Cenni sulla logica formale (29/02/2016)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

Scaletta

- delimitazione della materia
- tappe storiche fondamentali
- distinzione fra calcolo e teorie
  - ⋆ calcolo proposizionale a 2 valori di verità
  - ⋆ calcolo delle relazioni diadiche
  - ⋆ calcolo predicativo del 1.o ordine
  - ⋆ teoria degli insiemi
- primo caso di studio: le logiche booleane

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Perfino i corvi gracchiano sui tetti quali implicazioni siano corrette.

(Callimaco, III sec. a.C.)

Perfino i corvi gracchiano sui tetti quali implicazioni siano corrette.

(Callimaco, III sec. a.C.)

Il nostro soggetto è la *logica* —o, come possiamo dire piú per esteso, per distinguerla da certi argomenti e dottrine che (disgraziatamente) sono stati chiamati con lo stesso nome, è la *logica formale*.

(Alonzo Church, 1956)

Perfino i corvi gracchiano sui tetti quali implicazioni siano corrette.

(Callimaco, III sec. a.C.)

Il nostro soggetto è la *logica* —o, come possiamo dire piú per esteso, per distinguerla da certi argomenti e dottrine che (disgraziatamente) sono stati chiamati con lo stesso nome, è la *logica formale*.
Tradizionalmente, la logica (formale) si occupa dell'analisi di enunciati o di proposizioni e di dimostrazione con attenzione alla *forma* in astrazione dalla *materia*.

(Alonzo Church, 1956)

La questione di cui si occupa la logica, potremmo dire, è quella dell'adeguatezza, o valore probativo, di varie specie di evidenza. Tradizionalmente, però, essa si è dedicata soprattutto allo studio di ciò che costituisce dimostrazione, ossia evidenza completa e conclusiva. [· · ·] l'inferenza deduttiva, e quindi l'implicazione che dovrebbe esserle di fondamento, entra in ogni determinazione del peso dell'evidenza.

(M. R. Cohen ed E. Nagel, 1934)

La questione di cui si occupa la logica, potremmo dire, è quella dell'adeguatezza, o valore probativo, di varie specie di evidenza. Tradizionalmente, però, essa si è dedicata soprattutto allo studio di ciò che costituisce dimostrazione, ossia evidenza completa e conclusiva. [· · ·] l'inferenza deduttiva, e quindi l'implicazione che dovrebbe esserle di fondamento, entra in ogni determinazione del peso dell'evidenza.

Si può considerare compito proprio della logica quello di scartare ciò che è assolutamente impossibile, determinando cosí il campo di tutto ciò che, in assenza di conoscenza empirica, è astrattamente possibile.

(M. R. Cohen ed E. Nagel, 1934)

Una citazione tratta da Wikipedia

$\cdots$ no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognise $\cdots$ those universal laws of thought which are the basis of all reasoning $\cdots$

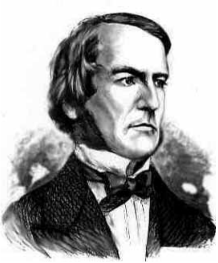
(George Boole)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Una citazione tratta da Wikipedia

··· no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognise ··· those universal laws of thought which are the basis of all reasoning ···

(George Boole)

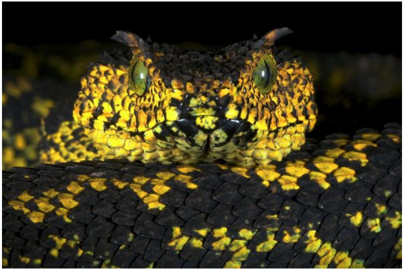


George Boole (Lincoln 1815 – Ballintemple 1864)

Formalmente corretto?

1. Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
2. la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora. . .

1. Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
2. la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora...
3. ...esistono serpenti velenosi.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

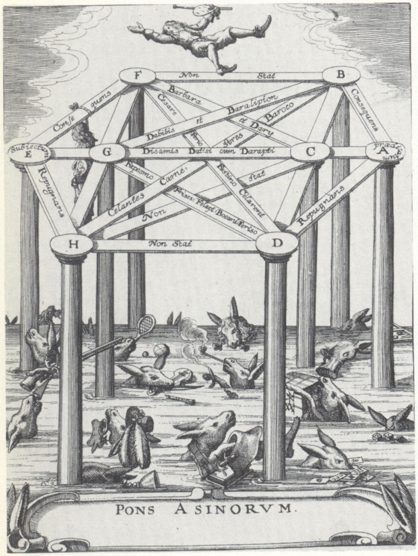
1. Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
2. la maggior parte degli artropodi non sono velenosi, allora...

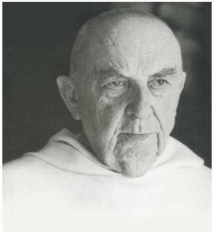
1. Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
2. la maggior parte degli artropodi non sono velenosi, allora...
3. ...esistono insetti che non sono velenosi.

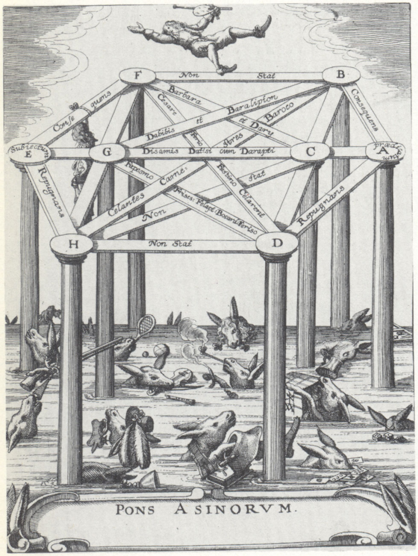
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

(V. [Dawson(2001)])

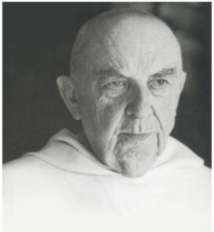
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE


F
B
E
G
C
A
H
D
Non Stat
Barbara
Cesare
Baralipton
Baroco
Dabitis
Disamis
Datisi
cum Darapti
Celantes
Non
Repugnans
Consequens
Subiectum
praedicatum
Non Stat
Pons Asinorum.





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



Un proverbio medievale dice: '*de modalibus non gustabitur asinus*', ma non è necessario essere un asino per perdersi in questo labirinto di leggi astratte: Teofrasto e quasi tutti i moderni, fino al 1934, fraintesero completamente il sistema.

(Joseph M. Bocheński, 1902–1995)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Aristotele di Stagira (384–322 a.C.) e Teofrasto (–287 a.C.): sillogistica assertoria e modale
- Raimondo Lullo (1235–1315),
  Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)
- George Boole (1815–1864): "leggi del pensiero" nel 1854
- Charles S. Peirce (1839–1914) ed Ernst Schröder (1841–1902): un calcolo delle relazioni
- Gottlob Frege (1848–1925): la "Begriffsschrift" (1879)
- Alfred N. Whitehead (1861–1947) e Bertrand Russell (1872–1970): "Principia Mathematica" (1910, 1912, 1913)
- David Hilbert (1862–1943): X problema (1900), "Entscheidungsproblem" (1928)
- Ernst Zermelo (1871–1953):
  assiomatizzazione della teoria degli insiemi (1908)
- Kurt Gödel (1906–1978):
  indecidibilità essenziale dell'aritmetica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

A CHE PRO ?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

A CHE PRO ?

“È ragionevole sperare che il connubio fra computazione e logica matematica sarà, nel prossimo secolo, cosí fruttuoso quanto lo è stato, nel secolo scorso, quello fra analisi e fisica. Sollecitudine verso questa impresa richiede sollecitudine sia per le applicazioni che per l’eleganza matematica.”

(John McCarthy, 1963)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

A CHE PRO ?

"È ragionevole sperare che il connubio fra computazione e logica matematica sarà, nel prossimo secolo, cosí fruttuoso quanto lo è stato, nel secolo scorso, quello fra analisi e fisica. Sollecitudine verso questa impresa richiede sollecitudine sia per le applicazioni che per l'eleganza matematica."

(John McCarthy, 1963)

(J. McCarthy Boston, 1927 – Palo Alto, 2011)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Un calcolo ha $\boxed{\text{assiomi logici}}$ e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno $\boxed{\text{assiomi propri}}$ e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*

Calcolo e teoria

- Un calcolo ha $\boxed{\text{assiomi logici}}$ e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno $\boxed{\text{assiomi propri}}$ e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*

- È desiderabile che il calcolo, oltre che "sound" (=corretto) sia *completo*: deve, cioè consentire di ricavare tutta la conoscenza 'implicita' negli assiomi
- Una teoria *può* essere contraddittoria—quando lo è risulta inutile

Calcolo e teoria

- Un calcolo ha $\boxed{\text{assiomi logici}}$ e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno $\boxed{\text{assiomi propri}}$ e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*

- È desiderabile che il calcolo, oltre che "sound" (=corretto) sia *completo*: deve, cioè consentire di ricavare tutta la conoscenza 'implicita' negli assiomi
- Una teoria *può* essere contraddittoria—quando lo è risulta inutile

Tutto si svolge entro un *linguaggio formale*. Perciò i detrattori della logica, insinuano che essa, riducendo la semantica alla sintassi, sia del tutto sterile.

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione finita* di formule

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ... ???...

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una collezione descrivibile tramite *schemi sintattici in numero finito*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ...???...

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ...???...

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione *semi-decidibile*

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione *semi-decidibile* (ovvero: "ricorsivamente enumerabile")

··· E questo è dunque il vantaggio del nostro metodo: che immediatamente possiamo stabilire per mezzo dei numeri se le proposizioni che ci vengono presentate sono provate o no; e che con la sola guida dei caratteri e con un metodo sicuro e veramente analitico, portiamo alla luce verità che altri avevano raggiunto a stento con immenso sforzo della mente e per caso. E perciò noi siamo in grado di presentare entro il nostro secolo dei risultati che altrimenti con difficoltà potrebbero fornire molte migliaia di anni. [1]

(Leibniz, 1679)

[1] Traduz. Massimo Mugnai

Documentarsi su

- *Calculus ratiocinator*
- *Lingua characterica*
- *Ars inveniendi*

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Meglio

- sviluppare tante *teorie separate* (e.g.: aritmetica, geometria elementare), o perfino di nicchia (e.g.: teoria dei linguaggi regolari);

oppure

- una singola *teoria onnicomprensiva* (e.g. la teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel–von Neumann oppure quella delle classi di Gödel-Bernays), alla quale ridurre le varie discipline esatte

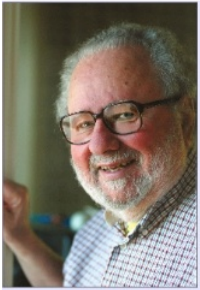
?

"There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole field, and yielding such powerful methods for solving problems (and even solving them constructively, as far as that is possible) that, no matter whether or not they are intrinsically necessary, they would have to be accepted at least in the same sense as any well-established physical theory."

(Kurt Gödel, 1947)

"A logic $\mathbf{L}$ is determined by a nonempty set E of elements together with a relation $\vdash$. For a subset A of E and an element α of E "$A \vdash \alpha$" is a statement which may be true or false. (We may think of "$A \vdash \alpha$" as asserting that α is a "logical consequence" of the premises A.)"

[Davis(1993), pag. 1]



Martin Davis

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

DEFINIZIONE

Una **logica** è una struttura

$$\mathbb{L} \quad = \quad (\mathcal{E}, \vdash)$$

costituita da

- un insieme $\mathcal{E} \neq \emptyset$ i cui elementi si chiamano **enunciati** e da
- una relazione diadica $\vdash$, chiamata **derivabilità**, tale che $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \quad \supseteq \quad \vdash$

soddisfacenti le condizioni:

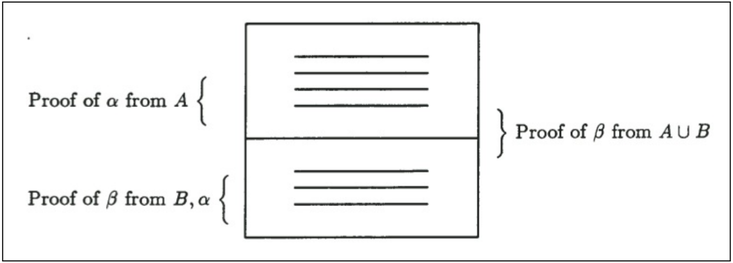
L1. $\{\alpha\} \vdash \alpha$;

L2. **(Monotonicità)** quando $A \vdash \alpha$, si ha che $B \vdash \alpha$ per *ogni* insieme di enunciati $B \supseteq A$;

L3. **(Compattezza)** quando $A \vdash \alpha$, si ha che $F \vdash \alpha$ per *qualche* insieme $\boxed{\textit{finito}}$ F tale che $A \supseteq F$;

L4. **(Taglio)** quando $A \vdash \alpha$ e $B \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, allora $A \cup B \vdash \beta$.

Illustrazione *vintage* della regola del taglio



(da [Davis(1993), p. 2])

Definizione

Una **logica booleana** è una struttura

$$\mathbb{L} \;=\; (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica $(\mathcal{E}, \vdash)$,
- un elemento f di $\mathcal{E}$,
- un'operazione diadica $\Rightarrow$ su $\mathcal{E}$

soddisfacenti le condizioni:

B1. **(Principio di deduzione)**
$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;

B2. **(Principio di doppia negazione)** $\{\, (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \,\} \vdash \alpha$.

L'operazione $\Rightarrow$ e i suoi primo e secondo operando, si chiamano: **implicazione materiale**,

antecedente e **conseguente**.

Riferimenti bibliografici

- J. M. Bocheński.
  La logica formale - La logica matematica.
  Giulio Einaudi, Torino, 1972.
  (Edizione a cura di A. Conte).

- Martin Davis.
  Lecture Notes in Logic.
  1993.

- John W. jr Dawson.
  Dilemmi logici – La vita e l'opera di Kurt Gödel.
  Bollati Boringhieri, Torino, 2001.
  (Traduzione di Paolo Pagli).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE