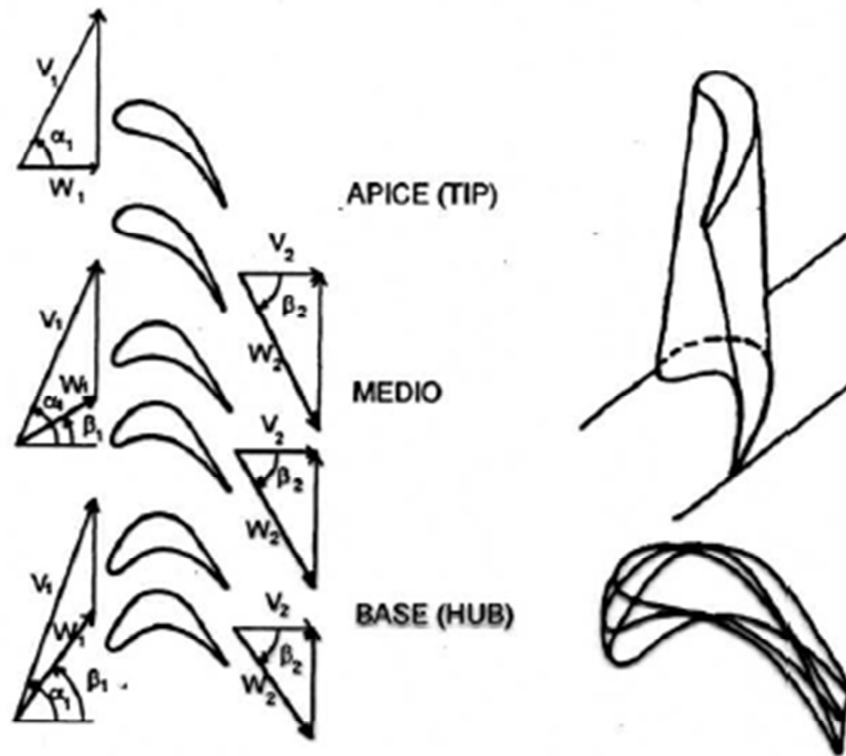


Figura 5.27: *Profili e triangoli delle velocità per il rotore di uno stadio di bassa pressione di turbina a vapore o a gas ($r_{Tip}/r_{Hub} = 1.4$).*

A sinistra abbiamo i triangoli di velocità relativi a diversi valori del raggio. Se osserviamo l'andamento della V_r vediamo che questo stadio rispetta la legge del vortice libero. V_r diminuisce all'aumentare del raggio rispettando la legge del vortice libero. La componente assiale della velocità (altezza dei triangoli) è costante. In uscita questo stadio è stato realizzato per ottenere velocità assoluta del flusso assiale. Ne deriva una forma della pala fortemente svergolata. Al mozzo della pala abbiamo un profilo fortemente incurvato. Sulla base di queste velocità possiamo calcolare il grado di reazione. Il profilo in prossimità del mozzo ha un grado di reazione molto vicino a 0 (stadio ad azione) ed abbiamo la tipica forma delle pale delle turbine De Laval (profilo simmetrico). Mano a mano che aumentiamo il raggio aumenta il grado di reazione e all'apice della pala abbiamo grado di reazione pari a circa 0,5.

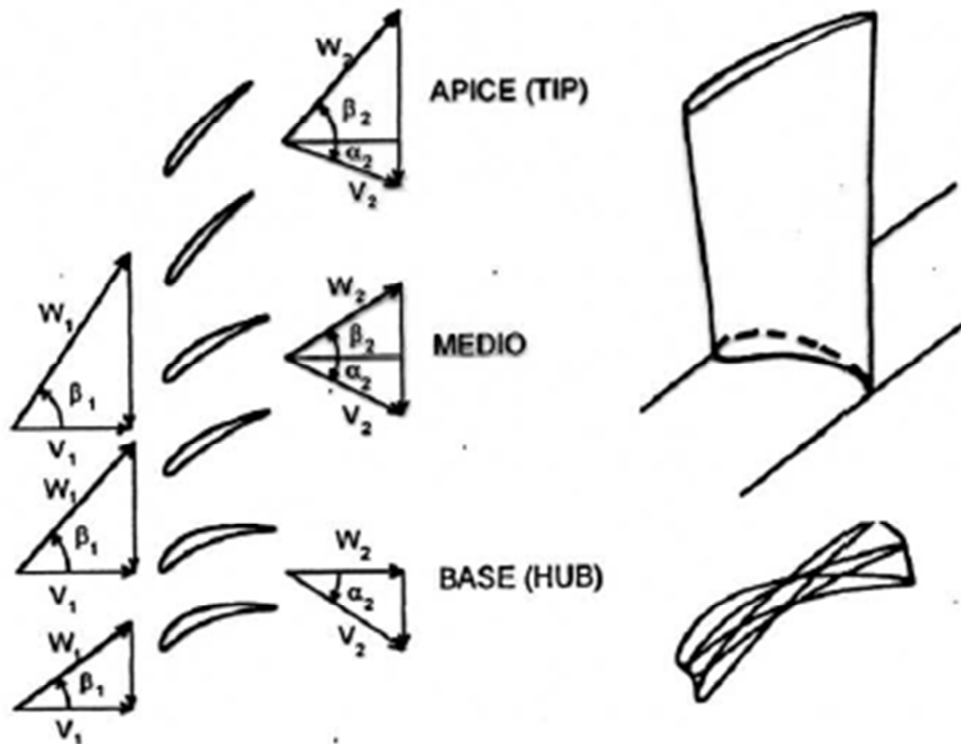


Figura 5.28: *Profili e triangoli delle velocità per un rotore di turbofan a vortice libero ($\tau_{Tip}/\tau_{Hub} = 2$).*

Turbofan è un tipo particolare di motore per propulsione aerea. Abbiamo una turbina a gas nella quale il primo stadio del compressore è costituito dalla porzione più vicina al mozzo della prima palettatura in ingresso (fan). La porzione vicina al mozzo funge da compressore mentre la porzione più esterna è il fan. Abbiamo una palettatura per compressore quindi sarà un profilo poco incurvato. Abbiamo una velocità assoluta in ingresso assiale. Infatti se questo è il primo stadio di una macchina non c'è motivo perché la corrente entrante abbia una componente tangenziale. Poi il flusso in uscita rispetta la legge del vortice libero. Il grado di reazione varia e vale 0,5 al mozzo e 0,8 all'apice della pala.

Queste sono pale svergolate. Ricordiamo che si possono realizzare pale non svergolate (angolo di flusso costante) quando i rapporti tra altezza della pala e raggio medio è dell'ordine di 1/10. Il vortice libero è la tipologia più diffusa. Tuttavia se vogliamo una pala a grado di reazione costante useremo la trattazione per vortice generico. Oppure potrebbero associarsi a considerazioni di carattere fluidodinamico delle considerazioni di tipo strutturale relative al fatto di voler concentrare le sollecitazioni maggiori al mozzo anziché la periferia.

2.1.3 ALTRE PARTICOLARITA' DEL FLUSSO

La portata in un condotto anulare

Parlando di equilibrio radiale ci siamo essenzialmente occupati del lavoro. La portata di massa sarà esprimibile come

$$\dot{m} = 2\pi \int_{rh}^{rs} \rho V_a r \cdot dr$$

V_a avrà la distribuzione che dipenderà dal tipo di vortice. Esiste un valore limite di portata che può defluire attraverso la sezione in cui si raggiungono le condizioni critiche analoghe a quelle studiate per l'ugello. Si tratta di trovare le condizioni che portano al blocco sonico nelle sezioni anulari nelle quali andiamo ad applicare l'equazione dell'equilibrio radiale. L'analisi può essere effettuata con gli strumenti usati per l'analisi dell'ugello.

Consideriamo linee di flusso sufficientemente vicine tra di loro da poter considerare la velocità assiale costante. Possiamo allora scrivere

$$\dot{m} = S \rho V_a$$

Non serve più l'integrale. Il problema potrebbe sembrare analogo a quello dell'ugello ma la differenza è che consideriamo l'ugello monodimensionale cioè consideriamo che la velocità abbia una sola componente. Questo sarebbe come se nella sezione che consideriamo V_a fosse tutta la velocità ma invece abbiamo anche una componente di velocità tangenziale. La precedente può essere scritta come

$$\dot{m} = S \rho V_a = S \rho_0 a_0 \Phi = \text{cost} \cdot \Phi$$

$$\Phi = \frac{\rho V_a}{\rho_0 a_0}$$

Con il pedice 0 indichiamo le condizioni di ristagno. Allora studiare l'andamento di \dot{m} corrisponde a studiare l'andamento della funzione Φ . Consideriamo separatamente i due rapporti.

$$\frac{\rho}{\rho_0}$$

Facciamo l'ipotesi che fluido che consideriamo sia un gas perfetto per cui vale

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

Supponiamo che il flusso sia isoentropico

$$p\rho^{-k} = \text{cost}$$

Allora dalla combinazione di queste due relazioni possiamo trovare che

$$T\rho^{1-k} = \text{cost}$$

Possiamo allora scrivere che

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Ricordando che

$$\begin{cases} a = \sqrt{kRT} \\ a_0 = \sqrt{kRT_0} \end{cases}$$

Possiamo sostituire ed ottenere

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2}{k-1}}$$

$$\frac{V_a}{a_0}$$

Per sviluppare questo rapporto ricordiamo il legame che esiste tra velocità ed entalpia

$$V^2 = 2(h_0 - h) = 2c_p(T_0 - T) = 2\frac{c_p}{kR}(a_0^2 - a^2)$$

Quindi possiamo mettere in evidenza

$$\frac{V^2}{a_0^2} = \frac{2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 \right] = \frac{V_a^2 + V_t^2}{a_0^2}$$

Quindi

$$\frac{V}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 \right] - \left(\frac{V_t}{a_0} \right)^2}$$

Questa è l'espressione che possiamo sostituire in Φ . Abbiamo ottenuto un'espressione di Φ che risulta essere funzione di

$$\Phi = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V_a}{a_0} = f\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

Possiamo trovare il massimo di questa funzione che corrisponde alla condizione del massimo della portata

$$\frac{d\Phi}{d\left(\frac{a}{a_0}\right)} = 0$$

Questa condizione si verifica quando il rapporto a/a_0 assume il valore critico

$$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1} - \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{V_t}{a_0} \right)^2}$$

Se immaginiamo che $V_t = 0$ troviamo il rapporto a/a_0 che avremmo ottenuto per il nostro ugello. Il risultato è diverso proprio perchè in questo caso abbiamo la componente tangenziale.

A questa condizione critica corrisponde anche ad un numero di Mach assiale critico

$$Ma^* = \left(\frac{V_a}{a} \right)^* = 1$$

Nelle condizioni che stiamo considerando la condizione di ingolfamento e quindi di blocco di portata la si ottiene quando V_a è sonica (e non quando V è sonica). Questo vuol dire che possiamo avere flussi supersonici senza blocco di portata perchè possiamo avere V supersonico però la componente assiale è subsonica e quindi non si realizza il blocco di portata.

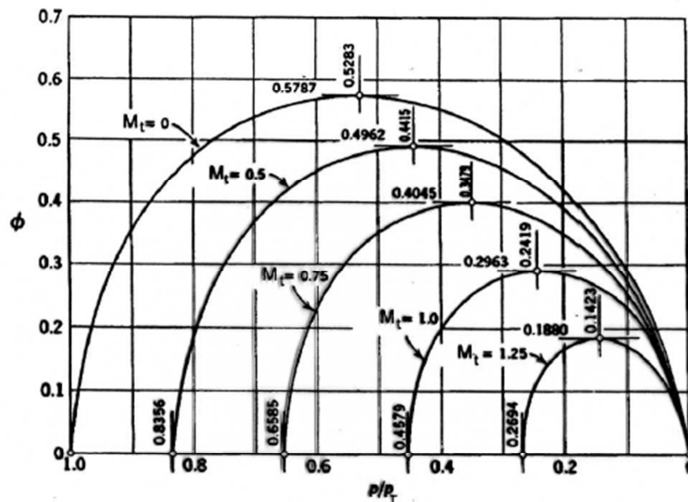


Figura 5.29: Portata adimensionale in un flusso elicoidale monodimensionale, in funzione della pressione per diverse componenti tangenziali.

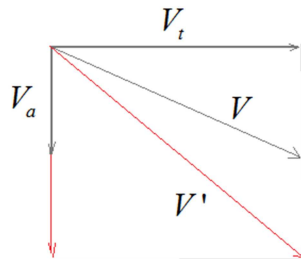
Questo diagramma ci mostra graficamente l'andamento delle equazioni appena viste. Se seguiamo la linea di corrente elicoidale abbiamo la condizione di monodimensionalità ma in realtà sarebbe più giusto dire assial-simmetrico. Abbiamo

$$\frac{p}{P_T} = \frac{p}{P_0}$$

Con la T indichiamo le condizioni di ristagno (prima indicate con lo 0). Abbiamo diverse curve corrispondenti a diversi numeri di Mach tangenziali. Nel caso di $M_t = 0$ abbiamo la sola componente di velocità assiale e quindi il flusso non è più elicoidale e quindi abbiamo i valori tipici dell'ugello. Sappiamo che queste curve hanno senso fisico solo a partire da sinistra e fino al massimo. Poi sappiamo che la portata rimane bloccata.

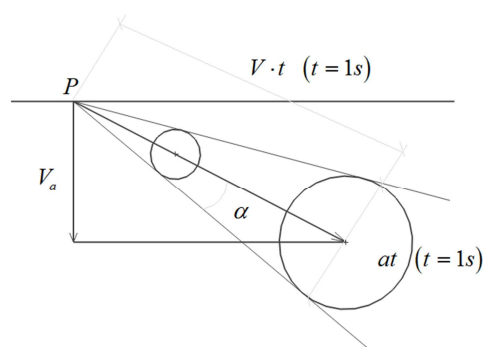
All'aumentare del numero di Mach tangenziale il valore di Φ cambia e quello che si ottiene è che il valore della portata massima (portata di ingolfamento) si ottiene per valori del rapporto delle pressioni sempre più basso. Il massimo della curva si sposta.

Possiamo chiederci quanto spesso può verificarsi la condizione di ingolfamento della macchina. Può verificarsi ma tipicamente l'ingolfamento avverrà prima del raggiungimento di queste condizioni nei canali interpalari. Cioè l'ingolfamento avviene prima all'interno della pala. Cambia che nelle sezioni interpalari la direzione del flusso non ha un valore preconstituito. Cioè supponiamo di partire da questa condizione (in grigio).



Se diminuisco la pressione a valle posso ottenere un aumento della componente di velocità assiale che può coesistere con un mantenimento dello stesso valore della componente tangenziale se vado a cambiare la direzione del flusso. In un canale palettato questo non è possibile perchè la direzione è imposta dalla geometria della pala. Quindi all'interno del canale palare avrò le condizioni di ingolfamento determinate dal raggiungimento della condizione sonica della velocità assoluta (statore) o relativa (rotore) in direzione parallela alla pala. Nel canale anulare invece questo vincolo sull'inclinazione del vettore velocità non c'è (perchè non ho superfici di guida) e quindi raggiungo le condizioni soniche per valori del rapporto di pressione che sono diversi da quelli che ho all'interno della pala.

Possiamo dare una rappresentazione grafica di questi fenomeni. Cerchiamo di capire cosa vuol dire che quando il flusso è subsonico l'informazione può propagarsi anche a monte



Questo è il caso in cui $M_a > 1$ (numero di Mach assiale). Abbiamo la direzione tangenziale per cui quella ortogonale sarà la direzione assiale. Consideriamo un punto P nel condotto anulare (siamo all'esterno della pala) ed in questo punto avremo il vettore velocità con le sue componenti. Il vettore velocità lo possiamo anche interpretare in termini di distanza dicendo che è pari a

$$V \cdot t$$

t è il tempo assunto pari a 1 secondo. Rappresenta lo spazio percorso alla velocità V in 1 secondo.

Supponiamo che nel punto P si produca una piccola perturbazione che si propaga nel mezzo per la velocità del suono. Una perturbazione che ha origine in P si propaga in tutte le direzioni con la velocità del suono però sarà anche trascinata nella direzione del flusso. Quindi l'effetto risultante è che in ogni punto avremo una circonferenza che si allarga e dopo 1 secondo il punto P sarà trascinato dalla corrente e la perturbazione si è propagata con la velocità del suono ed avrà raggiunto le dimensioni di una circonferenza di raggio $a \cdot t$. Si definisce il *cono di Mach*. Essendo

$$V \sin \alpha = a$$

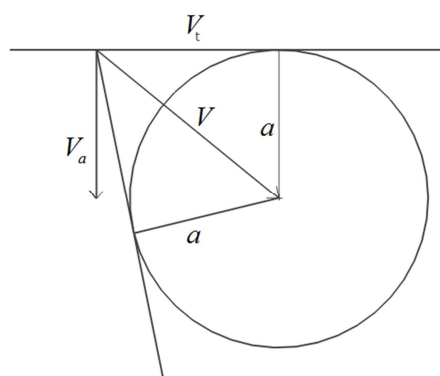
$$\rightarrow \alpha = \arcsen \frac{a}{V} = \arcsen \left(\frac{1}{M} \right)$$

Il caso rappresentato è quello di corrente supersonica in cui anche la componente di velocità assiale è supersonica in quanto dopo un secondo

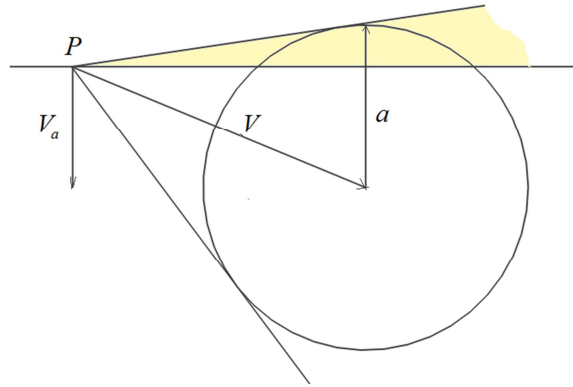
$$V_a \cdot 1 > a \cdot 1$$

Si vede che la perturbazione si allarga seguendo l'allargamento del cono di Mach ma le generatrici di questo cono si trovano sempre a valle della sezione trasversale in corrispondenza alla quale si era prodotta la perturbazione. Queste generatrici sono sempre a valle della linea di riferimento della direzione tangenziale.

La condizione limite è la seguente



Questo è il caso in cui $M_a = 1$. Dopo un istante di tempo abbiamo che $V_a = a$. La generatrice superiore del cono è parallela alla direzione tangenziale. La perturbazione, anche in questo caso, non riesce a risalire a monte e si sviluppa lungo la direzione tangenziale.



Il terzo caso è quello per cui $M_a < 1$. In questo caso $V_a < a$. V potrebbe essere anche supersonico ($M > 1$). Le generatrici del cono supera il limite della direzione tangenziale andando verso monte. Quindi l'informazione generata in P risale.

Soluzione quasi 3D

Torniamo alla figura

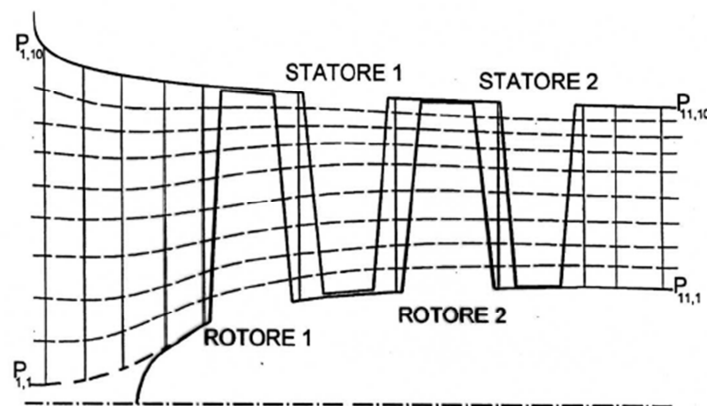


Figura 5.31: Reticolo di calcolo quasi-3D per un compressore assiale bistadio

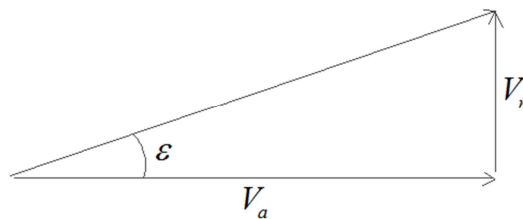
Chiediamoci cosa succede quando abbiamo delle linee di corrente tendenzialmente assiali ma non esattamente assiali. In questi casi abbiamo la componente di velocità radiale. Dal punto di vista dell'equazione dell'equilibrio radiale a questa si aggiunge un termine relativo alla componente di velocità radiale

$$\frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = V_a \frac{dV_a}{dr} - \boxed{V_a \frac{dV_r}{dz}} + \frac{V_t}{r} \frac{d}{dr}(V_t \cdot r)$$

Abbiamo il termine nuovo ed entra in gioco la variazione della componente radiale lungo la direzione z (direzione dell'asse).

La differenza rispetto al caso precedente è che non è più possibile ottenere delle semplici soluzioni analitiche con le quali studiare i flussi. Quindi si passa dalla soluzione analitica alla soluzione numerica. Questo passaggio costituisce quello che nell'insieme viene chiamato soluzione quasi 3D del flusso.

Dal punto di vista numerico si definiscono delle sezioni in corrispondenza alle quali dobbiamo risolvere le equazioni (linee verticali indicate nella figura). Possiamo introdurre in prima approssimazione un andamento delle linee di corrente. In ogni punto è possibile calcolarsi il valore della velocità assiale, radiale



ε è l'angolo di inclinazione della linea di corrente. Questo tipo di informazioni consentono di conoscere l'andamento delle linee. Poi posso calcolare nelle sezioni a cavallo del rotore qual'è l'incremento del lavoro ottenuto ed a cavallo di tutte le sezioni qual'è l'andamento delle dissipazioni di energia. Trovo una distribuzione di queste grandezze e verifico che siano soddisfatte le equazioni di conservazione. Questo in prima battuta non sarà soddisfatto e quindi vado a modificare l'andamento delle linee di corrente e con un procedimento iterativo trovo la soluzione.

Con quest'analisi è stata trascurata la differenza tra la realtà e la soluzione approssimata cioè possiamo definire i *flussi secondari*.

Flussi secondari

Questi flussi si manifestano sotto forma di tutta una serie di famiglie di vortici. Delle strutture vorticosi che posso immaginare sovrapposte al flusso che ho calcolato con l'approccio bidimensionale o quasi 3D. Questi vortici possono essere classificati in grandi famiglie distinguendoli sulla base del meccanismo che li origina. Vedremo :

- Vortici di passaggio
- Vortici a ferro di cavallo
- Vortici al bordo di uscita
- Vortici di passaggio e di trafilamento

Vortici di passaggio

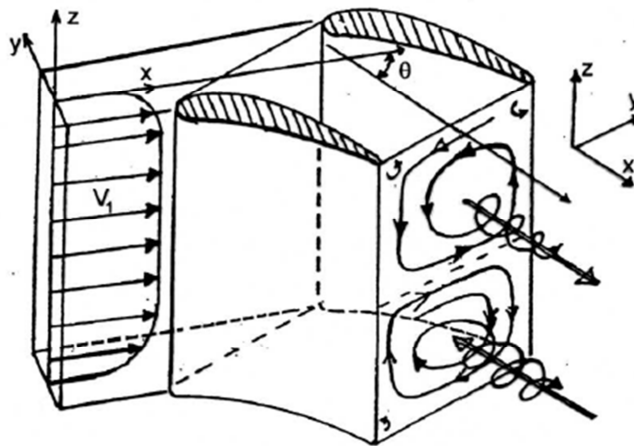


Figura 5.32: *Descrizione del vortice di passaggio generato da un flusso in ingresso disuniforme lungo l'altezza delle pale*

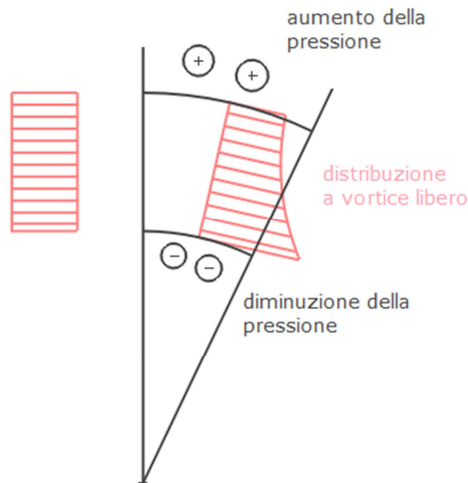
Abbiamo supposto che in una situazione in cui abbiamo due pale ed una distribuzione del vettore velocità non consideriamo che in corrispondenza del mozzo e della periferia ci sarà lo strato limite. Lo strato limite è causa di dissipazione di energia però modifica anche il flusso e genera questi vortici. Se la distribuzione del flusso fosse uniforme questi vortici non ci sarebbero.

Questi vortici non stravolgono tutto però hanno una loro influenza e portano ad una certa percentuale di errore nelle simulazioni. Possiamo tenerne conto con delle correlazioni che tengono conto delle dissipazioni di energia connesse ai fenomeni viscosi.

Vediamo il meccanismo di formazione dei vortici considerando una sezione di mezzeria cioè immaginiamo di sezionare con un piano che si trova a metà

dell'altezza della pala (a metà tra i due vortici di destra) ed osserviamo dall'alto.

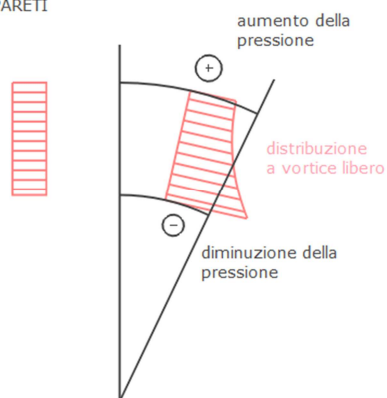
SEZIONE DI MEZZERIA



Posso supporre che in questa sezione la velocità che approssima la nostra pala sia uniforme. All'interno del canale palare trovo una distribuzione delle velocità che non sarà più uniforme perchè seguirà la legge del vortice libero. Allora in corrispondenza della superficie bassa la velocità sarà più grande e quindi la pressione sarà più bassa (metto 2 meno). Visto che considero una sezione di mezzeria nella quale le velocità sono elevate avremo in proporzione una diminuzione ed un aumento della pressione elevati.

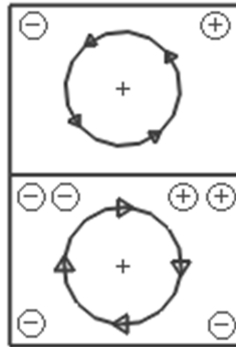
Se considero una sezione vicino alle pareti

SEZIONE VICINA ALLE PARETI



Mi trovo in corrispondenza dello strato limite per cui avrò delle velocità che posso ritenere uniformi ma più piccole rispetto il caso precedente. Avendo un campo di velocità più piccolo posso dire che anche gli aumenti e le diminuzioni di pressioni saranno minori rispetto al caso precedente.

Considerando la sezione di uscita posso riportare i piani dove si verificano le due situazioni precedenti. Avrò una certa distribuzione di pressione ed in particolare avrò una disuniformità di pressione che mi porta a creare dei vortici:



Vortici a ferro di cavallo

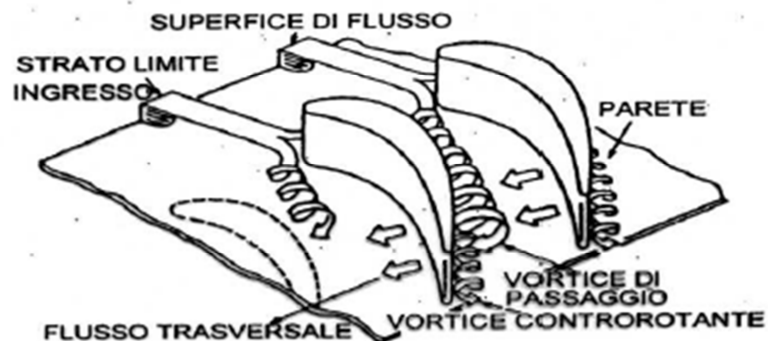


Figura 5.35: *Formazione ed evoluzione dei vortici a ferro di cavallo ed interazione col vortice di passaggio.*

I vortici reagiscono tutti tra di loro. Lo strato limite, quando va ad impattare la pala, viene diviso in due flussi. L'impatto dello strato limite con la pala dà luogo a questi vortici che poi si propagano all'interno del canale palare.

Questi vortici poi vanno ad interagire con i vortici di passaggio dando luogo a strutture vorticosi ancora più complesse.

Vortici secondari a valle del bordo d'uscita

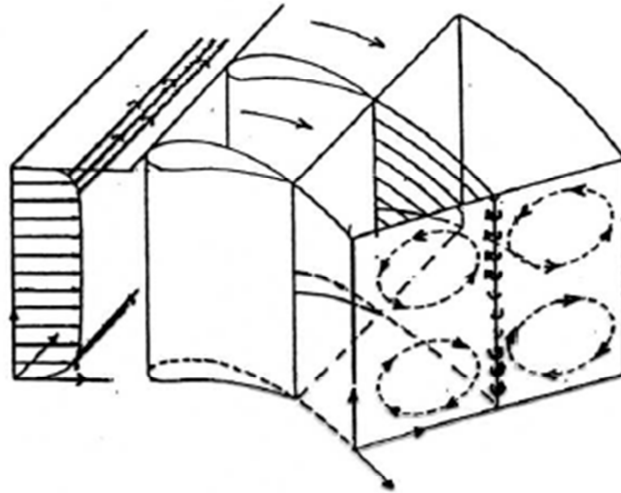
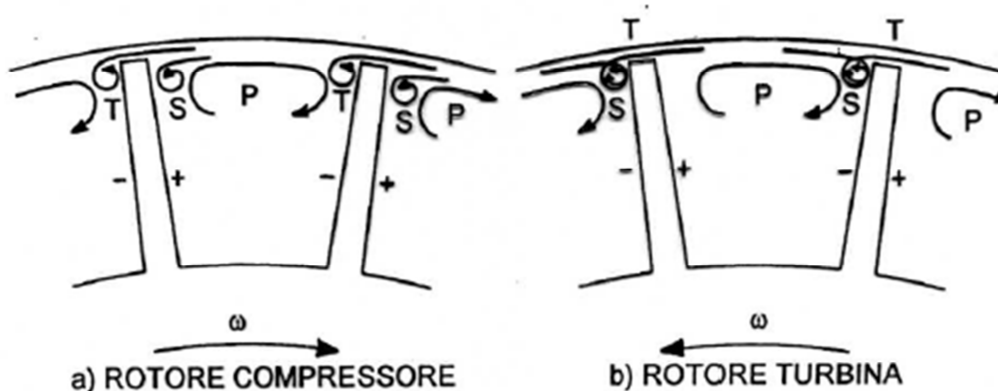


Figura 5.38: *Sia di vortici secondari a valle del bordo di uscita delle pale (vortex sheet)*

In corrispondenza al bordo d'uscita della pala abbiamo il ricongiungimento di due flussi che hanno caratteristiche diverse in termini di velocità e pressioni. Si crea una superficie di interazione tra questi due flussi che danno luogo alla formazione di vortici di piccola scala.

Vortici di passaggio e di trafilamento



Abbiamo un gioco tra parte mobile e fissa. Il moto relativo delle due parti porta ad un flusso attraverso questo gioco che penalizza il rendimento volumetrico della macchina e fa sì che del flusso tenda a passare dall'alta alla bassa pressione. Così si formano dei vortici che saranno diversi per compressori e turbine perchè cambiano i versi di rotazione.