

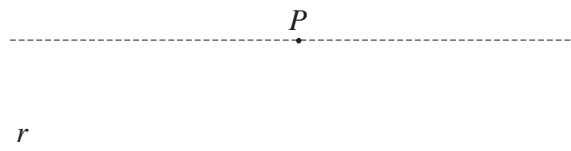
1 Geometria non-euclidea

I tentativi di “dimostrare” il cosiddetto quinto postulato di Euclide a partire dagli altri postulati, considerati più evidenti, non hanno permesso di arrivare a questo, ma hanno portato, nell’800, alla nascita delle *geometrie non-Euclidee* (Gauss, Bolyai, Lobachevski, Klein).



Gauss, Bolyai, Lobachevski e Klein

Il quinto postulato si può enunciare nel seguente modo: Data una retta r ed un punto P fuori da essa, per il punto P passa una ed una sola retta parallela ad r (possiamo dare al termine *parallelo* il significato di *che incontra r solo all’infinito*, in un punto improprio).

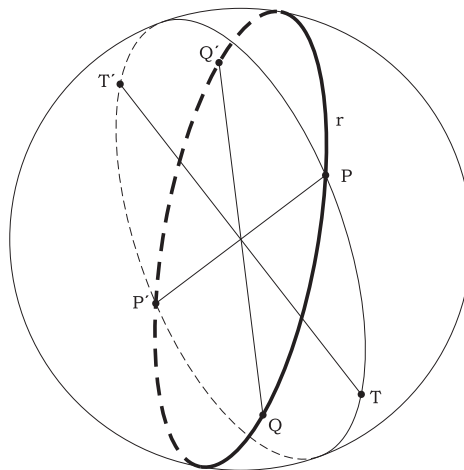


Questo postulato è risultato *indipendente* dagli altri, in senso che si possono costruire geometrie “piane” (cioè in 2 dimensioni) in cui valgono tutti gli altri enunciati originali di Euclide, ma il quinto postulato è diverso:

1. Per P esterno ad r non passa nessuna parallela
2. Per P esterno ad r passano due (o addirittura infinite) rette parallele (o *non secanti*)

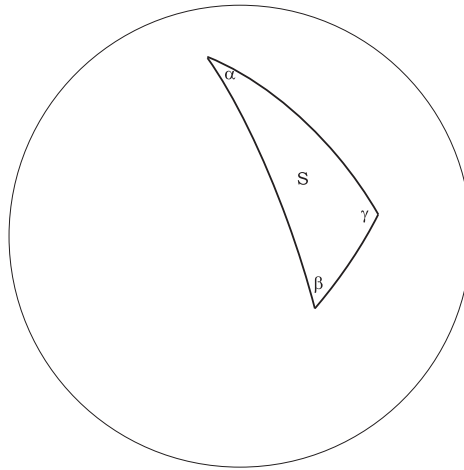
Nel caso 1, inoltre, la somma degli angoli interni di un triangolo è $> 180^\circ$, nel caso 2 è $< 180^\circ$.

Per costruire un “modello” di queste geometrie dobbiamo definire in modo opportuno punti, rette, ecc.



Per il caso 1 (**geometria ellittica piana**) possiamo definire come punto la coppia di punti diametralmente opposti (P, P') , e per retta un cerchio massimo passante per P e P' . Vediamo che per due punti (P, P') e (Q, Q') passa una retta r e che per un punto (T, T') esterno ad r non passa alcuna parallela ad r in quanto tutte le rette per (T, T') intersecano r in un punto.

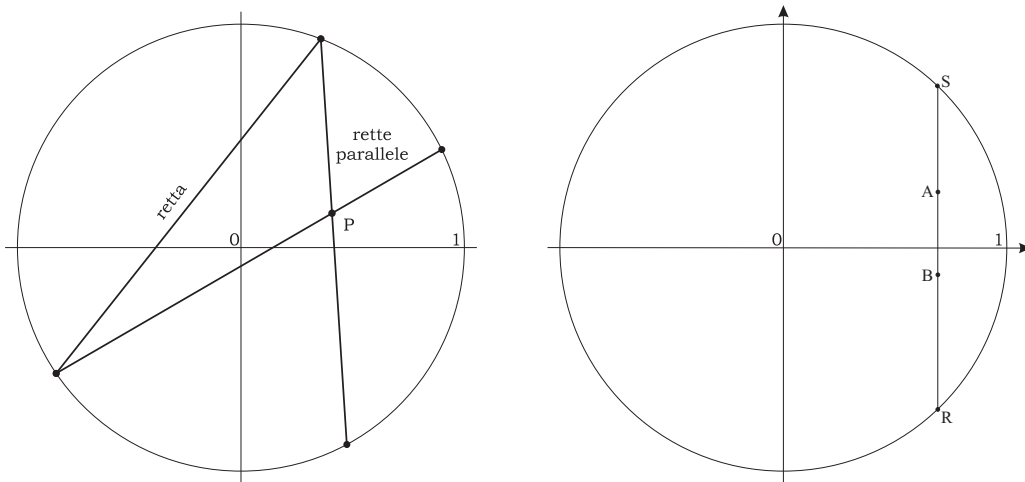
Definito sulla sfera un triangolo con i lati formati da archi di cerchi massimi, la somma degli angoli $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre $> \pi$, tanto che l’area S , se la sfera ha raggio R , si può esprimere come $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Se $S \rightarrow 0$ (mantenendo R fissato) si vede che $(\alpha + \beta + \gamma) \rightarrow \pi$. Se il triangolo sferico è molto più piccolo del raggio R , la sua differenza da un triangolo piano tende a scomparire.



Per costruire un modello della geometria ellittica piana siamo ricorsi all'uso di una sfera (superficie bidimensionale, che indicheremo con \mathbf{S}^2) immersa (*embedded*) in uno spazio euclideo tridimensionale \mathbf{E}^3 .

Notiamo ancora che per poter rappresentare il postulato V 1) abbiamo dovuto ricorrere ad una superficie che definiamo curva, cioè la sfera. Questa "curvatura" deve essere inoltre costante in tutto il "piano" perchè gli altri postulati descrivono lo spazio come omogeneo, e se la curvatura variasse questa proprietà verrebbe meno.

Con la geometria analitica, Descartes ha mostrato che, identificando i punti con coppie di numeri reali e definendo la distanza tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) come $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ tutti i postulati di euclide si riducono a teoremi sui numeri reali. Risulta quindi essenziale la definizione di punto e distanza per descrivere una geometria.



Analogamente a quanto fatto per il postulato V 1), si può definire un modello per il postulato V 2), detto **geometria iperbolica piana (\mathbf{H}^2)**.

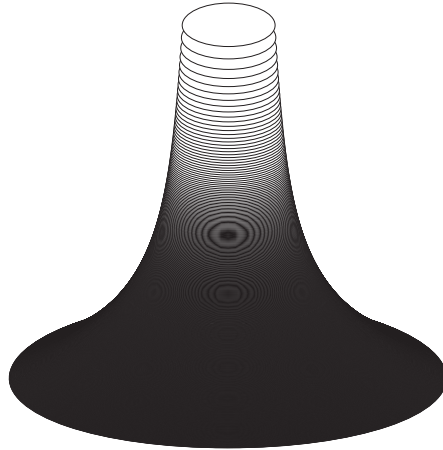
Il piano "iperbolico" non può venir immerso completamente nello spazio euclideo 3-D come quello ellittico (capiremo più avanti il perchè). Si possono però fare dei modelli limitati, come il cerchio di Klein (1870): definiamo come punti quelli interni alla circonferenza di raggio 1. Le rette sono le corde della circonferenza. I punti di questa sono punti *impropri*. Una retta è parallela ad un'altra se ha in comune con la prima un punto improprio. Vedo allora che per P passano 2 rette parallele ad una retta data, ed esistono infinite rette per P non secanti. La distanza tra due punti A e B (vedi figura) è data dall'espressione

$$d(AB) = \frac{1}{2} \log \frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA}$$

vedo che $d(AB) \rightarrow \infty$ se uno dei due punti tende alla circonferenza (ai punti R o S).

Una rappresentazione parziale di \mathbf{H}^2 "immersa" in uno spazio euclideo 3-D \mathbf{E}^3 è data dalla cosiddetta *pseudosfera*, che ha la forma di una tromba. Questa superficie ha una curvatura costante, come la sfera, ma *negativa* (capiremo più avanti il significato dell'espressione *curvatura negativa*).

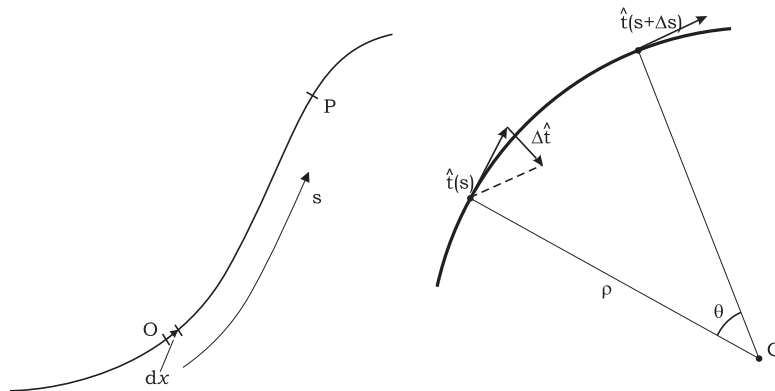
Per comprendere meglio il significato di curvatura occorre riprendere ad approfondire alcuni concetti di geometria differenziale, legati direttamente al modo di esprimere la distanza tra punti, un concetto essenziale per descrivere la geometria di una superficie, anche se di questa superficie non è possibile dare una rappresentazione intuitiva nello spazio 3-D euclideo \mathbf{E}^3 . Questo serve poi da generalizzazione per passare da superfici 2-D a spazi a 3 o più dimensioni.



1.1 Curva piana

Si può parametrizzare una curva piana nel modo seguente: $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ dove t è un parametro, non necessariamente il tempo; il vettore tangente (velocità) è $\frac{d\bar{x}}{dt}$. Possiamo definire l'ascissa curvilinea s :

$$O \equiv \bar{x}(t=0) \quad P \equiv \bar{x}(t) \quad ds = |d\bar{x}| = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt \quad \rightarrow \quad s = \int_0^t \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt = s(t)$$



Se allora passo dal parametro t al parametro s , noto che $\frac{d\bar{x}}{ds} = \hat{t}(s)$ ha modulo 1: è il versore tangente $\hat{t}(s)$. Poichè $|\hat{x}(s)| = |\hat{t}(s)| = 1$, abbiamo $\hat{t} \cdot \hat{t} = 1$ e, derivando, segue $2\hat{t} \cdot \dot{\hat{t}} = 0$, cioè $\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$. (nota: $\dot{\hat{t}}(s)$ non è un versore!) Chiamati $\kappa(s) = |\dot{\hat{t}}(s)|$ e $\hat{n}(s) = \frac{\dot{\hat{t}}(s)}{|\dot{\hat{t}}(s)|}$ segue che $\dot{\hat{t}}(s) = \kappa(s) \cdot \hat{n}$

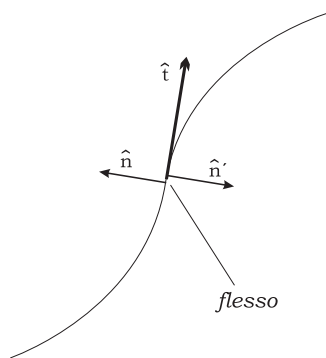
$$\Delta \hat{t} = \hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s) \quad |\Delta \hat{t}| = 2|\hat{t}| \sin \frac{\Delta \theta}{2} \sim \Delta \theta \quad \Delta s \simeq \rho \Delta \theta \quad \rightarrow \quad \left| \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s} \right| \simeq \frac{\Delta \theta}{\rho \Delta \theta} = \frac{1}{\rho}$$

Quindi

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n} = \frac{1}{\rho} \hat{n} \quad \begin{cases} \kappa : & \text{curvatura} \\ \rho : & \text{raggio di curvatura} \end{cases}$$

Misurando θ rispetto ad una direzione fissata (ad esempio l'asse x)

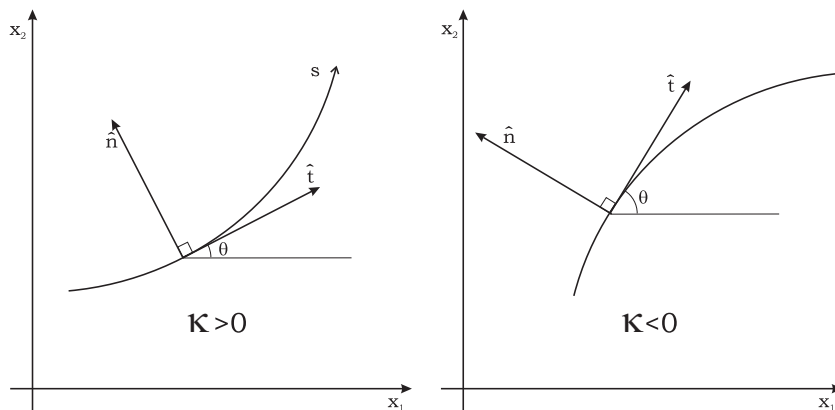
$$\Delta s = \rho \Delta \theta = \frac{\Delta \theta}{\kappa} \quad \rightarrow \quad \kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$



Abbiamo definito κ come ≥ 0 . Così facendo, però, in un flesso ho una discontinuità in \hat{n} . Per evitare questo, definita una s sulla curva, resta definito anche \hat{t} e posso definire \hat{n} come rotazione di \hat{t} di 90° in senso positivo (coerente con O, x_1, x_2). Poichè $\hat{t} \perp \hat{n}$ abbiamo ancora $\hat{t} = \kappa \hat{n}$, ma ora possiamo avere anche $\kappa < 0$. A seconda del segno la curva sta a sinistra o a destra di \hat{t} ; nel flesso \hat{n} non cambia ma κ cambia segno e ora risulta

$$\kappa = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

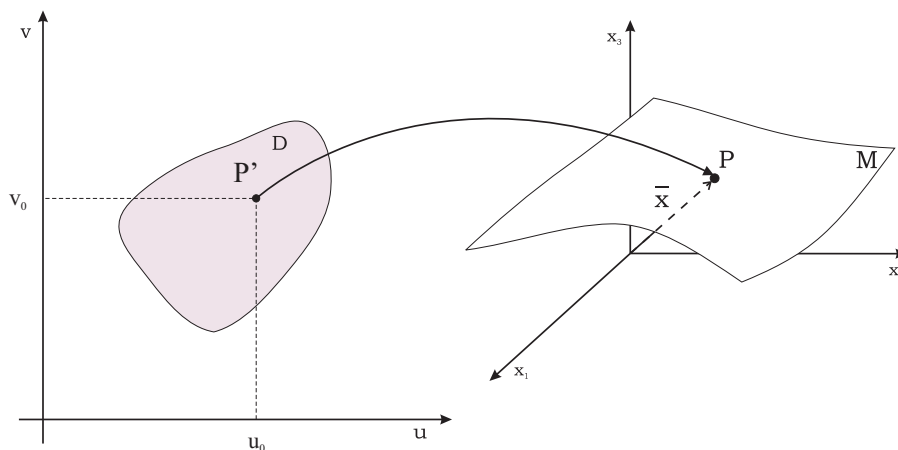
(e non in valore assoluto).



1.2 Superfici

Per essere precisi, più che di superfici, parleremo di elementi di superficie, poichè ci interessano le proprietà locali.

Anche in questo caso ricorriamo ad una rappresentazione parametrica: si considera una funzione biunivoca $\bar{x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lavoriamo in uno spazio tridimensionale euclideo \mathbf{E}^3).



Definiamo $\bar{x}(u, v) \equiv (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$. Se la superficie è del tipo $z = f(x, y)$ la parametrizzazione diventa $\bar{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Si parla di *superficie regolare (smooth)* se, definiti i vettori,

$$\begin{aligned} \bar{x}_u(u, v) &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) \\ \bar{x}_v(u, v) &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

allora è ovunque (entro il dominio) $\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0$ (prodotto vettoriale).

Fissato $v = v_0$ e facendo variare u in prossimità di un punto P' ($\rightarrow P$ sull'elemento di superficie M) ho una curva su M di cui \bar{x}_u è un vettore tangente. Analogamente anche \bar{x}_v è tangente, e i due definiscono il piano tangente in P .

Si può allora definire un versore normale \hat{N} normale alla superficie

$$\hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|} \quad \text{e si ha che } \hat{N}, \bar{x}_u, \bar{x}_v \text{ formano un triedro.}$$

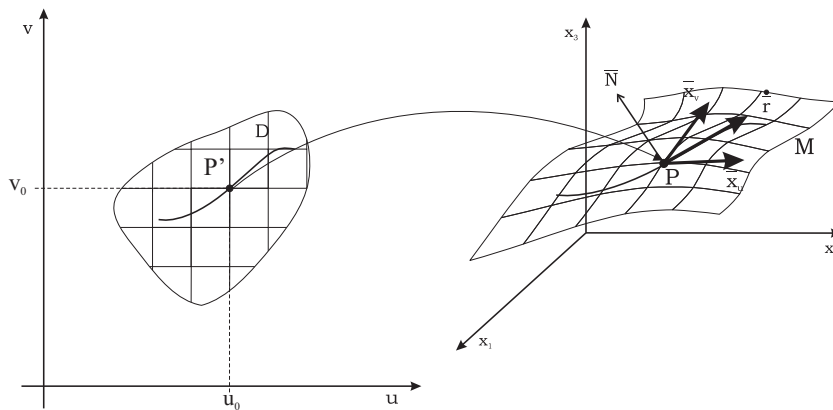
Esempio: sfera (in coordinate geografiche)

Si può descrivere la superficie della sfera, usando la variabile u per la longitudine ($-\pi \leq u \leq \pi$) e la variabile v per la latitudine ($-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$), nel seguente modo (più comunemente si usa la colatitudine, $\frac{\pi}{2} - v$): $\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$.

Poichè in un intorno di un punto P su M (e di un corrispondente punto $P' \in D$) la corrispondenza è biunivoca, posso pensare che u e v formino sull'intorno di P un sistema di coordinate curvilinee (ad esempio paralleli e meridiani su una sfera).

Se $u = u(t), v = v(t)$ è una curva in D per $P'(u_0, v_0)$ allora $\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$ è una curva su M per $\bar{x}(u_0, v_0)$. Il vettore "velocità" $\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ sarà

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{r}} = \bar{x}_u \frac{du}{dt} + \bar{x}_v \frac{dv}{dt}$$



Il vettore $\dot{\bar{r}}$ è tangente anche a M ed è quindi contenuto nel piano tangente. Ogni vettore appartenente al piano tangente in P è combinazione lineare di \bar{x}_u e \bar{x}_v (in $\bar{x}(u_0, v_0)$); viceversa ogni combinazione lineare $\bar{v} = a\bar{x}_u(u_0, v_0) + b\bar{x}_v(u_0, v_0)$ è il vettore "velocità" di una curva su M . I vettori \bar{x}_u e \bar{x}_v formano una base nel piano tangente.

1.3 La prima forma fondamentale

Se $\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$, con $a \leq t \leq b$, è una curva su una superficie, e se $s = s(t)$ è la lunghezza d'arco (ascissa curvilinea) lungo \bar{r} , da $\bar{r}(a)$ a $\bar{r}(b)$, allora la lunghezza totale L di questa curva si ottiene integrando $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|$ sull'intervallo $[a, b]$:

$$L \equiv s(b) = \int_a^b \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

ma poichè $\dot{\bar{r}} = \bar{x}_u \cdot \dot{u} + \bar{x}_v \cdot \dot{v}$ (con $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ e $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^2 = \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) \cdot (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) = \dot{u}^2 (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u) + 2\dot{u}\dot{v} (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v) + \dot{v}^2 (\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v)$$

Poniamo ora $E \equiv \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u$, $F \equiv \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v$, $G \equiv \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v$; ($E = E(u, v, \dots)$) e otteniamo:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

$$L = \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

che si abbrevia scrivendo

$$L = \int_{\bar{r}} ds = \int_{\bar{r}} \left[Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

o, in forma differenziale,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Questa è la **prima forma fondamentale** o **forma metrica** di una superficie.

Come vedremo, la forma metrica determina completamente la *geometria intrinseca* della superficie, inclusa la sua curvatura. Parlando di geometria intrinseca intendiamo riferirci a quelle proprietà geometriche che possono essere valutate attraverso misure (ad esempio distanze, ma non solo) condotte *rimanendo entro la superficie*, senza “uscire” da essa (senza, cioè, esaminare la superficie bidimensionale entro uno spazio euclideo tridimensionale). La possibilità di definire proprietà intrinseche è essenziale; infatti, se passando da 2 a 3 dimensioni, vogliamo comprendere la geometria dello spazio che definisce il nostro Universo, non possiamo certo osservarlo “dall'esterno”!

N.B.: Per la corrispondenza biunivoca tra il dominio $D \in \mathbb{R}^2$ e l'elemento di superficie M , le curve $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ formano una griglia sulla superficie, ed E , F , e G posso pensarle come funzioni definite sulla superficie (quindi intrinseche). Posso pensare che gli abitanti bidimensionali della superficie facciano varie misure di distanze tra punti della superficie stessa per scoprire che forma abbiano le tre funzioni E , F e G , espresse in funzione della griglia di coordinate curvilinee, magari facendo delle ipotesi sulla loro possibile forma e cercando la soluzione migliore.

.....

Esempio: il piano

$\bar{x}(u, v) = (u, v, 0)$ è il piano $z = 0$ in \mathbf{E}^3 con $x = u$ e $y = v$ come coordinate cartesiane.

$\bar{x}_u = (1, 0, 0)$, $\bar{x}_v = (0, 1, 0)$, $E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 1$, $F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0$, $G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 1$;

$ds^2 = du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2$ (teorema di Pitagora)

$$L = \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

e se la curva può essere rappresentata come $y = f(x)$, detto $x = t$ e $y = f(x)$ si ottiene

$$L = \int_a^b [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

.....

Esempio: la sfera in coordinate geografiche:

$$\begin{aligned} \bar{x}(u, v) &= (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v) \\ \bar{x}_u &= (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v &= (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = R^2 \cos^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v \cos^2 u = R^2 \cos^2 v \\
G &= \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v = R^2 \\
F &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = R^2 \cos v \cos u \sin v \sin u - R^2 \cos u \cos v \sin u \sin v = 0
\end{aligned}$$

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2$$

Se $\bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v$, $\bar{w} = c\bar{x}_u + d\bar{x}_v$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sono due vettori tangenti alla superficie M , allora $\bar{v} \cdot \bar{w} = (a\bar{x}_u + b\bar{x}_v) \cdot (c\bar{x}_u + d\bar{x}_v) = acE + adF + bcF + bdG$ che si può scrivere in forma matriciale

$$(a, b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{in cui} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice della prima forma fondamentale}$$

Quindi la conoscenza della prima forma fondamentale permette di calcolare prodotti scalari su M , e quindi non solo lunghezze ma anche angoli.

Ricordiamo che, essendo $\bar{x}_u \times \bar{x}_v$ perpendicolare al piano tangente alla superficie, il versore $\hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$ è perpendicolare alla superficie.

Identità di Lagrange (importante): $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u)(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v) - (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2 = EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

Dimostrazione: ricordiamo che

$$\begin{aligned}
|\bar{x}_u \times \bar{x}_v| &= |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \sin \theta \\
\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v &= |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \cos \theta
\end{aligned}$$

da cui (ricordando che $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$) $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = |\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 \sin^2 \theta = (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u)(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v) - (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2$ C.V.D

Dalla condizione che la superficie sia regolare segue che $EG - F^2 \neq 0$

A questo punto facciamo un cambiamento nella simbologia usata; come vedremo questo porterà ad una notevole semplificazione delle formule.

Chiamiamo $g_{11} \equiv E$ $g_{12} = g_{21} \equiv F$ $g_{22} \equiv G$ $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_u$ $\bar{x}_2 \equiv \bar{x}_v$

e scriviamo $u^1 \equiv u$ $u^2 \equiv v$ (dove gli apici 1 e 2 sono indici alti e non esponenti).

Avremo allora $g_{ij} = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j$ ($i, j = 1, 2$) e la matrice della forma metrica sarà:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che $g_{ij} = g_{ij}(u, v) = g_{ij}(u^1, u^2)$.

Detto $g \equiv \det(g_{ij}) = EG - F^2$, allora (dall'identità di Lagrange) $|\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|^2 = g$.

Nella nuova notazione la I forma fondamentale si può allora scrivere:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$$

Abbiamo usato $2g_{12} = g_{12} + g_{21}$ poichè $g_{12} = g_{21}$; capiremo inoltre presto perchè scriviamo u^i anzichè u_i .

Un vettore, tangente in P ad M , $\bar{v} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2$ si potrà scrivere come $\bar{v} = v^1\bar{x}_1 + v^2\bar{x}_2 = \sum_i v^i \bar{x}_i$ (si nota che i è una variabile "muta", ed ogni altra lettera può essere usata al suo posto.)

Se $\bar{v} = \sum_i v^i \bar{x}_i$ e $\bar{w} = \sum_j w^j \bar{x}_j$ sono due vettori tangenti ad M nello stesso punto P , allora

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \sum_{i,j} (v^i \bar{x}_i) \cdot (w^j \bar{x}_j) = \sum_{i,j} v^i w^j \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j$$

I vettori \bar{v} e \bar{w} sono ortogonali se e solo se $\sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j = 0$.

Definiamo come g^{ij} gli elementi della matrice inversa di (g_{ij}) , tali cioè che

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che in forma compatta si può scrivere

$$\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

dove δ_i^k (δ di Kronecker) è definita come

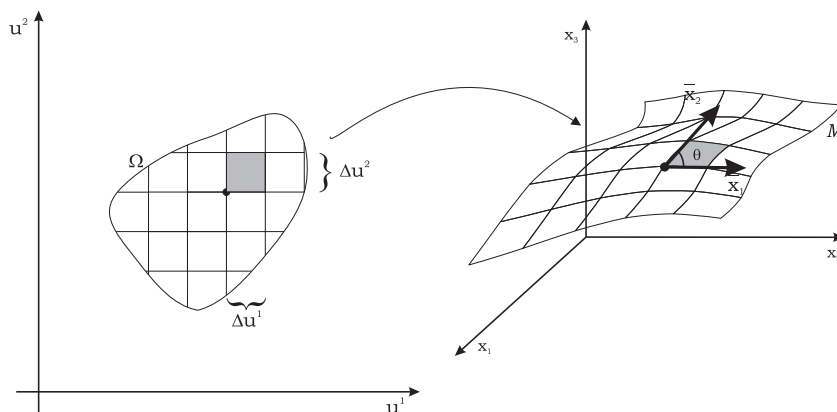
$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Ricordando che l'inversa di una matrice ha come elementi i complementi algebrici divisi per il determinante della matrice di partenza, si ha:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{21}}{g} \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$

Vedremo ora che la prima forma fondamentale non solo permette di misurare distanze e angoli, ma anche aree.

Sia $\bar{x} : D \rightarrow E^3$ una superficie in E^3 e sia $\Omega \in D$ una regione del dominio in cui \bar{x} è biunivoca. Per trovare l'area di $\bar{x}(\Omega)$ suddividiamo Ω in elementi rettangolari per mezzo di linee parallele agli assi u^1 e u^2 .



Ad un'areola di Ω di lati Δu^1 e Δu^2 corrisponde approssimativamente un pezzo di superficie a forma di parallelogramma, con lati paralleli ai vettori \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . Questi lati avranno lunghezze date da $\Delta l_1 \simeq |\bar{x}_1| \Delta u^1$ e $\Delta l_2 \simeq |\bar{x}_2| \Delta u^2$ (Ricordiamo che $\bar{x}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1}$, da cui $\Delta \bar{x}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1$)

L'areola sarà data da:

$$\Delta A = |\bar{x}_1| \Delta u^1 \cdot |\bar{x}_2| \Delta u^2 \sin \theta = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2| \Delta u^1 \Delta u^2 = \sqrt{g} \Delta u^1 \Delta u^2$$

dove θ è l'angolo tra \bar{x}_1 e \bar{x}_2 e $g = \det(g_{ij})$ come visto sopra.

Sommando su tutti gli elementi di area in cui è suddiviso Ω e passando al limite $\Delta u^i \rightarrow 0$ si ha che l'area di $\bar{x}(\Omega)$ è:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} \, du^1 du^2$$

Osserviamo che, lavorando in due dimensioni, la misura di un insieme è proprio l'area; se lavoriamo in tre dimensioni, sarà un volume, ed un volume n -dimensionale in n dimensioni. In tutti i casi, anche se qui non lo mostriamo, la misura si ottiene integrando \sqrt{g} , dove g è il determinante della metrica n -dimensionale. Questo vale negli spazi (*manifolds*) di tipo cosiddetto *Riemanniano*, in cui il $ds^2 > 0$. Negli spazi detti *pseudo-Riemanniani*, in cui il ds^2 può essere positivo, negativo o nullo (come ad esempio lo spazio-tempo di Minkowski della Relatività Speciale), alcuni elementi del tensor metrico possono essere negativi; potendo in questo caso

risultare (e così è per lo spazio-tempo) $g < 0$, si userà in generale il modulo di g , e si scriverà $\sqrt{|g|}$.

Esempio: sfera in coordinate geografiche:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v \, du^2 + R^2 \, dv^2 \qquad \begin{matrix} -\pi \leq u \leq \pi \\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2 \end{matrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad g = R^4 \cos^2 v \quad \rightarrow \quad \sqrt{g} = R^2 \cos v$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} R^2 \cos v \, du \right) dv = 2\pi R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv = 4\pi R^2$$

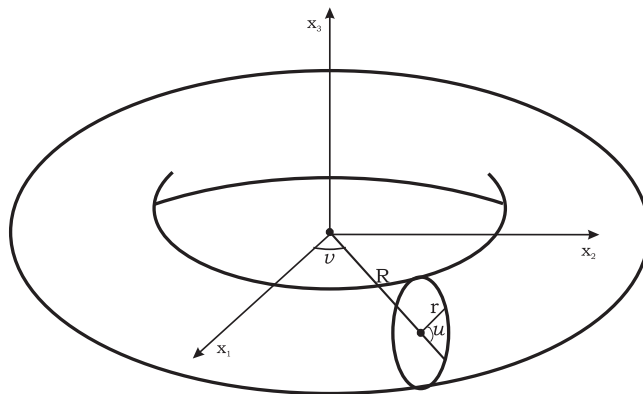
Esempio: area del toro:

$$\bar{x}(u, v) = [(R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u] \qquad \sqrt{g} = r(R + r \cos u)$$

$$0 \leq v \leq 2\pi \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 < r < R$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} r(R + r \cos u) \, du \right] dv = 2\pi r \left[\int_0^{2\pi} R \, du + \int_0^{2\pi} r \cos u \, du \right] =$$

$$= 2\pi r \left[2\pi R + r \int_0^{2\pi} \cos u \, du \right] = 4\pi^2 Rr$$



2 Tensori

Perchè abbiamo scritto cose come g_{ij} e du^i e du^j ? Perchè abbiamo a che fare con grandezze *tensoriali*, grandezze le cui proprietà sono legate al modo di trasformarsi cambiando sistema di riferimento.

Se passo dal sistema u^i ($i = 1, 2, \dots$) $\rightarrow u'^j$ ($j = 1, 2, \dots$) sarà (per mezzo dei ... comincio a far vedere come si può generalizzare a più di due dimensioni)

$$du'^j = \sum_i \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

Ogni grandezza V^j che si trasforma con la regola

$$V'^j = \sum_i \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i$$

è un tensore *contravariante*, quindi anche du^i , o u^i , è un tensore *contravariante*. Un vettore è un tensore di ordine 1. Una grandezza scalare, invece, il cui valore non muta in un dato punto anche se cambia il sistema di coordinate, è un tensore di ordine 0.

Consideriamo ora il gradiente di un campo scalare $\Phi(u^i) = \Phi(u'^j)$. Avremo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$$

Vediamo che il gradiente di Φ si trasforma in modo diverso da du^i ! Si dice che $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$ è un vettore *covariante*, e spesso si scrive $\partial_i \Phi$ anzichè $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$, con l'indice scritto in basso. Si sottintende la somma sugli indici alti e bassi uguali e ripetuti (convenzione di Einstein), per cui scriviamo semplicemente:

$$V'^j = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$$

La grandezza $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ (sottintendendo il segno di sommatoria su i e j) è la lunghezza, al quadrato, di un segmento, e quindi non dipende dal sistema di riferimento usato (è uno scalare). In due sistemi diversi sarà quindi

$$ds^2 = g'_{kl} du'^k du'^l = g_{ij} du^i du^j = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} du'^k du'^l$$

$$\text{poichè} \quad du^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} du'^k \quad \text{e} \quad du^j = \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} du'^l$$

$$\text{Abbiamo quindi} \quad g'_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij}$$

cioè il tensore metrico è un tensore covariante di rango 2.

Il tensore g^{ij} è invece contravariante (di rango 2).

Abbiamo visto che $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$ (sottintendendo anche qui la sommatoria sull'indice ripetuto j). δ_i^k è un *tensore misto* di rango 2; infatti:

$$\delta_i^k \cdot \frac{\partial u'^l}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial u'^m} = \frac{\partial u'^l}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial u'^m} = \frac{\partial u'^l}{\partial u'^m} = \delta_m^l$$

(a parte gli scalari e lo zero, δ_i^k è il solo tensore che mantiene le stesse componenti in tutti i sistemi di coordinate).

Abbiamo visto che il prodotto scalare $\bar{v} \cdot \bar{w}$ si ottiene come $\bar{v} \cdot \bar{w} = g_{ij} v^i w^j$.

Se moltiplichiamo due tensori otteniamo ancora un tensore: $A_{ij} \cdot C^k = D_{ij}^k$.

Se *contraiamo* un tensore, avremo ancora un tensore: $T_{kmj}^j = B_{km}$.

Siano D_i e D^j le componenti covariante e controvariante di uno stesso vettore (tensore). Prendiamo un vettore generico C^j tale che sia

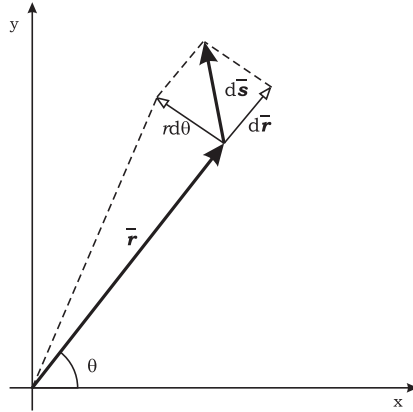
$$D_i = g_{ij} C^j / \cdot D^i \quad \rightarrow \quad D_i D^i = g_{ij} C^j D^i$$

Eseguendo questo prodotto scalare otteniamo, a sinistra, uno scalare che dipende dal vettore \bar{D} , mentre a destra abbiamo una dipendenza da \bar{C} e da \bar{D} ; essendo le due cose uguali necessariamente sarà $\bar{C} \equiv \bar{D}$, cioè $D_i = g_{ij} D^j$. Possiamo arrivarci anche in un altro modo. Abbiamo visto che un vettore \bar{v} si può scrivere come $\bar{v} = v^i \bar{x}_i$, usando le sue componenti controvarianti; definiamo allora come componenti covarianti v_k le quantità

$$v_k \equiv \bar{v} \cdot \bar{x}_k = v^i \bar{x}_i \cdot \bar{x}_k = v^i g_{ik} = g_{ik} v^i = g_{ki} v^i$$

Analogamente $D^j = g^{ij} D_i$. **Vedo allora che il tensore metrico serve a trasformare le componenti controvarianti in covarianti (e viceversa).**

Esempio: vettori nel piano in coordinate polari



$$\begin{aligned} u^1 &\equiv r & ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 & g_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} & g &= r^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{g} = r \\ u^2 &\equiv \theta & & & g^{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} & & \end{aligned}$$

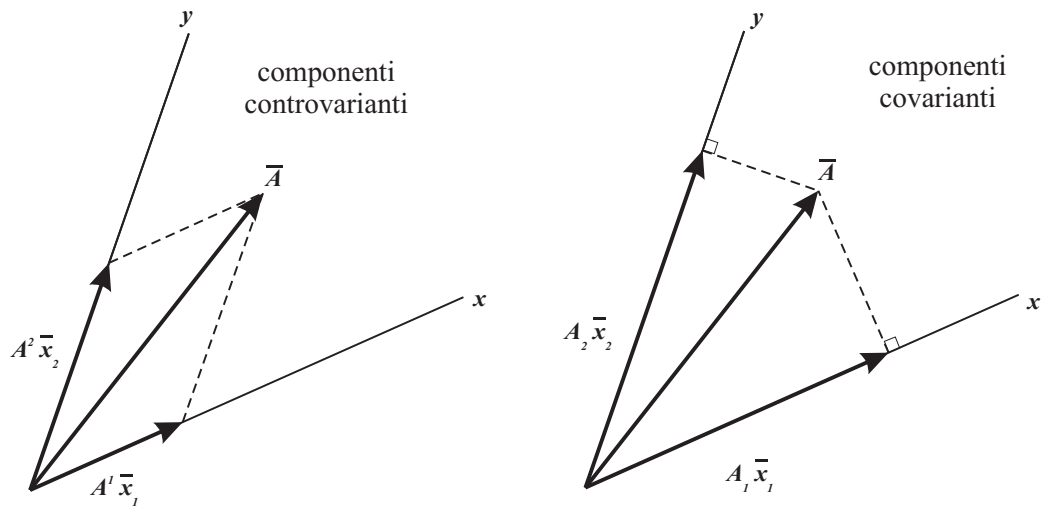
dati $A_i = (5, 9)$ e $B^i = (3, 7)$ abbiamo $A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 = 5 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 78$

$$\begin{aligned} A^i &= g^{ij} A_j & \rightarrow & A^1 = g^{11} A_1 + g^{12} A_2 = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 9 = 5 \\ & & \rightarrow & A^2 = g^{21} A_1 + g^{22} A_2 = 0 \cdot 5 + 1/r^2 \cdot 9 = 9/r^2 \\ B_i &= g_{ij} B^j & \rightarrow & B_1 = g_{11} B^1 + g_{12} B^2 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 7 = 3 \\ & & \rightarrow & B_2 = g_{21} B^1 + g_{22} B^2 = 0 \cdot 3 + r^2 \cdot 7 = 7r^2 \\ \text{quindi} & & & A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 = 5 \cdot 3 + 9/r^2 \cdot 7r^2 = 78 = A_i B^i \end{aligned}$$

Cioè $A^i B_i = g_{ij} A^i B^j = g^{ij} A_j B_i = A_i B^i$ è invariante

N.B.: Abbiamo che $dS = \sqrt{g} du^1 du^2 \rightarrow r dr d\theta$ è l'elemento di superficie.

Non è facile rappresentare le componenti covarianti e controvarianti di un vettore in generale, ma si può dare una descrizione grafica in qualche caso particolare, ad esempio nel caso di coordinate rettilinee. Consideriamo, nel piano, un sistema di coordinate rettilinee *non* ortogonali Oxy . Siano \bar{x}_i i vettori di base. Se scriviamo il vettore \bar{A} come $\bar{A} = A^i \bar{x}_i$, vedo che le A^i altro non sono che le usuali componenti di un vettore, tali che i vettori componenti, di modulo A^i e con direzione e verso dati da \bar{x}_i , si sommano con la regola del parallelogramma per dare il vettore \bar{A} . Le componenti controvarianti corrispondono alle proiezioni *parallele* agli assi.



Se invece vado a scrivere, come già fatto sopra, per le componenti covarianti, $A_i = \bar{A} \cdot \bar{x}_i$, vedo che esse corrispondono alla proiezione di \bar{A} lungo la direzione \bar{x}_i e sono quindi rappresentate dalle proiezioni *perpendicolari* agli assi.

Da quanto detto vediamo che, se il sistema di riferimento è rettilineo e *ortogonale*, non essendoci allora differenza tra proiezioni parallele e perpendicolari, le componenti covarianti e controvarianti del vettore (e, in generale, dei tensori) coincidono.

Non ogni grandezza con indici è necessariamente un tensore; ad esempio la connessione affine Γ^i_{jk} come vedremo non lo è, poichè non si trasforma come un tensore.

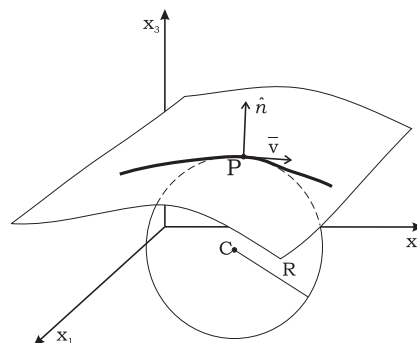
Possiamo trarre una *conclusione importante*: **ogni equazione sarà invariante rispetto ad una trasformazione generale di coordinate se è espressa come uguaglianza tra due tensori con gli stessi indici alti e bassi**:

$$A^\alpha_{\beta\gamma} = B^\alpha_{\beta\gamma} \rightarrow A'^\alpha_{\beta\gamma} = B'^\alpha_{\beta\gamma} \text{ se } A^\alpha_{\beta\gamma} \text{ e } B^\alpha_{\beta\gamma} \text{ sono tensori.}$$

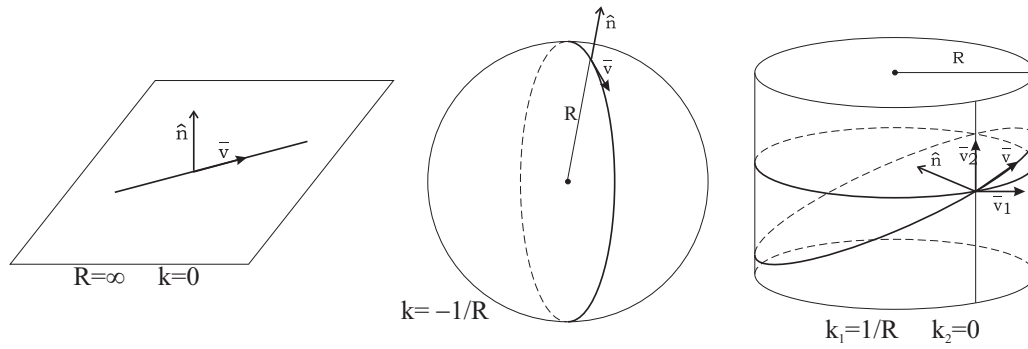
Poichè anche lo zero è un tensore di qualunque ordine (basta pensare che comunque si trasforma nello zero), una relazione del tipo $A^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ varrà in ogni sistema di riferimento.

Invece una uguaglianza tra grandezze che non sono entrambe tensori con gli stessi indici alti e bassi (ad esempio $T_{\mu\nu} = 5$; $V^i = B_i$) può valere in qualche sistema, ma non in generale.

2.1 Concetto di curvatura di una superficie



Vediamo come si può estendere il concetto di curvatura ad una superficie. Consideriamo quindi un punto P su una superficie, e sia \hat{n} il versore normale alla superficie in P . Se \bar{v} è un vettore tangente in P alla superficie, \bar{v} e \hat{n} definiscono un piano che taglia la superficie lungo una curva, che avrà in P un certo raggio di curvatura. La curvatura in P sarà data da $k = \pm \frac{1}{R}$, dove il segno è preso positivo o negativo a seconda del fatto che il centro di curvatura C stia, rispetto a P , dallo stesso lato di \hat{n} oppure da quello opposto (si può anche adottare la scelta opposta; come vedremo le cose non cambiano).

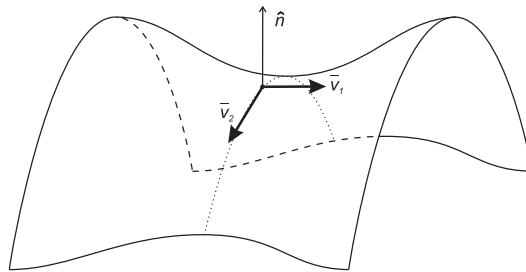


Nel caso del cilindro si vede che ci sono 2 direzioni, perpendicolari tra loro, alla quali corrispondono il massimo e il minimo valore (k_1 e k_2) di k , che sono le cosiddette *curvature principali*. Questo vale in generale, per tutte le superfici regolari.

Si definisce **curvatura di Gauss** K il prodotto $k_1 \cdot k_2$. Da questo vediamo che K non dipende dalla convenzione adottata per i segni di k .

Per il piano abbiamo $K = 0$, per la sfera $K = 1/R^2$, per il cilindro $K = 0$ come per il piano! Anche se questo può apparire a prima vista strano, il realtà riflette il fatto che tagliando un cilindro retto lungo un segmento parallelo all'asse, esso si può distendere su di un piano senza deformato e senza cambiare lunghezze e angoli delle figure tracciate su di esso. La geometria di un cilindro è *localmente indistinguibile* da quella di un piano per quanto concerne misure di angoli, lunghezze, aree, cioè tutte quelle proprietà che si possono misurare muovendosi unicamente lungo la sua superficie. *Globalmente*, però, piano e cilindro sono distinguibili: un insetto che si muove lungo una sezione circolare (perpendicolare all'asse) senza deviare nè a destra nè a sinistra, finirà col ritornare sui suoi passi, cosa che sul piano non accade. Anche un cono circolare retto ha $K = 0$

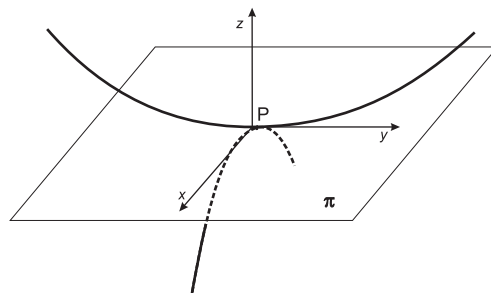
Un esempio di superficie con $K < 0$ è dato da un paraboloido iperbolico (in generale da una superficie fatta a forma di sella) $z = x^2 - y^2$: i due centri di curvatura si trovano da parti opposte rispetto a P e quindi si ha $K < 0$.



In generale una superficie avrà $K > 0$ se, rispetto al piano tangente in P , sta "tutta da una parte" (almeno localmente), mentre sarà $K < 0$ se la superficie sta da entrambe le parti rispetto al piano tangente in P .

Per un toro abbiamo la zona esterna con $K > 0$, quella interna con $K < 0$, separate da una circonferenza sopra e sotto con curvatura nulla.

Vediamo di capire perchè nell'intorno di un punto P sono definite due curvatures principali, in due direzioni tra loro perpendicolari. Nell'intorno di un punto P , rispetto al piano tangente π ed alla normale, sarà (sviluppando in serie di Taylor)



$$z = f(x, y) \quad P \equiv \text{origine}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_P x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_P y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_P x \cdot y + \mathcal{O}(3) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_P x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_P y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_P x \cdot y \right] + \mathcal{O}(3) \end{aligned}$$

che è del tipo

$$z = \frac{1}{2} [ax^2 + 2bxy + cy^2]$$

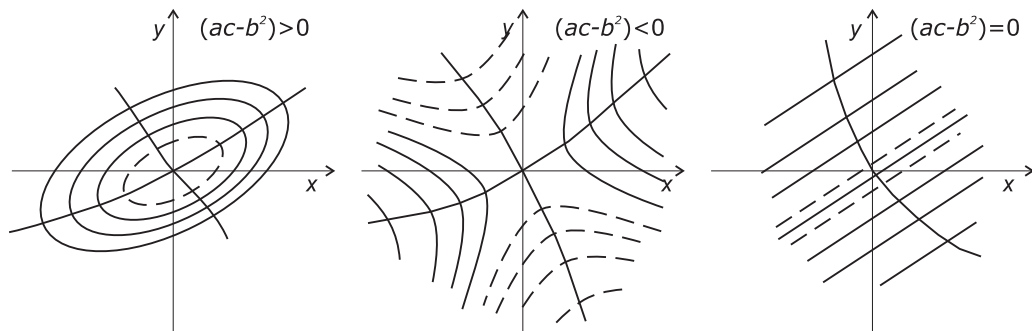
che rappresenta una conica per un dato valore di z fissato. In generale avremo:

$$\begin{aligned} (ac - b^2) > 0 &\Rightarrow \text{ellisse} \\ (ac - b^2) = 0 &\Rightarrow \text{parabola} \\ (ac - b^2) < 0 &\Rightarrow \text{iperbole} \end{aligned}$$

Nel caso di un ellisse le curve di livello $z = \text{cost}$ descriveranno un insieme di ellissi con lo stesso centro nell'origine. In corrispondenza dell'asse maggiore e minore di queste ellissi avremo i raggi massimi e minimi di curvatura della superficie nell'intorno di P . Vediamo qui come le direzioni di massima e minima curvatura siano tra loro perpendicolari.

Nel caso iperbolico la superficie avrà la forma di una sella; anche qui avrò due direzioni perpendicolari in cui la curvatura sarà massima e minima (e di segno opposto).

Nel caso parabolico avremo una direzione in cui la curvatura è nulla.

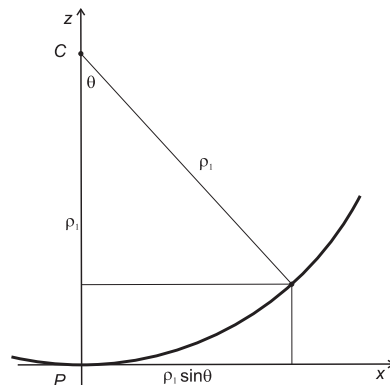


Se faccio una rotazione di assi nel piano tangente e faccio coincidere gli assi x e y con gli assi principali delle coniche allora potrò scrivere la superficie $z = f(x, y)$ nella forma più semplice

$$z = a'x^2 + b'y^2 + \mathcal{O}(3)$$

dove a' e b' saranno legati ai raggi estremi di curvatura. Vediamo come.

Se mi muovo sul piano $y = 0$, ed approssimo la sezione della superficie con un arco di cerchio in un intorno di P , avrò



$$\begin{cases} z = \rho_1 - \rho_1 \cos \theta = \rho_1 (1 - \cos \theta) \simeq \rho_1 [1 - (1 - \theta^2/2 + \dots)] \\ x = \rho_1 \sin \theta \simeq \rho_1 \theta \end{cases}$$

da cui

$$z \sim \rho_1 \frac{\theta^2}{2} \sim \frac{\rho_1}{2} \left(\frac{x}{\rho_1}\right)^2 \sim \frac{x^2}{2\rho_1}$$

Analogamente nel piano zy , per cui in un intorno di P , scelto opportunamente il sistema di riferimento, posso porre

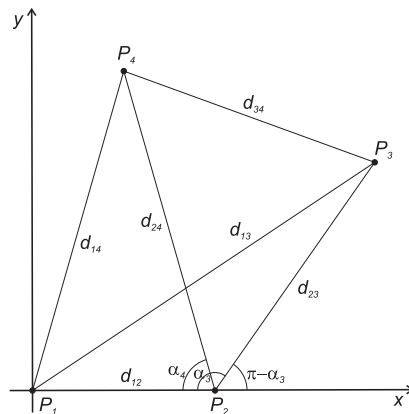
$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2} = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2}$$

Si potrebbe definire la curvatura di una superficie anche in altri modi, ad esempio $K' = k_1 + k_2$. In questo caso piano e cilindro sarebbero diversi anche localmente. Ma il grosso vantaggio della curvatura di Gauss risiede nel fatto che essa, come vedremo, si può determinare ricorrendo a sole misure condotte sulla superficie, senza la necessità di “vedere” la superficie in 3 dimensioni (come invece accadrebbe per $K' = k_1 + k_2$).

La curvatura di Gauss è una *proprietà intrinseca* della superficie, e si può determinare conoscendo il tensore metrico g_{ij} ($i, j = 1, 2$). Questo è il risultato del cosiddetto **Theorema Egregium**, come ebbe a chiamarlo lo stesso Gauss.

Esempio: il pianeta misterioso

Per farci un’idea intuitiva di come questo sia possibile consideriamo questo esempio: supponiamo di aver misurato, sulla superficie di un corpo celeste su cui siamo stati trasportati bendati (quindi senza averlo visto dallo spazio!) le distanze tra 4 località P_1, P_2, P_3, P_4 come mostrato in figura. Dati i 6 valori dei segmenti, posso dire se la superficie del pianeta è piatta oppure no?



$$d_{12} = 780km \quad d_{13} = 1498km \quad d_{14} = 1112km \quad d_{23} = 735km \quad d_{24} = 960km \quad d_{34} = 813km$$

Usiamo il teorema di Carnot: $d_{13}^2 = d_{12}^2 + d_{23}^2 - 2d_{12}d_{23}\cos\alpha_3$ da cui

$$\cos\alpha_3 = \frac{d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2}{2d_{12}d_{23}}$$

Analogamente

$$\cos\alpha_4 = \frac{d_{12}^2 + d_{24}^2 - d_{14}^2}{2d_{12}d_{24}}$$

Coordinate dei punti: $P_1 = (0, 0)$; $P_2 = (d_{12}, 0)$;

$P_3 = (d_{12} + d_{23}\cos(\pi - \alpha_3), d_{23}\sin(\pi - \alpha_3)) = (d_{12} - d_{23}\cos\alpha_3, d_{23}\sin\alpha_3)$; $P_4 = (d_{12} - d_{24}\cos\alpha_4, d_{24}\sin\alpha_4)$.

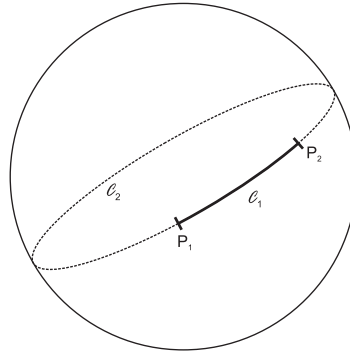
$$d_{34}^2 = [d_{12} - d_{23}\cos\alpha_3 - d_{12} + d_{24}\cos\alpha_4]^2 + [d_{23}\sin\alpha_3 - d_{24}\sin\alpha_4]^2 = d_{23}^2 + d_{24}^2 - 2d_{23}d_{24}\cos(\alpha_3 - \alpha_4)$$

cioè otteniamo $d_{34} = 1147.6$ se la terra è piatta, $\neq 813$ misurato.

2.2 Geodetiche

Si $\bar{r}(s) = (u^i(s))$, con $a \leq s \leq b$, una curva su una superficie, con s ascissa curvilinea, tra due punti P_1 e P_2 ($P_1 = \bar{r}(a)$; $P_2 = \bar{r}(b)$). Diciamo che detta curva è una **geodetica** tra P_1 e P_2 se la sua lunghezza è stazionaria per piccole variazioni della curva che si annullano agli estremi. La curva che collega sulla superficie P_1 e P_2 lungo il cammino più breve è una geodetica, ma non è sempre vero il contrario.

Ad esempio su una sfera sono geodetiche tra P_1 e P_2 sia C_1 che C_2 (entrambi archi di cerchio massimo), ma il cammino più breve corrisponde a C_1 .



Se ricordiamo che $ds^2 = g_{jk} du^j du^k$, espresse le u^i in forma parametrica tramite il parametro t (che non sarà necessariamente il tempo) avremo:

$$ds^2 = \left(g_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) dt^2$$

Detta $L(u^i, \dot{u}^i, t) = (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k)^{1/2}$ (con le $g_{jk} = g_{jk}(u^i)$ e $\dot{u}^i \equiv \frac{du^i}{dt}$) la lunghezza di una curva tra P_1 e P_2 sarà:

$$S = \int_{P_1}^{P_2} L dt = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

Per trovare la condizione che S sia stazionario si usano le *equazioni di Eulero-Lagrange* (vedi calcolo delle variazioni):

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0$$

$$L = \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} \equiv \sqrt{F}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\sqrt{F}} \left(g_{ik} \dot{u}^k + g_{ji} \dot{u}^j \right) \right] = 0$$

ma $g_{ik} \dot{u}^k + g_{ji} \dot{u}^j = 2g_{ji} \dot{u}^j$ per la simmetria di g_{ij} e per il fatto che k e j sono indici muti (sommati) e si possono scambiare; avremo quindi:

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \left\{ -\frac{1}{2F^{3/2}} \frac{dF}{dt} g_{ji} \dot{u}^j + \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^i} \dot{u}^l \dot{u}^j + g_{ji} \ddot{u}^j \right) \right\} = 0$$

Se assumiamo che t sia proporzionale (o addirittura uguale) all'ascissa curvilinea s , allora F è stazionario e $\frac{dF}{dt} = 0$. Questo perchè:

$$ds = L dt \quad \rightarrow \quad ds^2 = L^2 (dt)^2 = F dt^2 \quad \rightarrow \quad F = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = 2 \left(\frac{ds}{dt} \right) \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

se $s = \alpha t + \beta$, con α e β numeri reali (assumeremo per semplicità $s = t$). Continuando sarà

$$g_{ji}\ddot{u}^j + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$$

e se poniamo, per la simmetria degli indici sommati l e j ,

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} \right] \dot{u}^l \dot{u}^j$$

Se sostituiamo, in questa relazione, l'indice l con l'indice k otteniamo

$$g_{ji}\ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad \text{e moltiplicando per } g^{il}$$

$$\delta_j^l \ddot{u}^j + \frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad \text{che si può scrivere}$$

(ricordando le proprietà di δ_j^l)

$$\frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

che esprime la condizione di stazionarietà, cioè l'equazione differenziale che definisce una geodetica. Il simbolo con tre indici Γ_{jk}^l è la cosiddetta **connessione affine** o *simbolo di Christoffel di 2° tipo*, definita come:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right)$$

cioè è una quantità dipendente da g_{ij} e dalle sue derivate prime. Si noti inoltre che $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$. Spesso, per semplificare ancor di più la notazione, si usa scrivere:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \equiv \partial_k g_{ij} \equiv g_{ij,k}$$

Si può verificare che Γ_{jk}^i non è un tensore, in quanto

$$\Gamma_{mn}^l \neq \frac{\partial u^l}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial u^m} \frac{\partial u^k}{\partial u^n} \Gamma_{jk}^i$$

Nell'equazione della geodetica è il termine a sinistra è un tensore di rango 1 (un vettore controvariante), anche se Γ_{jk}^l non è un tensore. Quindi, se esso è nullo in un sistema di riferimento, lo sarà anche in un sistema di riferimento generico.

Esempio: il piano in coordinate cartesiane

$ds^2 = du^2 + dv^2$; poichè g_{ij} è costante, le Γ sono tutte nulle, e le geodetiche sono le soluzioni di

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 v}{ds^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u &= as + b \\ v &= cs + d \end{aligned}$$

(con a, b, c, d numeri reali) cioè è l'equazione di una retta in forma parametrica.

Analogamente, anche se in modo più complesso, si può mostrare che gli archi di cerchio massimo sono le geodetiche della sfera.

Esempio: geodetiche nel piano in coordinate polari

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad g = r^2 \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u^1 = r \\ u^2 = \theta \end{matrix}$$

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right) \quad \text{ricordiamo la simmetria su } j \text{ e } k$$

$$\Gamma_{jk}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{j1}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1} \right) \quad \text{perché } g^{12} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(- \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2r = -r$$

$$\Gamma_{jk}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{j2}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} \right)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + (-r) \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{ds} \right) \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = 0 \quad (\text{II})$$

(se $d\theta/ds = 0$ ho la retta passante per l'origine); se pongo $d\theta/ds \equiv \theta'$ e divido (II) per θ' e ottengo:

$$\frac{1}{\theta'} \frac{d\theta'}{ds} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \ln \theta' + \ln r^2 = \ln(\theta' r^2) = \text{cost}$$

cioè

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = h = \text{cost}$$

Invece di passare ad integrare la (I) uso un'altro sistema. Dalla $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, dividendo per ds^2 , ottengo

$$1 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

Si può verificare che questa relazione è un integrale della (I). Da questa relazione si ha

$$\frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \quad \text{assieme alla} \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{h}{r^2}$$

Dividendo la seconda per la prima, per eliminare s , ho

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{h}{r\sqrt{r^2 - h^2}} = \pm \frac{d}{dr} \left[\arccos \left(\frac{h}{r} \right) \right]$$

cioè

$$\theta = \pm \arccos \left(\frac{h}{r} \right) + \theta_0 \quad \rightarrow \quad \frac{h}{r} = \cos(\theta - \theta_0) \quad \rightarrow \quad r \cos(\theta - \theta_0) = h$$

Luoghessa di cammino

$$L = \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt$$

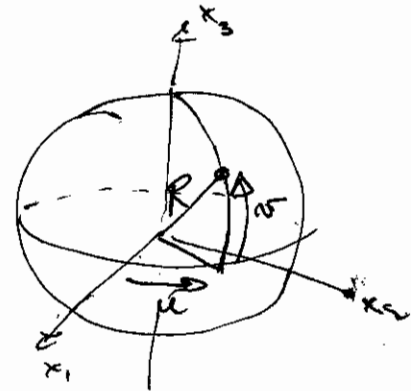
usando i g_{ij} :

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \left(\frac{du^i}{dt} \right) \left(\frac{du^j}{dt} \right)} dt$$

Per la sfera in coord. geografiche

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \alpha du^2 + R^2 dv^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

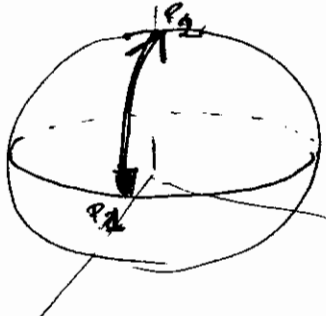


da cui, sulle sfera,

$$L = \int_a^b \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + R^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt =$$

$$= R \int_a^b \sqrt{\cos^2 \alpha \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

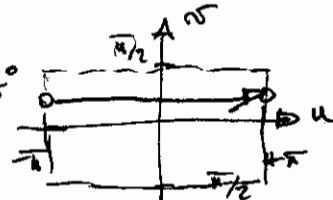
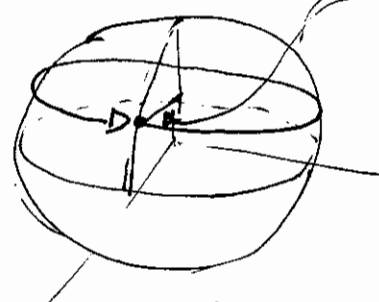
Caso 1



da $P_1 \equiv (0,0) \rightarrow P_2 \equiv (0, \pi/2) \rightarrow w \equiv 0$
 $v \equiv \frac{\pi}{2} \cdot t$
 con $t \in [0,1]$

$$L = R \int_0^1 \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot 0 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} dt = R \cdot \frac{\pi}{2}$$

Caso 2



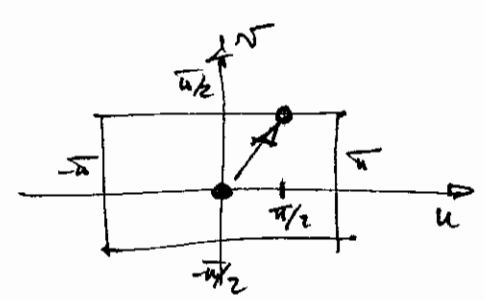
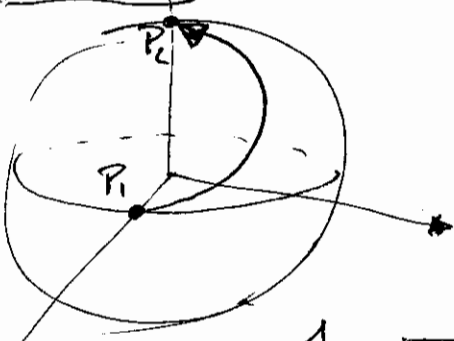
$u = 2\pi \cdot t$

$v = v_0$
 u da $-\pi$ a $+\pi$
 (o da ϕ a 2π)
 $t \in [0, 1]$

$$L = R \int_0^1 \sqrt{\cos^2 \alpha_0 \cdot (2\pi)^2 + R^2 \cdot \phi} dt = \underline{2\pi R \cos \alpha_0}$$

\uparrow
 $= \cos t = \alpha_0$

Caso 3



$u = \pi/2 \cdot t$
 $v = \pi/2 \cdot t$ $t \in [0, 1]$

$$L = R \int_0^1 \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot t\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} dt =$$

$$= R \int_0^1 \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 1} \cdot \frac{\pi}{2} dt \quad \leftarrow \quad \frac{\pi}{2} t \equiv d$$

$$= R \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 d + 1} dd$$

numericamente
 $= 1.91 \cdot R$

$$\int \sqrt{\cos^2 x + 1} dx = \sqrt{2} E(x | \frac{1}{2})$$

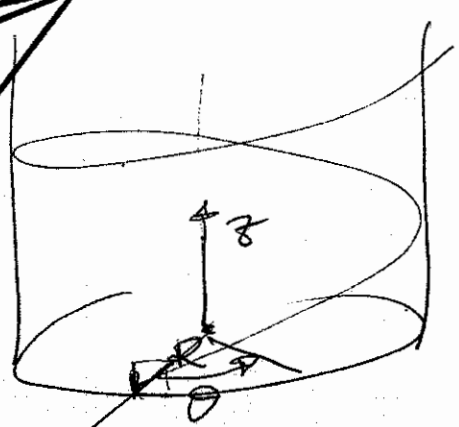
$E(x|m)$ integrale ellittico di 2° tipo

Vedi ad esempio

Wolfram integrator

SAT 2002

geodetiche
cilindro



u^1, u^2
 (θ, z)

$R = \text{cost}$

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = R^2$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right)$$

$$\Gamma^1_{jk} = \frac{1}{2} g^{1r} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right)$$

tutte le Γ sono nulle! ($g_{ij} = \text{cost}$ e $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$)

resta

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

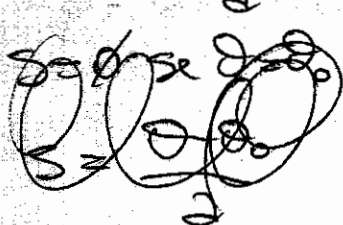
$$\theta = aS + b$$

$$z = cS + d$$

es. di una
elica

$$S = \frac{\theta - b}{a}$$

$$z = \frac{c}{a} (\theta - b) + d \rightarrow \boxed{z = d\theta + \beta}$$



$$z_0 = a\theta_0 + \beta$$

$$\beta = z_0 - a\theta_0$$

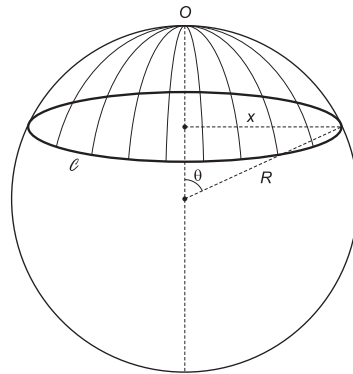
$$z = a\theta + z_0 - a\theta_0 \rightarrow \boxed{z = z_0 + a(\theta - \theta_0)}$$

che è appunto l'equazione di una retta in coordinate polari (h rappresenta la distanza minima della retta dall'origine, ottenuta per $\theta = \theta_0$).

Abbiamo definito le geodetiche su una superficie (che sono le analoghe alle rette nel piano cartesiano). Sappiamo che, sul piano, la circonferenza \mathcal{C} di un cerchio di raggio a è $C = 2\pi a$.

In modo analogo, su una superficie qualsiasi, per definire un cerchio di raggio a e centro O , tracciamo a partire da questo punto tutte le geodetiche e segniamo su ognuna il punto che dista da O di un'ascissa curvilinea pari ad a ; il luogo di tutti questi punti è la circonferenza richiesta, lungo la quale mi posso muovere (sempre lungo la superficie) e, con lo stesso regolo con cui misuro $s = a$, misurarne la lunghezza \mathcal{C} .

Vediamolo per una sfera di raggio R .



Avrò evidentemente (questo lo so perchè "vedo la sfera" in \mathbf{E}^3)

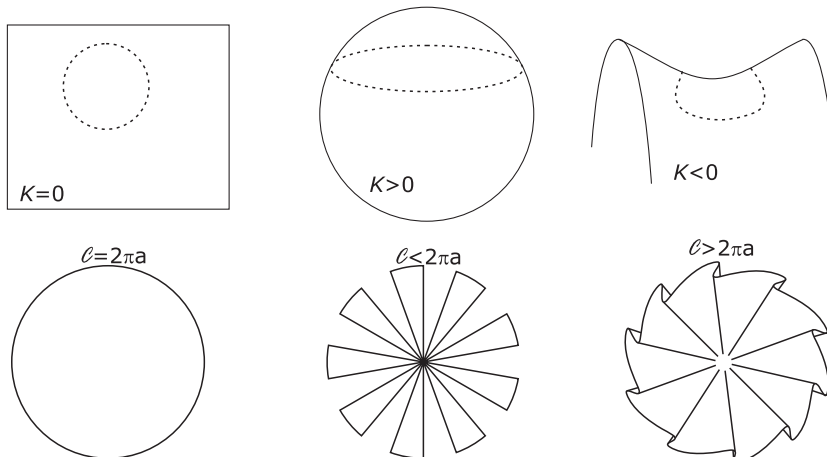
$$C = 2\pi x = 2\pi R \sin\left(\frac{a}{R}\right) \simeq 2\pi R \left[\frac{a}{R} - \frac{1}{6} \frac{a^3}{R^3} + \dots\right] = 2\pi a - \frac{\pi}{3} \frac{a^3}{R^2} + \mathcal{O}(a^5)$$

Ma so che per la sfera $1/R^2 = K$ e, se $a \rightarrow 0$, posso trascurare i termini di ordine superiore, per cui posso scrivere:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi a - C}{a^3} \right)$$

Questo risultato, che vale in generale, ci mostra come effettivamente, con misure condotte *sulla* superficie, io posso ricavare la curvatura di Gauss K .

Per il piano $2\pi a = C$ e $K = 0$; per la sfera $2\pi a > C$ e $K > 0$; in un punto di sella $2\pi a < C$ e $K < 0$.



La curvatura di Gauss è quindi una proprietà *intrinseca* e *locale* di una superficie. Poichè il risultato non dipende dal particolare sistema di coordinate utilizzato sulla superficie, K è una quantità invariante (come il ds^2 , ad esempio), anche se può cambiare da punto a punto sulla superficie (invariante non significa costante).

Come si fa a determinare K a partire da g_{ij} ? Poichè il tensore metrico è quello che contiene l'informazione sulle distanze, e misurando queste ottengo K , ci deve essere un legame tra le due grandezze. Vediamo che K deve dipendere dalle derivate seconde (almeno) di g_{ij} in un punto. Questo deriva dal fatto che K è invariante, non dipende dal sistema di coordinate usato, ed è una quantità locale, cioè dipende dal comportamento di g_{ij} in un intorno infinitesimo del punto scelto.

Ma in un intorno infinitesimo di un punto io posso sempre scegliere un sistema di coordinate in cui g_{ij} è del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed in cui le derivate $g_{ij,k}$ sono nulle. Lo chiameremo *sistema localmente euclideo*.

Vediamo come questo sia, in principio, possibile. Ricordiamo che la trasformazione da g_{ij} a g'_{kl} è:

$$g'_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij}$$

ed espandiamo g'_{kl} attorno al punto x_0 :

$$g'_{kl}(x) = g'_{kl}(x_0) + g'_{kl,m}(x_0)(x^m - x_0^m) + \frac{1}{2}g'_{kl,mn}(x_0)(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) + \dots$$

dove

$$g'_{kl}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} \cdot g_{ij} \right]_{x_0}$$

$$g'_{kl,m}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^m \partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}$$

$$= \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} \quad \text{per la simmetria tra } i \text{ e } j \text{ e } k \text{ e } l$$

$$g'_{kl,mn}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,mn} \right]_{x_0} + \left[2 \frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \text{derivate prime, seconde e terze...}$$

Se voglio, con un'opportuna trasformazione di coordinate, mettere g'_{kl} in una forma voluta in un intorno di x_0 , ho a disposizione e devo specificare le seguenti quantità nella trasformazione:

	2 - D	3 - D	4 - D	N - D
$\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \right)_{x_0}$	$2 \times 2 = 4$	9	16	N^2
$\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \right)_{x_0}$	$2 \times 3 = 6$	18	40	$\frac{N^2(N+1)}{2}$
$\left(\frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \right)_{x_0}$	$2 \times 4 = 8$	30	80	$\frac{N^2(N+1)(N+2)}{6}$

D'altro canto, il numero dei valori e delle derivate indipendenti del tensor metrico è il seguente:

	2 - D	3 - D	4 - D	N - D
$g'_{kl}(x_0)$	3	6	10	$\frac{N(N+1)}{2}$
$g'_{kl,m}(x_0)$	6	18	40	$\frac{N^2(N+1)}{2}$
$g'_{kl,mn}(x_0)$	9	36	100	$\left[\frac{N(N+1)}{2} \right]^2$

Vediamo di trarre da questo le debite conclusioni per due, tre e quattro dimensioni:

- **2-D:** Se voglio fissare dei valori di $g'_{kl}(x_0)$ ho 3 equazioni per 4 coefficienti: mi rimane un grado di libertà che, correttamente, corrisponde ad una rotazione degli assi attorno ad x_0 nel piano. Se poi voglio che $g'_{kl,m}(x_0) \equiv 0$, ho 6 equazioni e 6 parametri, quindi lo posso fare. Se volessi anche $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$, noto che ho 9 equazioni ma solo 8 parametri, e in generale il sistema è troppo condizionato per aver soluzioni: non è possibile quindi annullare localmente anche le derivate seconde della metrica.

- **3-D**: Ho 6 equazioni per 9 parametri: per fissare $g'_{kl}(x_0)$: ho 3 gradi di libertà corrispondenti alla rotazione del sistema di coordinate nello spazio (esempio: i tre angoli di Eulero). Posso porre $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ (18 equazioni in 18 incognite), ma non $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (36 equazioni e 30 incognite)
- **4-D** (spazio di Minkowski): 10 equazioni per 16 parametri per fissare $g'_{kl}(x_0)$: ho 6 gradi di libertà corrispondenti a 3 rotazioni e 3 trasformazioni di Lorentz della velocità. Posso avere $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ con 40 equazioni e 40 incognite, mentre non si può avere $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (100 equazioni e 80 incognite).

Poichè posso sempre mettere g_{ij} nella forma δ_{ij} ed avere $g_{ij,k} = 0$ in un punto, la curvatura dovrà dipendere dalle derivate seconde di g_{ij} . E la forma di dipendenza più semplice sarebbe quella lineare: vediamo se troviamo qualcosa del genere. Prima di farlo, però, dobbiamo affrontare un'altra questione.

2.3 Derivata covariante

Abbiamo visto che la derivata (il gradiente) di un campo scalare ϕ , $\partial\phi/\partial u^i$, è un vettore covariante. Potremmo allora pensare di derivare un campo vettoriale $A_i(u^k)$, ottenendo un tensore di rango due. *Ma non è così*. Il differenziale dA_i di un vettore A_i , ingrediente essenziale del rapporto incrementale, non si comporta in generale come un tensore. Infatti dalla legge di trasformazione

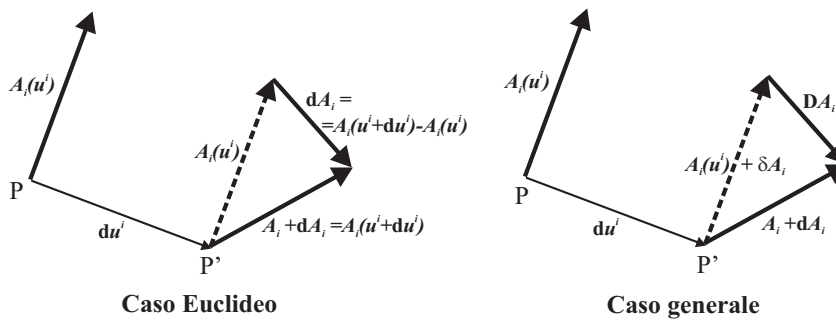
$$A_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} A'_k$$

discende che

$$dA_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial u'^k}{\partial u^i} = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + \frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} A'_k du^l$$

Vediamo che dA_i è un vettore soltanto se $\frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} = 0$, cioè se le u'^i sono funzioni lineari delle u^i (come quando passo da un sistema di coordinate rettilinee ad un altro).

Perchè dA_i non è un vettore? Perchè la differenza $dA_i = A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)$ è la differenza di due vettori che si trovano *in due punti diversi* (anche se infinitamente vicini). I due vettori $A_i(u^i + du^i)$ e $A_i(u^i)$ si trasformano quindi in modo diverso poichè i coefficienti delle trasformazioni dipendono dalla posizione. Affinchè la differenza di due vettori sia un tensore è necessario che i due vettori siano confrontati *nello stesso punto* (in questo caso entrambi, e quindi anche la loro differenza, si trasformano allo stesso modo). Per avere quindi una derivata che si comporti come un tensore occorre definire un nuovo tipo di derivata, la *derivata covariante*.



In uno spazio Euclideo, la derivata del vettore $A_i(u^i)$ si esegue spostando $A_i(u^i)$ parallelamente a sè stesso e lasciando invariati modulo e verso, fino a far coincidere il suo punto di applicazione con quello di $A_i(u^i + du^i)$. Poi, nel punto P' , si esegue la differenza e si calcola il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{du^i \rightarrow 0} \frac{A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)}{du^i}$$

Come si può fare qualcosa di analogo in uno spazio non Euclideo? In questo caso definiamo come spostamento parallelo da u^i a $u^i + du^i$ quello spostamento che produce una variazione del vettore A_i delle quantità δA_i tali che, passando a un sistema localmente Euclideo (cosa, come abbiamo visto, sempre possibile - *localmente*), esse

si annullano: $\delta A_i = 0$. Quindi, in P' , avremo $A_i + dA_i \equiv A_i(u^i + du^i)$ ed anche $A_i + \delta A_i$, corrispondente al trasporto parallelo di $A_i(u^i)$ da P a P' . La differenza

$$DA_i = (A_i + dA_i) - (A_i + \delta A_i) = dA_i - \delta A_i$$

è un vettore, perchè è la differenza di due vettori che si trovano nello stesso punto. Si può quindi usare DA_i per definire il nuovo tipo di derivazione.

Resta ora da determinare δA_i . Se imponiamo che DA_i (*differenziale assoluto*) sia lineare come i differenziali ordinari, δA_i dovrà dipendere linearmente sia dal vettore trasportato A_i che dallo spostamento du^i , per cui potremo scrivere

$$\delta A_i = \Delta_{il}^m A_m du^l$$

dove le quantità Δ_{il}^m sono funzioni delle coordinate e dipendono dal sistema di riferimento. Nel sistema localmente Euclideo i Δ_{il}^m sono nulli, ma non lo saranno in generale, per cui vedo che i Δ_{il}^m non rappresentano un tensore (ricordiamo che un tensore nullo in un sistema di riferimento rimane nullo in tutti gli altri). Questo ci fa pensare ad un altro oggetto a tre indici che non è un tensore, cioè la connessione affine. Come verificheremo tra poco è infatti $\Delta_{il}^m \equiv \Gamma_{il}^m$, per cui $\delta A_i = \Gamma_{il}^m A_m du^l$. Allora

$$DA_i = dA_i - \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial u^l} du^l - \Gamma_{il}^m A_m du^l$$

e la derivata covariante $DA_i/\partial u^l$, indicata anche con $A_{i;l}$, sarà

$$\frac{DA_i}{\partial u^l} = A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m$$

La derivata covariante di un tensore si può ricavare considerando questo come il prodotto di due vettori e richiedendo che essa soddisfi la regola di *Leibniz* per la derivazione di un prodotto. Allora, se $T_{ik} \equiv A_i B_k$

$$\begin{aligned} T_{ik;l} &= B_k A_{i;l} + A_i B_{k;l} \\ &= B_k \left(\frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m \right) + A_i \left(\frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^m B_m \right) = \\ &= B_k \frac{\partial A_i}{\partial u^l} + A_i \frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m B_k - \Gamma_{kl}^m A_i B_m = \\ &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m T_{mk} - \Gamma_{kl}^m T_{im} \end{aligned}$$

Questa relazione vale in generale. Osserviamo ora l'espressione

$$A_{i;l} = (g_{ik} A^k)_{;l} = g_{ik;l} A^k + g_{ik} A^k_{;l}$$

Ma $A_{i;l}$ è un tensore, e posso usare il tensor metrico per scriverlo come $A_{i;l} = g_{ik} A^k_{;l}$; se confronto con l'espressione scritta sopra vedo che $g_{ik;l} = 0$. Usiamo ora la relazione per la derivata covariante di un tensore per scrivere esplicitamente questo risultato:

$$g_{ik;l} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} = 0 \quad (1)$$

Facciamo ora, in questa relazione, una rotazione in senso antiorario degli indici i, k, l ed otteniamo

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma_{ki}^m g_{ml} - \Gamma_{li}^m g_{km} = 0 \quad (2)$$

Ed ancora una rotazione degli indici:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \Gamma_{lk}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{lm} = 0 \quad (3)$$

Se ora facciamo (1) + (3) - (2) avremo, sfruttando la simmetria degli indici bassi di Γ_{il}^m e di g_{ik} ,

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} - \Gamma_{lk}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{lm} + \Gamma_{ki}^m g_{ml} + \Gamma_{li}^m g_{km} = 0$$

e semplificando

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - 2\Gamma_{kl}^m g_{im} = 0$$

Moltiplicando ora quest'ultima relazione per $\frac{1}{2}g^{ij}$ si ottiene

$$\frac{1}{2}g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \right) = \Gamma_{kl}^m g_{im} g^{ij} = \Gamma_{kl}^m \delta_m^j = \Gamma_{kl}^j$$

Ritroviamo quindi la relazione che definisce la connessione affine, e con ciò abbiamo verificato l'assunzione $\Delta_{il}^m \equiv \Gamma_{il}^m$.

Consideriamo ora il prodotto scalare $A_i B^i$; essendo una quantità scalare essa non cambia per trasporto parallelo: $\delta(A_i B^i) = 0$ da cui

$$B^i \delta A_i + A_i \delta B^i = 0 \rightarrow A_i \delta B^i = -B^i \delta A_i$$

$$A_i \delta B^i = -B^i \Gamma_{il}^m A_m du^l$$

Essendo i ed m indici muti sommati, li scambio tra loro

$$A_i \delta B^i = -B^m \Gamma_{ml}^i A_i du^l$$

ed essendo A_i un vettore generico, dovrà essere

$$\delta B^i = -\Gamma_{ml}^i B^m du^l$$

da cui la relazione che esprime la derivata covariante per un vettore controvariante:

$$\frac{DB^i}{du^l} = B^i{}_{;l} = \frac{\partial B^i}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^i B^m$$

La regola generale per la derivazione covariante di un tensore di rango arbitrario consiste nel farne la derivata parziale e poi di aggiungere un termine del tipo $+\Gamma$ per ogni indice controvariante ed un termine del tipo $-\Gamma$ per ogni indice covariante.

2.4 Trasporto parallelo e tensore di curvatura

Sia $u^i = u^i(s)$ l'equazione parametrica di una curva, con s ascissa curvilinea misurata a partire da un certo punto sulla curva. Sappiamo che du^i è un vettore (dalla definizione di vettore controvariante), ds è uno scalare, e $du^i/ds \equiv v^i$ è quindi un vettore. In particolare, v^i è il *versore*¹ *tangente* alla curva.

Se fossi in uno spazio Euclideo, per definire una geodetica come un segmento di linea retta, direi che il versore tangente non cambia con s :

$$\frac{dv^i}{ds} = 0$$

Se ora voglio generalizzare questa relazione ad uno spazio qualsiasi, a 2 o più dimensioni, devo usare non la derivata normale, ma quella covariante:

$$\frac{Dv^i}{ds} = 0$$

Esplicitando i termini

$$\frac{Dv^i}{ds} = \frac{Dv^i}{du^l} \frac{du^l}{ds} = \frac{du^l}{ds} \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^i v^m \right) = 0$$

¹Per verificare che v^i è un versore, vediamo quanto vale il suo modulo eseguendo il prodotto scalare $v_i v^i$:

$$v_i v^i = g_{ij} v^i v^j = g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \equiv 1 \quad \text{da} \quad ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

cioè

$$\begin{aligned}\frac{\partial v^i}{\partial u^l} \frac{du^l}{ds} + \Gamma_{ml}^i v^m \frac{du^l}{ds} &= 0 \\ \frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{ml}^i v^m v^l &= 0\end{aligned}$$

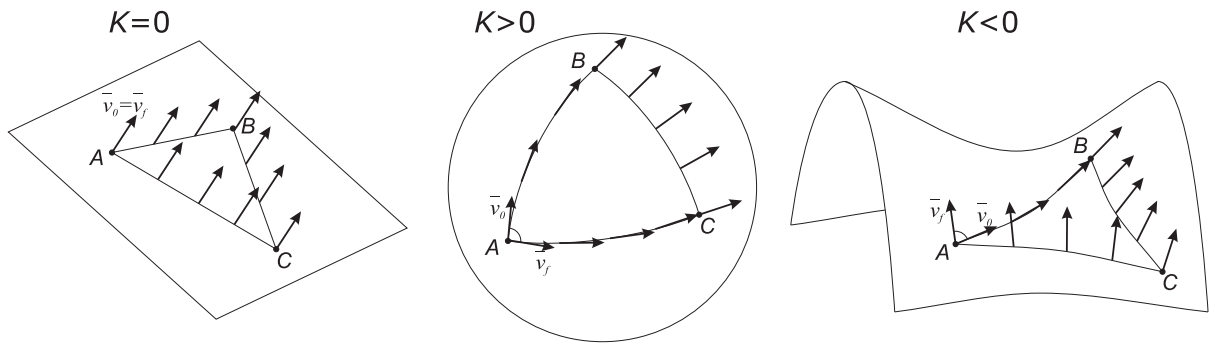
da cui, ricordando che $du^i/ds \equiv v^i$, abbiamo

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ml}^i \frac{du^m}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

Ritroviamo cioè la nostra equazione della geodetica (anche a riprova del fatto che, passando dal caso Euclideo a quello generale, si devono sostituire le derivate “normali” con quelle covarianti).

Vediamo che lungo la geodetica $Dv^i = 0$, cioè $dv^i = \delta v^i$: il vettore v^i , trasportato parallelamente da un punto u^i sulla geodetica ad un punto $u^i + du^i$ sulla stessa geodetica, coincide con il vettore $v^i + dv^i$, tangente alla geodetica nel punto $u^i + du^i$. Consideriamo ora un vettore A_i che viene trasportato parallelamente lungo la stessa geodetica. L'angolo che esso forma con v^i , vettore tangente, sarà dato dal prodotto scalare $A_i v^i$. Ma uno scalare non cambia per trasporto parallelo, per cui lungo la geodetica l'angolo tra A_i e v^i resta costante: *un vettore trasportato parallelamente lungo una geodetica forma sempre lo stesso angolo con la tangente alla curva.*

Immaginiamo ora di trasportare parallelamente un vettore \bar{v}_0 lungo un triangolo formato da pezzi di geodetica. Se siamo in uno spazio Euclideo (ad esempio su un piano) il vettore \bar{v}_f che ottengo dopo aver chiuso il cammino coinciderà con \bar{v}_0 .



La stessa cosa non accade lungo un triangolo sferico: il vettore appare ruotato di un angolo che ha lo stesso verso di rotazione del verso in cui ho percorso il triangolo sferico. L'opposto accade se $K < 0$. Possiamo vedere la cosa anche in un altro modo: immaginiamo di andare da un punto A ad un punto B sia direttamente che passando per un punto C , sempre lungo archi di geodetica. Nello spazio Euclideo il risultato del trasporto parallelo lungo i due percorsi è il medesimo, ma la stessa cosa non accade sulle superfici curve (quanto qui detto per un triangolo formato da archi di geodetica vale per un percorso generico, che si può pensare come costituito da un gran numero di archetti di geodetica). Il risultato è che, a meno di non essere in uno spazio Euclideo, *non esiste un modo naturale e non ambiguo per muovere un vettore da un punto ad un altro*; possiamo trasportarlo parallelamente, ma il risultato dipende dal cammino, e non c'è una scelta naturale per questo. Quindi *posso confrontare due vettori solamente se sono applicati allo stesso punto*. Ad esempio, due particelle che passano una accanto all'altra hanno una velocità relativa ben definita (e minore di c , con c velocità della luce), ma due particelle in differenti punti di uno spazio generico non hanno una velocità relativa ben definita.

Vediamo di quantificare quanto detto sopra in modo qualitativo. Muovendosi lungo un cammino chiuso formato da archi di geodetica, un vettore A_k trasportato parallelamente subirà, tornando al punto di partenza, una variazione

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma_{km}^i A_i du^m$$

Per risolvere l'integrale usiamo il Teorema di Stokes²

$$\oint A_i du^i = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left(\frac{\partial A_m}{\partial u^l} - \frac{\partial A_l}{\partial u^m} \right) df^{lm}$$

²vedi Landau Lifsic, *Teoria dei Campi*, eq. (6.19)

dove df^{lm} è un tensore che corrisponde alla proiezione dell'elemento di area della superficie sui piani coordinati. Nel nostro caso $A_m du^m \rightarrow \Gamma_{km}^i A_i du^m$ per cui

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left[\frac{\partial (\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial u^l} - \frac{\partial (\Gamma_{kl}^i A_i)}{\partial u^m} \right] df^{lm}$$

Se supponiamo che la superficie delimitata dalla curva chiusa sia infinitesima (una superficie finita si può scomporre in elementi infinitesimi), l'integrando sarà costante, a meno di infinitesimi di ordine superiore, e potremo scrivere

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^m} \right] \Delta f^{lm}$$

Siccome A_i viene spostato parallelamente sulla curva

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^l} = \frac{\delta A_i}{\delta u^l} = \Gamma_{il}^n A_n$$

Allora

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \Delta f^{lm} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{il}^n A_n - \Gamma_{kl}^i \Gamma_{im}^n A_n \right] = \\ &= \frac{1}{2} A_i \Delta f^{lm} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right] \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio, in cui si è esplicitato A_i , è stato ottenuto scambiando tra loro gli indici muti i ed n nei termini con i prodotti delle connessioni affini. La quantità in parentesi graffa è un tensore, poichè lo sono A_i , Δf^{lm} e ΔA_k (differenza di due vettori applicati allo stesso punto). Ad essa si dà il nome di **tensore di Riemann - Christoffel** o **tensore di curvatura**:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i$$

(Nota bene: talvolta lo si trova definito con i segni scambiati) Se in un punto, o una zona di spazio, $R_{klm}^i = 0$, allora $\Delta A_k = 0$: il trasporto parallelo lungo una curva chiusa lascia il vettore inalterato, e la zona di spazio si dice **piatta**. Questo accade in uno spazio Euclideo, come anche in qualunque (zona di) spazio in cui g_{ij} sia costante, perchè le connessioni affini sono nulle e così pure il tensore di curvatura; e poichè un tensore uguale a zero in un sistema di coordinate rimane nullo in qualunque sistema di coordinate, allora $R_{klm}^i = 0$ in qualunque sistema di riferimento. Se invece $R_{klm}^i \neq 0$ il trasporto parallelo dipende dal percorso, e lo spazio (o la zona di spazio) si dice, per contrasto, **curvo** (da qui in nome di tensore di curvatura).

2.5 Proprietà del tensore di curvatura

Si può dimostrare che R_{klm}^i è l'unica quantità tensoriale che può essere costruita dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, e che è lineare nelle derivate seconde (e anche quadratico nelle derivate prime). Del tensor metrico si può scrivere la forma totalmente covariante $R_{ijklm} = g_{ji} R_{klm}^i$.

Consideriamo il tensore R_{klm}^i come scritto sopra, e mettiamoci nel sistema localmente euclideo in cui, nel punto u^i , risulta $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$. Allora le connessioni affini sono nulle, e le derivate covarianti si riducono a semplici derivate parziali. In questo sistema

$$R_{klm;j}^i = \frac{\partial}{\partial u^j} (R_{klm}^i) = \frac{\partial^2 \Gamma_{km}^i}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^i}{\partial u^j \partial u^m}$$

(si annullano in u^i le connessioni affini, ma non necessariamente le loro derivate). ermutando ciclicamente gli indici l , m e j otteniamo:

$$R_{kmj;l}^i = \frac{\partial^2 \Gamma_{kj}^i}{\partial u^l \partial u^m} - \frac{\partial^2 \Gamma_{km}^i}{\partial u^l \partial u^j}$$

e ancora

$$R_{kjl;m}^i = \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m \partial u^j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kj}^i}{\partial u^m \partial u^l}$$

Esempio: geodetiche sulle sfere

(651)

Se $v^i \equiv \frac{dx^i}{ds}$ è il vettore tangente alla traiettoria, l'eq. delle geodetiche si scrive come

$$\left| \frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{me}^i v^m v^e = 0 \right|$$

Prima di procedere dimostriamo una proprietà che ci sarà utile:

- Date un'eq. differenziale (con condizione iniziale) del tipo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

le sue soluzioni è $y(x) \equiv 0$

Per dimostrarlo consideriamo il problema simile

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) y \\ y(0) = \varepsilon \end{cases}$$

Integrando per separazione di variabili abbiamo

$$\int_{\varepsilon}^{y(x)} \frac{dy'}{y'} = \int_0^x f(x') dx' \equiv g(x) \text{ funzione finita}$$

La soluzione sarà $\ln y(x) - \ln \varepsilon = g(x)$

cioè $y(x) = \varepsilon e^{g(x)}$

Se $\varepsilon \rightarrow 0$, $y(x) \rightarrow 0 \quad \forall$ valore di x c.v.d.

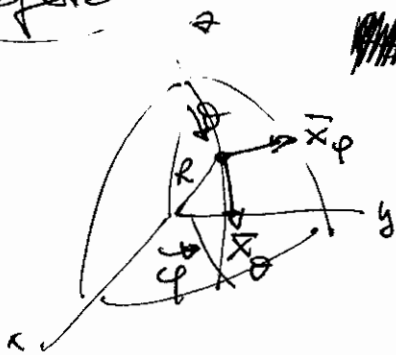
$$v^i \equiv \frac{dx^i}{ds}$$

verschiebung

(GS2)

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{me}^i v^m v^e = 0 \quad \leftarrow \text{geodesische}$$

Sphäre



$$u^1 = \theta \quad u^2 = \varphi$$

$$\bar{x} = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_\theta = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta)$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_\varphi = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$g_{\theta\theta} = \bar{x}_\theta \cdot \bar{x}_\theta = R^2$$

$$g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g = R^4 \sin^2 \theta$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad \leftarrow \underline{R = \text{konstante!}}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right) \quad \begin{matrix} u^1 = \theta \\ u^2 = \varphi \end{matrix}$$

$$\Gamma_{jk}^1 = \frac{1}{2} g^{1l} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(- \frac{\partial (R^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} \right) = - \frac{1}{2} \frac{\partial \sin^2 \theta}{\partial \theta}$$

also

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = - \sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{jk}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} \right)$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0 \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial (R^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0$$

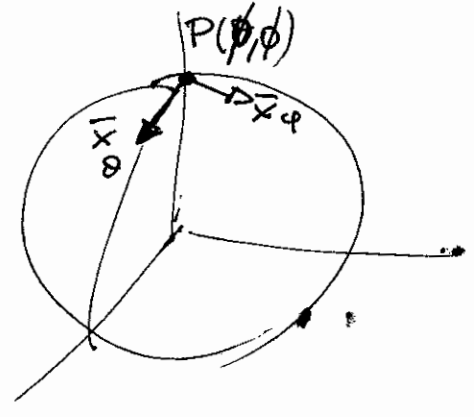
Eq. geodetiche:

$$\begin{cases} \text{I) } \frac{d\sigma^\theta}{ds} = \sin \theta \cos \theta (\sigma^\varphi)^2 \\ \text{II) } \frac{d\sigma^\varphi}{ds} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \sigma^\varphi \sigma^\theta \end{cases}$$

NB: $\begin{cases} \theta = \theta(s) \\ \varphi = \varphi(s) \end{cases}$

Consideriamo la geodetica che parte dal polo $P \equiv (\theta, \varphi)$, in cui il vettore \hat{v} iniziale ha

$$\text{componenti } \hat{v} \equiv \begin{cases} \sigma^\theta = 1 \\ \sigma^\varphi = \varphi \end{cases}$$



Dalla II

$$\begin{cases} \frac{d\sigma^\varphi}{ds} = (\dots) \cdot \sigma^\varphi = f(s) \cdot \sigma^\varphi \\ \sigma^\varphi(s=\varphi) = \varphi \quad \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

Per punto $v=8\text{to}$ in GS1 questo implica che

$$\sigma^\varphi(s) \equiv 0 \quad \forall s$$

della I, essendo $\sigma^\varphi(s) = 0$, si ha

↳ G54

$$\frac{d\sigma^\theta}{ds} \equiv 0, \text{ cioè } \sigma^\theta(s) = \cos t = \sigma^\theta(\phi) = 1$$

Quindi il vettore tangente alle geodetiche mantiene invariata le sue componenti: $\sigma^\theta = 1$ e $\sigma^\varphi = 0$ e lo spostamento avviene lungo un meridiano, cioè un arco di cerchio massimo. Infatti: $\sigma^\varphi = 0$ significa che $\sigma^\varphi = \frac{d\varphi}{ds} = 0 \Rightarrow \varphi = \cos t = \phi$ (valore iniziale)

Questo discorso vale per ogni punto P della sfera, perché posso sempre fare una rotazione che porta P al polo. Quindi tutte le geodetiche sulla sfera sono archi di cerchio massimo.



Vediamo di quantificare quanto detto sopra in modo qualitativo. Muovendosi lungo un cammino chiuso formato da archi di geodetica, un vettore A_k trasportato parallelamente subirà, tornando al punto di partenza, una variazione

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma_{km}^i A_i du^m$$

Per risolvere l'integrale usiamo il Teorema di Stokes³

$$\oint A_i du^i = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left(\frac{\partial A_m}{\partial u^l} - \frac{\partial A_l}{\partial u^m} \right) df^{lm}$$

dove df^{lm} è un tensore che corrisponde alla proiezione dell'elemento di area della superficie sui piani coordinati. Nel nostro caso $A_m du^m \rightarrow \Gamma_{km}^i A_i du^m$ per cui

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left[\frac{\partial (\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial u^l} - \frac{\partial (\Gamma_{kl}^i A_i)}{\partial u^m} \right] df^{lm}$$

Se supponiamo che la superficie delimitata dalla curva chiusa sia infinitesima (una superficie finita si può scomporre in elementi infinitesimi), l'integrando sarà costante, a meno di infinitesimi di ordine superiore, e potremo scrivere

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^m} \right] \Delta f^{lm}$$

Siccome A_i viene spostato parallelamente sulla curva

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^l} = \frac{\delta A_i}{\partial u^l} = \Gamma_{il}^n A_n$$

Allora

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \Delta f^{lm} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{il}^n A_n - \Gamma_{kl}^i \Gamma_{im}^n A_n \right] = \\ &= \frac{1}{2} A_i \Delta f^{lm} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right] \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio, in cui si è esplicitato A_i , è stato ottenuto scambiando tra loro gli indici muti i ed n nei termini con i prodotti delle connessioni affini. La quantità in parentesi graffa è un tensore, poichè lo sono A_i , Δf^{lm} e ΔA_k (differenza di due vettori applicati allo stesso punto). Ad essa si dà il nome di **tensore di Riemann - Christoffel** o **tensore di curvatura**:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i$$

(Nota bene: talvolta lo si trova definito con i segni scambiati) Se in un punto, o una zona di spazio, $R_{klm}^i = 0$, allora $\Delta A_k = 0$: il trasporto parallelo lungo una curva chiusa lascia il vettore inalterato, e la zona di spazio si dice **piatta**. Questo accade in uno spazio Euclideo, come anche in qualunque (zona di) spazio in cui g_{ij} sia costante, perchè le connessioni affini sono nulle e così pure il tensore di curvatura; e poichè un tensore uguale a zero in un sistema di coordinate rimane nullo in qualunque sistema di coordinate, allora $R_{klm}^i = 0$ in qualunque sistema di riferimento. Se invece $R_{klm}^i \neq 0$ il trasporto parallelo dipende dal percorso, e lo spazio (o la zona di spazio) si dice, per contrasto, **curvo** (da qui in nome di tensore di curvatura).

2.5 Proprietà del tensore di curvatura

Si può dimostrare che R_{klm}^i è l'unico tensore che può essere costruito dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, e che è lineare nelle derivate seconde (e anche quadratico nelle derivate prime). Del tensor metrico si può scrivere la forma totalmente covariante $R_{jklm} = g_{ji} R_{klm}^i$.

³vedi Landau Lifsic, *Teoria dei Campi*, eq. (6.19)

Consideriamo il tensore R^i_{klm} come scritto sopra, e mettiamoci nel sistema localmente euclideo in cui, nel punto u^i , risulta $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$. Allora le connessioni affini sono nulle, e le derivate covarianti si riducono a semplici derivate parziali. In questo sistema

$$R^i_{klm;j} = \frac{\partial}{\partial u^j} (R^i_{klm}) = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{km}}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kl}}{\partial u^j \partial u^m}$$

(si annullano in u^i le connessioni affini, ma non necessariamente le loro derivate). Permutando ciclicamente gli indici l , m e j otteniamo:

$$R^i_{kmj;l} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kj}}{\partial u^l \partial u^m} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{km}}{\partial u^l \partial u^j}$$

e ancora

$$R^i_{kjl;m} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kl}}{\partial u^m \partial u^j} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kj}}{\partial u^m \partial u^l}$$

Sommando le tre relazioni, è facile vedere che si ottiene:

$$R^i_{klm;j} + R^i_{kmj;l} + R^i_{kjl;m} = 0.$$

Questa è la cosiddetta *Identità di Bianchi*. Ricordiamo che, anche se l'abbiamo ricavata nel sistema localmente euclideo, essendo una relazione tensoriale, essa vale in tutti i sistemi di riferimento.

Possiamo abbassare l'indice controvariante con il tensor metrico e otteniamo

$$R_{iklm;j} + R_{ikmj;l} + R_{ikjl;m} = 0.$$

Il tensore di Riemann presenta delle proprietà, vediamole nella versione completamente covariante $R_{jklm} = g_{ji} R^i_{klm}$:

- Proprietà di *simmetria*

$$R_{jklm} = R_{lmjk}$$

- Proprietà di *antisimmetria*

$$R_{jklm} = -R_{kjl m} = -R_{j k m l} = R_{k j m l}$$

- Proprietà di *ciclicità*

$$R_{jklm} + R_{jmkl} + R_{jlmk} = 0.$$

Dal tensore di Riemann, per contrazione, si può ricavare un tensore di rango 2, il *tensore di Ricci*, definito come:

$$R_{km} \equiv R^i_{kim}$$

(si contraggono gli indici i ed l di R^i_{klm}). Per le proprietà di antisimmetria, se in R^i_{klm} contraggo invece i ed m riottengo il tensore di Ricci, ma con il segno cambiato:

$$R^i_{kli} = -R^i_{kil} = -R_{kl}$$

Il tensore di Ricci è simmetrico:

$$R_{mk} = R^i_{mik} = g^{ir} R_{rmik} = g^{ir} R_{ikrm} = R^r_{krm} = R_{km}$$

Esso è l'unico tensore simmetrico di rango 2 che si può ottenere da R^i_{klm} . Dal tensore di Ricci si ricava lo *scalare di Ricci* o *scalare di curvatura*:

$$R = g^{km} R_{km}$$

Esso è il solo scalare che si può ottenere da R^i_{klm} .

Le proprietà sopra evidenziate del tensore di Riemann fanno sì che, in N dimensioni, il numero delle sue componenti indipendenti sia $\mathcal{N} = \frac{N^2(N^2-1)}{12}$. In particolare:

- Per $N = 1$, $\mathcal{N} = 0$ ed $R_{1111} \equiv 0$ sempre: una curva ha sempre curvatura (intrinseca) nulla, non ho informazioni su come la curva è "embedded" in uno spazio a 2 o più dimensioni.
- Per $N = 2$, $\mathcal{N} = 1$. C'è un'unica componente indipendente, ad esempio R_{1212} .

- Per $N = 3$, $\mathcal{N} = 6$, tante quante sono le componenti del tensore di Ricci (simmetrico). Quindi per $N = 3$ basta conoscere R_{km} per descrivere la curvatura di uno spazio.
- Per $N = 4$, $\mathcal{N} = 20$, mentre R_{km} ha 10 componenti soltanto. È necessario ricorrere al tensore $R^i{}_{klm}$ completo (a parte situazioni di particolari simmetria, e vedremo che così sarà nel caso dell'universo isotropo ed omogeneo).

Dall'identità di Bianchi, nella forma covariante, sfruttando le proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann, si ha

$$R_{iklm;j} - R_{kimj;l} - R_{iklj;m} = 0 \quad / \cdot g^{il} g^{km}$$

$$g^{km} R^l{}_{klm;j} - g^{il} R^m{}_{imj;l} - g^{km} R^l{}_{klj;m} = 0$$

cioè

$$g^{km} R_{km;j} - g^{il} R_{ij;l} - g^{km} R_{kj;m} = 0$$

da cui

$$R_{;j} - R^l{}_{j;l} - R^m{}_{j;m} = R_{;j} - 2R^l{}_{j;l} = 0$$

dalla quale si ha

$$R^l{}_{j;l} = \frac{1}{2} R_{;j} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial u^j}$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che R è uno scalare, non dipende quindi dal sistema di riferimento usato, e la sua derivata covariante coincide con la semplice derivata parziale. La quantità $R^l{}_{j;l}$ rappresenta la *divergenza* (covariante) del tensore di Ricci. Consideriamo ora il tensore misto

$$R^l{}_j - \frac{1}{2} \delta^l{}_j R$$

La sua divergenza sarà (per la regola della derivazione di un prodotto ed essendo $\delta^l{}_{j;l} = 0$ ⁴)

$$R^l{}_{j;l} - \frac{1}{2} \delta^l{}_j \frac{\partial R}{\partial u^l} = R^l{}_{j;l} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial u^j} = 0$$

per quanto visto poco sopra. Il tensore in questione ha quindi divergenza (covariante) nulla. Se passiamo alle componenti covarianti otteniamo

$$g_{il} R^l{}_j - \frac{1}{2} g_{il} \delta^l{}_j R = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \equiv G_{ij}$$

dove G_{ij} è detto *tensore di Einstein*. Questo tensore ha importantissime proprietà: è *simmetrico*, ha *divergenza nulla* e, derivando dal tensore di Riemann, contiene *termini lineari nelle derivate seconde* della metrica e *quadratici nelle sue derivate prime*.

2.6 Il Theorema Egregium

In 2 dimensioni il *Theorema Egregium* di Gauss afferma che la curvatura di Gauss K si può ricavare a partire dal tensor metrico; in particolare, si ha che $K = R_{1212}/g$.

Diamo qui una giustificazione del Theorema Egregium. Abbiamo visto che, localmente, in un intorno del punto P , un elemento di superficie si può scrivere nella forma

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$$

che, messo nella forma $\bar{x}(u, v)$, si può esprimere come ($x \equiv u$, $y \equiv v$):

$$\bar{x}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{2\rho_1} + \frac{v^2}{2\rho_2} \right); \quad \bar{x}_u = \left(1, 0, \frac{u}{\rho_1} \right) \quad \bar{x}_v = \left(0, 1, \frac{v}{\rho_2} \right)$$

⁴ $\delta^l{}_{j;l} = \frac{\partial \delta^l{}_j}{\partial u^l} + \Gamma^l{}_{lk} \delta^k{}_j - \Gamma^m{}_{jl} \delta^l{}_m = \Gamma^l{}_{lj} - \Gamma^l{}_{jl} = 0$

$$\begin{aligned}
E &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} \\
F &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} \\
G &= \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 1 + \frac{v^2}{\rho_2^2}
\end{aligned}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{u^2}{\rho_1^2}\right) du^2 + 2 \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} du dv + \left(1 + \frac{v^2}{\rho_2^2}\right) dv^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} & \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} \\ \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} & 1 + \frac{v^2}{\rho_2^2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad g = \det(g_{ij}) = 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} + \frac{v^2}{\rho_2^2}$$

Notiamo che, in P , $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $g_{ij,k} = 0$ e sono le derivate seconde ad essere non nulle

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{\rho_2^2} & -\frac{uv}{\rho_1 \rho_2} \\ -\frac{uv}{\rho_1 \rho_2} & 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} \end{pmatrix} \quad K|_P = \frac{R_{1212}|_P}{g|_P}$$

$R_{1212} = g_{1k} R_{212}^k = g_{11} R_{212}^1 + g_{12} R_{212}^2$ ma in P $g_{12} = 0$ e $g_{11} = 1$, cioè $R_{1212}|_P \equiv R_{212}^1|_P$

$$R_{212}^1 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^r \Gamma_{r1}^1 - \Gamma_{21}^r \Gamma_{r2}^1$$

ma le Γ contengono le $g_{ij,k}$ che in P sono nulle e rimane

$$R_{212}^1|_P = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} \Big|_P - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial v} \Big|_P$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\sigma} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2g} \left[\left(1 + \frac{v^2}{\rho_2^2}\right) \left(2 \cdot \frac{u}{\rho_1 \rho_2}\right) + \left(-\frac{uv}{\rho_1 \rho_2}\right) \left(\frac{2v}{\rho_2^2}\right) \right] = \frac{u}{g \rho_1 \rho_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\sigma} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u} \right) + g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{u}{g \rho_1 \rho_2} \right] = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{g - u \cdot \frac{2u}{\rho_1^2}}{g^2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \left[\frac{1}{g} - \frac{2u^2}{g^2 \rho_1^2} \right]$$

Finalmente

$$K|_P = \frac{R_{1212}|_P}{g|_P} = \frac{R_{212}^1|_P}{g|_P} = \frac{\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} \Big|_P}{g|_P} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \quad \text{C.V.D.}$$

Il fatto di dividere per g sembra, apparentemente, inessenziale. Ma ricordiamoci che K è uno scalare, cioè un tensore di rango zero, mentre R_{1212} è invece una componente di un tensore, che non è invariante per

LD: tensore di Ricci:

$$R_{11} = g^{il} R_{il11} = g^{11} R_{1111} + g^{12} R_{1121} + g^{21} R_{2111} + g^{22} R_{2121}$$

\uparrow antisimmetria \uparrow idem=0 \uparrow idem=0
 $R_{1111} = -R_{1111}$
 \uparrow
 $= \phi$

$$= g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212}$$

$$R_{12} = R_{21} = g^{il} R_{il12} = g^{11} R_{1112} + g^{12} R_{1122} + g^{21} R_{2112} + g^{22} R_{2122}$$

\downarrow 0 \downarrow 0 \downarrow 0 \downarrow 0

$$= g^{21} R_{2112} = -g^{21} R_{1212}$$

$$R_{22} = g^{il} R_{il22} = g^{11} R_{1212} + g^{12} R_{1222} + g^{21} R_{2212} + g^{22} R_{2222} = g^{11} R_{1212}$$

\downarrow 0 \downarrow 0 \downarrow 0 \downarrow 0

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{12} g^{21} R_{1212} + g^{22} g^{11} R_{1212} =$$

$$= 2 R_{1212} (g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21}) = 2 R_{1212} \det(g^{ij})$$

Ma $g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{g_{22}}{g} & -\frac{g_{21}}{g} \\ -\frac{g_{12}}{g} & \frac{g_{11}}{g} \end{pmatrix} \rightarrow \det(g^{ij}) = \frac{1}{g^2} (g_{22} g_{11} - g_{12} g_{21}) = \frac{g}{g^2} = \frac{1}{g}$

Allora $R = 2 \frac{R_{1212}}{g} \rightarrow \boxed{\frac{R}{2} = \frac{R_{1212}}{g} = K_{\text{Gauss}}}$

trasformazioni di coordinate, e lo stesso vale per g , che non è uno scalare. Tuttavia il loro rapporto si comporta come uno scalare. Il termine g serve anche da normalizzazione [se ad esempio trasformo $x \rightarrow \alpha u \quad y \rightarrow \beta v$ ho $\bar{x}(u, v) = (\alpha u, \beta v, \frac{\alpha^2 u^2}{2\rho_1} + \frac{\beta^2 v^2}{2\rho_2})$ e rifaccio tutti i conti trovo che il fattore $1/g$ nella formula per K è essenziale: $g|_P = \alpha^2 \beta^2$].

Osserviamo che la relazione che esprime il Theorema Egregium, $K = R_{1212}/g$, è una relazione tra tensori di rango zero, cioè scalari. Se, come abbiamo fatto vedere, essa vale in un sistema di riferimento particolare, essa vale in qualunque sistema di riferimento, ed il risultato particolare ottenuto si può estendere in generale.

Questo metodo di provare che una relazione tra tensori vale in un particolare sistema di riferimento e che quindi, avendo a che fare con oggetti tensoriali, essa vale in qualunque sistema di riferimento, è un metodo usato abitualmente nel calcolo tensoriale.

Il tensore di curvatura è legato alla curvatura di Gauss anche in spazi con un numero qualsiasi di dimensioni. Dato un punto P in uno di questi spazi, e due vettori a^μ e b^μ applicati nel punto P , possiamo tracciare per P una famiglia di curve geodetiche $x^\mu(s, \alpha, \beta)$, con α e β numeri reali, che hanno come vettore tangente iniziale $dx^\mu/ds = \alpha a^\mu + \beta b^\mu$. Tutte queste geodetiche formano una superficie bidimensionale per P , con curvatura di Gauss data da⁵

$$K(a, b) = \frac{R_{\lambda\mu\nu\kappa} a^\lambda b^\mu a^\nu b^\kappa}{(g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) a^\lambda b^\mu a^\nu b^\kappa}$$

Esempio: calcolo della curvatura di Gauss

Su un elemento di superficie la metrica si può scrivere come

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{k}} dv^2$$

Calcolare K (curvatura di Gauss intrinseca).

Sarà $K = R_{1212}/g$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2u/k} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad g = e^{2u/k} \quad \rightarrow \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2u/k} \end{pmatrix}$$

Dati i valori particolari di g_{ij} e g^{ij} sarà $R_{1212} = g_{1k} R^k_{212} = R^1_{212}$

$$R^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial u^2} + \Gamma^r_{22} \Gamma^1_{r1} - \Gamma^r_{21} \Gamma^1_{r2} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial v} + \Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22} \Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{21} \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22}$$

Risulta

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{k} e^{2u/k}$$

$$\Gamma^1_{21} = 0 \quad \Gamma^1_{11} = 0 \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{k} \quad \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u} = -\frac{2}{k^2} e^{2u/k}$$

$$R^1_{212} = -\frac{2}{k^2} e^{2u/k} - \left(\frac{1}{k} \cdot -\frac{1}{k} e^{2u/k} \right) = -\frac{1}{k^2} e^{2u/k} \equiv R_{1212}$$

$$K = \frac{R_{1212}}{g} = -\frac{1}{k^2} e^{2u/k} / e^{2u/k} = -\frac{1}{k^2}$$

Esempio: curvatura della pseudosfera

La pseudosfera può essere rappresentata da una superficie di rivoluzione: dalla rotazione della *trattrice*⁶ attorno al suo asintoto

⁵Vedi Weinberg 1972, paragrafo 6.9

⁶Consideriamo un segmento di lunghezza a adagiato sull'asse x di un sistema cartesiano Oxy , con un estremo nell'origine e l'altro nel punto $P : (a, 0)$; se l'estremo inizialmente nell'origine si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse y , l'altro estremo descrive una curva detta *trattrice*, dal latino *trahere*, tirare. La rotazione della trattrice attorno all'asse y produce la superficie chiamata pseudosfera. Il nome le deriva dal fatto che la curvatura è costante, come per la sfera, ma ha segno opposto.

$$\bar{x}(u, v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left[\cos u + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \right] \right) \quad \text{con } 0 < u < \pi/2$$

Trovare la metrica della superficie e K

$$\bar{x}_u = \left(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \left[-\sin u + \frac{1}{\operatorname{tg} u/2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u/2} \cdot \frac{1}{2} \right] \right) = \left(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \frac{\cos^2 u}{\sin u} \right)$$

$$\bar{x}_v = \left(-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0 \right)$$

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = a^2 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 u}$$

$$G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = a^2 \sin^2 u$$

$$F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 u} du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2$$

Se trasformo $(u, v) \rightarrow (x, y)$ $\begin{cases} x = a \ln(\sin u) \\ y = av \end{cases}$ $dx = \frac{a}{\operatorname{tg} u} du$ $dy = a dv$ $e^{x/a} = \sin u$

da cui vedo che $ds^2 = dx^2 + e^{2x/a} dy^2$ è una metrica equivalente.

Dall'esercizio precedente, inoltre, vedo che $K = -1/a^2$

.....

3 Relatività generale

3.1 Lo spazio di Minkowski

Nella relatività ristretta, passando da un sistema di riferimento ad un altro, si conserva (= è invariante) la distanza infinitesima tra due eventi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Se definisco $x^0 = ct$; $x^1 = x$; $x^2 = y$; $x^3 = z$ posso scrivere

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \text{con} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

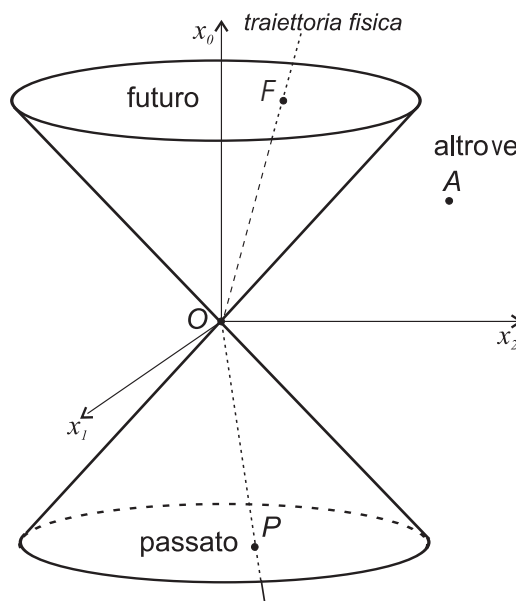
Abbiamo la metrica dello spazio di Minkowski, che è “pseudo-euclideo”, ma è comunque piatto: infatti gli $\eta_{\alpha\beta}$ sono costanti e quindi i Γ_{jk}^i e R_{ijk}^h sono nulli. Nel seguito useremo, per convenzione, gli indici *greco* $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ se questi variano da 0 a 3, mentre useremo gli indici *italici* i, j, k, \dots se questi variano da 1 a 3. Attenzione: in letteratura si trova anche la convenzione opposta. Anche $\eta_{\alpha\beta}$ è definito spesso con i segni opposti, cioè con la *segnatura* $(-1, 1, 1, 1)$ invece di $(1, -1, -1, -1)$.

Diciamo anche che l'intervallo ds^2 è:

- di **tipo tempo** (*time like*) se $ds^2 > 0$ (corrispondente ad una traiettoria fisica con $v < c$)
- di **tipo spazio** (*space like*) se $ds^2 < 0$
- di **tipo luce** o **nullo** (*light like, null*) se $ds^2 = 0$ (corrispondente al moto di particelle, come i fotoni, che si muovono con velocità $v = c$)

Se rappresento lo spazio-tempo (eliminando una delle coordinate spaziali) attorno ad un evento preso come origine, posso dividerlo in tre zone definite dal cono in figura:

- **futuro**: è la zona con la quale l'evento può interagire tramite corpi che seguono una traiettoria fisica.
- **passato**: è la zona dai cui eventi passati l'evento in O può essere influenzato.
- **altrove**: è la zona dai cui eventi non posso essere stato influenzato, nè posso influenzare, perchè occorrerebbero segnali con $v > c$. Un osservatore in moto rispetto ad O può vedere O ed A accadere contemporaneamente.



Ogni osservatore ha con se un regolo ad un orologio: il tempo scandito da questo orologio è il tempo proprio τ . Per un osservatore, per il quale due eventi fisicamente connessi avvengono in tempi diversi ma nello stesso luogo ($dx = dy = dz = 0$), risulta $ds^2 = c^2 d\tau^2$: tra ds e $d\tau$ c'è proporzionalità.

La distanza ds tra due medesimi eventi, per un osservatore per cui avvengono nello stesso punto, e per un altro osservatore per cui avvengono a distanza dl , sarà la stessa:

$$ds^2 = cd\tau^2 = cdt^2 - |d\vec{l}|^2 \quad \rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \right) = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

dove v è la velocità della particella per l'osservatore che la vede in moto, ed anche la velocità relativa dei due osservatori. Detto $\beta \equiv v/c$ e $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ si ha che $dt = \gamma d\tau$. Poichè $\gamma \geq 1$ allora $dt \geq d\tau$: l'intervallo tra due "tic" di un orologio è più corto per l'orologio "proprio", gli orologi in moto appaiono più lenti (si pensi al paradosso dei gemelli).

Definiamo la **quadrivelocità** come $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{ds}$; si tratta di un vettore poichè dx^α è un vettore e ds uno scalare.

In un sistema generico, non in quiete con la particella la quale ha una velocità $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$, sarà

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{d(ct)}{cd\tau} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

$$u^i = \frac{dx^i}{cd\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{v^i}{c} = \gamma\beta^i$$

per cui posso scrivere che $u^\alpha = \gamma(1, \vec{\beta})$. Se la particella è in quiete si ha $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$.

La quantità $u^\alpha u_\alpha$ è invariante: $u^\alpha u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = u^0 u^0 - (u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3) = \gamma^2 - (\gamma^2 v^2/c^2) = 1$; u^α rappresenta il vettore (versore) tangente alla traiettoria della particella (nello spazio-tempo 4-D).

Definiamo ora il **quadrimento** $P^\alpha = m_0 u^\alpha$ dove m_0 è la massa a riposo della particella. Se ricordiamo che $\vec{P} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$; $E = mc^2 = m_0 c^2 \gamma$ abbiamo:

$$P^0 = \gamma m_0 = E/c^2 \quad P^i = \gamma m_0 \frac{v^i}{c} = m \frac{v^i}{c}$$

$$P^\alpha P_\alpha = \gamma^2 m_0^2 - \gamma^2 m_0^2 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 m_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2$$

$$P^\alpha P_\alpha = m_0^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{1}{c} \vec{P} \cdot \vec{P} \quad \rightarrow \quad m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{P}|^2$$

Dire che $P^\alpha = cost \Rightarrow E = cost$ e $\vec{P} = cost$: è la conservazione dell'energia e del momento (quantità di moto).

La **quadriaccelerazione** è $\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \frac{du^\alpha}{ds}$. Nella relatività ristretta, mentre posizione, velocità e tempo sono relativi, l'accelerazione è assoluta: se è zero in un sistema, è zero in qualunque sistema inerziale (legato al primo da una trasformazione di Lorentz); questo perchè la quadriaccelerazione è un tensore, come u^α .

L'equazione per le **geodetiche** è sempre:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

Se la metrica è data da $\eta_{\alpha\beta}$, allora i $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ sono nulli e resta $d^2 x^\alpha/ds^2 = 0$, cioè $x^\alpha = a^\alpha \cdot s + b^\alpha$, ovvero

$$\begin{cases} ct = a^0 \cdot s + b^0 \\ \vec{x} = \vec{a} \cdot s + \vec{b} \end{cases}$$

e la traiettoria è una retta percorsa di moto rettilineo uniforme.

Se uso un altro tensore metrico, espresso ad esempio in coordinate polari sul piano (per semplicità): $ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2)$, allora i $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ non sono tutti nulli, ma ottengo sempre come traiettoria una retta (ma ora in coordinate polari).

N.B.: Mentre nello spazio 3-D Euclideo la geodetica tra due punti è un segmento di retta, quindi è la distanza minima tra due punti, nella Relatività la quantità $\int_A^B ds$ è massimo rispetto a variazioni di percorso con gli estremi fissi. È $\Delta\tau = \Delta s/c$, e si pensi al paradosso dei gemelli, nel quale il tempo è massimo per il gemello che è rimasto fermo.

3.2 Il tensore energia-impulso

Per affrontare la Relatività Generale e la Cosmologia ci serve un “oggetto” che esprima le proprietà di un mezzo continuo, come densità e velocità, e le colleghi alla conservazione dell’energia e della quantità di moto.

Consideriamo inizialmente della materia incoerente, le cui particelle (per il momento) non interagiscono (polvere - “*dust*”); il campo di materia sarà quindi descritto in ogni punto dalla quadrivelocità $u^\alpha = \gamma(1, \bar{v}/c)$ e dalla densità propria $\rho_0(x)$, cioè quella misurata da un osservatore che segue il fluido. Con queste grandezze posso formare un tensore simmetrico di rango 2 nel modo più semplice come:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta$$

Vediamo come è fatto in dettaglio questo tensore:

$$T^{00} = \rho_0 c^2 \gamma^2 = \gamma^2 \rho_0 c^2 = \rho c^2 \quad \text{posto } \rho = \gamma^2 \rho_0$$

Per interpretare questo risultato ricordiamo che la massa è $m = \gamma m_0$ (m_0 massa a riposo) e che un elemento di volume in moto appare contratto di un fattore $1/\gamma$, per cui la densità cresce di un ulteriore fattore γ . Perciò se la densità propria è ρ_0 , un osservatore rispetto al quale il fluido ha velocità \bar{v} misurerà una densità $\gamma^2 \rho_0$.

T^{00} misura quindi la densità di massa-energia (qui l’unico contributo all’energia viene dal moto della materia).

Le componenti di $T^{\alpha\beta}$ possono essere scritte:

$$T^{\alpha\beta} = \rho c^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & v_x^2/c^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_y v_x/c^2 & v_y^2/c^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_z v_x/c^2 & v_z v_y/c^2 & v_z^2/c^2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Vediamo come le equazioni del moto possono essere ricavate in modo sintetico come $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$

- Per $\alpha = 0$ avrò $\partial_\beta T^{0\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ che scritta per esteso dà:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c v_z)}{\partial z} = 0$$

che si può semplificare come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

cioè l’equazione di continuità per un fluido, che esprime la conservazione della massa-energia.

- Per $\alpha = 1, 2, 3$ ho

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 3)$$

Moltiplicando la prima per \hat{i} (versore relativo all’asse x), la seconda per \hat{j} e la terza per \hat{k} e sommando, le tre si condensano in

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \bar{v}) = 0$$

che, sviluppando e usando poi l’equazione di continuità, diventa

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) \right] + \rho v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0$$

$$\text{cioè} \quad \rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right] = 0 \quad (I) \Leftrightarrow \quad \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \quad (II)$$

Questa relazione, tipica della fluidodinamica, rappresenta l'equazione del moto per un fluido senza pressione, viscosità e forze esterne. Esprime quindi la *conservazione della quantità di moto*. In particolare, nella forma (I) si immagina di osservare il fluido in un punto fisso e di vedere come in esso evolve il moto (punto di vista cosiddetto *Euleriano*), mentre nella forma (II) si immagina di seguire nel loro moto le particelle di fluido (punto di vista cosiddetto *Lagrangiano*).

Vediamo quindi che il tensore $T^{\alpha\beta}$ esprime tutte le proprietà energetiche e dinamiche del fluido (polvere) in questione. $T^{\alpha\beta}$ è il **tensore energia-impulso**.

In un *sistema inerziale localmente in quiete (SILQ)* rispetto al fluido, nel quale quindi $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, $T^{\alpha\beta}$ ha la forma particolarmente semplice

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

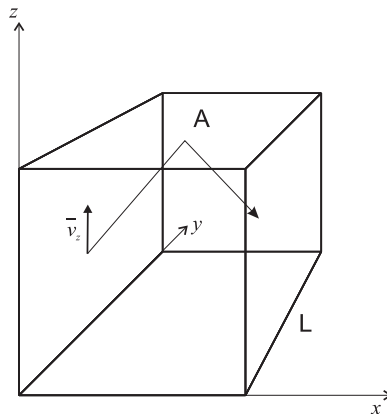
Veniamo adesso a considerare il caso in cui le particelle interagiscono nel modo più semplice, cioè attraverso urti dovuti all'agitazione termica: è presente una *pressione* del fluido. Assumiamo che non vi sia trasporto di energia per conduzione o irraggiamento e non vi sia viscosità. Il **fluido** così definito è detto **perfetto**.

Se siamo nel *SILQ*, ora $T^{\alpha\beta}$ non sarà più come quello scritto appena sopra, con solo $T^{00} \neq 0$. Le particelle avranno dei moti casuali attorno allo zero delle posizioni e delle velocità. Devo rifarmi quindi alla forma precedente (**), di $T^{\alpha\beta}$, in cui però i termini che compaiono andranno mediati sul tempo e sulla distribuzione delle velocità delle particelle.

Questo però mi dà subito un'informazione importante: tutti i termini al di fuori della diagonale contengono elementi come v_x , v_y o v_z o loro prodotti; quando medio $\langle v_x \rangle = 0$ ed anche $\langle v_x v_y \rangle = \langle v_x \rangle \langle v_y \rangle = 0$ (assumendo v_x e v_y scorrelate). Quindi $T^{\alpha\beta}$ è diagonale in *SILQ*.

T_{SILQ}^{00} (che esprime la densità di massa-energia) non sarà più semplicemente $\rho_0 c^2$, ma piuttosto un ρc^2 con $\rho > \rho_0$ per tener conto del fatto che le particelle hanno velocità diverse da zero anche in *SILQ* e la loro densità di massa-energia è maggiore che nel caso della pura polvere. Per gli altri termini diagonali avremo $\langle \rho v_x^2 \rangle$, $\langle \rho v_y^2 \rangle$, $\langle \rho v_z^2 \rangle$.

Per interpretare questi termini facciamo una piccola digressione sulla teoria cinetica dei gas.



Siano \bar{v} e \bar{P} la velocità e la quantità di moto di una particella, ed f_z la forza media esercitata da questa particella perpendicolarmente alla superficie A (vedi figura)

$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \bar{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

$$f_z = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2P_z}{2L/v_z} = \frac{1}{L} P_z v_z$$

per una particella.

Per N particelle la forza sarà (indichiamo con p la pressione)

$$F_z = \frac{N}{L} P_z v_z = \frac{N}{L^3} P_z v_z L^2 \equiv p \cdot A$$

per cui, facendo in realtà la media sulla distribuzione delle velocità, sarà ($A = L^2$)

$$p = \frac{N}{L^3} \langle P_z v_z \rangle = n \langle P_z v_z \rangle$$

$$\bar{P} \cdot \bar{v} = P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z = 3P_z v_z \quad (\text{per simmetria})$$

$$\text{e quindi} \quad p = \frac{n}{3} \langle \bar{P} \cdot \bar{v} \rangle$$

che vale anche per un gas degenere e relativistico. Possiamo riscrivere questa relazione come $p = \frac{n}{3} \langle \bar{P} \cdot \bar{v} \rangle = \langle n P_x v_x \rangle = \langle n \cdot m v_x^2 \rangle = \langle \rho \cdot v_x^2 \rangle$. Quindi, per un fluido perfetto, sarà:

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

dove ρ tiene conto anche della massa-energia dovuta all'agitazione termica.

È facile verificare che, in SILQ, si può sintetizzare il tutto con

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta}$$

Infatti, ad esempio, per T^{00} , essendo $u^0 = 1$ e $\eta^{00} = 1$ si ha $T^{00} = p + \rho c^2 - p = \rho c^2$

Ma questa espressione è un tensore, e quindi varrà in ogni sistema di riferimento, con $u^\alpha \neq (1, 0, 0, 0)$ ed eventualmente l'opportuno tensore metrico al posto $\eta^{\alpha\beta}$. Scritta con gli indici covarianti sarà quindi:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}$$

Esempio: le equazioni dell'idrodinamica relativistica

Vediamo cosa corrisponde in questo caso alla relazione

$$\begin{aligned} \partial_\beta T^{\alpha\beta} &= [(p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta}]_{,\beta} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Per $\alpha = 0$, ricordando che $u^\alpha = \gamma(1, \bar{v}/c)$, si ottiene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(p + \rho c^2) \gamma^2] + \frac{\partial}{\partial x} [(p + \rho c^2) \gamma^2 \frac{v_x}{c}] + \frac{\partial}{\partial y} [(p + \rho c^2) \gamma^2 \frac{v_y}{c}] + \frac{\partial}{\partial z} [(p + \rho c^2) \gamma^2 \frac{v_z}{c}] - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Sviluppando le derivate spaziali si arriva a scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(p + \rho c^2) \gamma^2] + (p + \rho c^2) \gamma^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} [(p + \rho c^2) \gamma^2] &= \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} [(p + \rho c^2) \gamma^2] + (p + \rho c^2) \gamma^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{v} &= \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

Questa relazione non è particolarmente illuminante. Vedremo tra poco, invece, una relazione più utile e comprensibile, ottenuta trasformando la $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$ in una relazione scalare.

Se $\alpha = 1, 2, 3$, con un metodo simile a quello seguito sopra per la "polvere", si ottiene

$$\left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) \gamma^2 \frac{d\bar{v}}{dt} = - \left[\bar{\nabla} p + \bar{v} \frac{\partial(p/c^2)}{\partial t} \right]$$

che è una generalizzazione della relazione $\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\bar{\nabla} p$ dell'idrodinamica (*equazione di Eulero*). Come si vede, $(\rho + p/c^2)$ svolge il ruolo di "densità di massa inerziale".

Possiamo aggiungere la *conservazione del numero di particelle*, o equazione di continuità, che si può introdurre partendo dalla quantità

$$J^\alpha \equiv n u^\alpha$$

che corrisponde ad una *corrente*, dove n è la densità numerica di particelle in un sistema in quiete col fluido. Ponendo la divergenza di J^α uguale a zero si ha conservazione del numero di particelle:

$$\begin{aligned} J^\alpha_{,\alpha} &= \frac{\partial (n u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + \frac{\partial}{\partial x} \left(n\gamma \frac{v_x}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(n\gamma \frac{v_y}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(n\gamma \frac{v_z}{c} \right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + \bar{\nabla} \cdot (n\gamma \bar{v}) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + n\gamma \bar{\nabla} \cdot \bar{v} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) n\gamma = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} (n\gamma) + (n\gamma) \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0$$

.....

Esempio: *conservazione dell'entropia per particella*

Vediamo ora di ricavare, come detto poco sopra, una relazione scalare dalla $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$; per fare questo la moltiplicheremo per u_α .

Partiamo dal fatto che, come abbiamo già visto, $u^\alpha u_\alpha = 1$. Sarà quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (u^\alpha u_\alpha) &= u^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= \eta^{\alpha\gamma} u_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= u_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 2u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0 \end{aligned}$$

da cui $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$ (abbiamo sfruttato il fatto che α e γ sono indici muti). Se riprendiamo l'equazione che esprime la divergenza di $T^{\alpha\beta}$ e la moltiplichiamo per u_α otteniamo

$$u_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$$

e, sviluppando la derivata del primo termine, abbiamo

$$u_\alpha \left\{ u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\beta] + (p + \rho c^2) u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} u^\beta = 0$$

Se ricordiamo che $u^\alpha u_\alpha = 1$ e che $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\beta] - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} &= 0 \\ (p + \rho c^2) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (p + \rho c^2) - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Dalla conservazione del numero di particelle abbiamo

$$\frac{\partial (n u^\beta)}{\partial x^\beta} = 0 \Rightarrow n \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial n}{\partial x^\beta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = -\frac{u^\beta}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta}$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nella precedente relazione e raccogliendo u^β abbiamo

$$u^\beta \left\{ \frac{\partial (p + \rho c^2)}{\partial x^\beta} - \frac{p + \rho c^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta} - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} = 0$$

Osserviamo ora che

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p + \rho c^2}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \left[\frac{\partial(p + \rho c^2)}{\partial x^\beta} n - (p + \rho c^2) \frac{\partial n}{\partial x^\beta} \right] = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial(p + \rho c^2)}{\partial x^\beta} - \frac{p + \rho c^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta} \right]$$

Sostituendo nella precedente

$$\begin{aligned} u^\beta \left\{ n \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p + \rho c^2}{n} \right) - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} &= 0 \quad \Rightarrow \quad u^\beta \left\{ n \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\rho c^2}{n} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} = 0 \\ u^\beta \left\{ n p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{n}{n} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} + n \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\rho c^2}{n} \right) - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} &= 0 \\ n u^\beta \left\{ p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\rho c^2}{n} \right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Ricordiamo ora il primo principio della termodinamica: $dU = dQ + dL$; se introduciamo l'entropia S possiamo scrivere: $TdS = dU + pdV$, dove l'energia interna è $U = \rho c^2$. Se lo riscrivo riferendomi ad una particella avrò $Td\sigma = d\left(\frac{\rho c^2}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right)$, con σ entropia per particella. Sviluppando i differenziali si ha

$$T \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} dx^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\rho c^2}{n} \right) dx^\beta + p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{1}{n} \right) dx^\beta \quad / \cdot \frac{1}{ds}$$

Se ricordiamo che $\frac{dx^\beta}{ds} \equiv u^\beta$ e confrontiamo questa relazione con la precedente otteniamo

$$u^\beta \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} = 0$$

che, sviluppato, diventa

$$\begin{aligned} \gamma \frac{1}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \frac{v_x}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma \frac{v_y}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \gamma \frac{v_z}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \sigma &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Si ha come risultato che, nel sistema in cui il fluido è in quiete, l'entropia per particella (o, se preferiamo, l'entropia per un certo numero N di particelle contenute in un volume cubico V di spigolo L , che può variare mantenendo però sempre al suo interno lo stesso numero di particelle) è costante. Questo è legato al fatto che, nel fluido ideale, non c'è scambio di energia per conduzione (o irraggiamento), né vi è dissipazione. Dal 1° principio della termodinamica, nel sistema che segue il fluido, $dQ = dU + pdV$ e $U = \rho c^2 \cdot V$, per cui

$$dQ = \rho c^2 dV + V d(\rho c^2) + pdV = (p + \rho c^2) dV + V d(\rho c^2) = T dS$$

Poichè $dQ = 0 \rightarrow dS = 0$.

Se scriviamo $p = w\rho c^2$ (con w costante, anche se, più in generale, potrà essere $w = w(T)$),

$$(1 + w)\rho c^2 dV = -V d(\rho c^2)$$

e se $w = \text{cost}$, ho $d\rho/\rho = -(1 + w) dV/V$, cioè $\rho V^{1+w} = \text{costante}$.

Incontreremo tre casi interessanti in cosmologia:

1. Per un gas non-relativistico $p \ll \rho_0 c^2$ ($\rho \approx \rho_0$) per cui $w \simeq 0$ e quindi $\rho_0 V \simeq \text{cost}$. Detto L lo spigolo di un volume cubico $V = L^3$, abbiamo $\rho \propto 1/L^3$
2. Per un gas di fotoni $\rho_{rad} \propto aT^4$ e $p = \frac{1}{3}\rho c^2$; $w = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} T^4 V^{4/3} &= \text{cost} & TV^{1/3} &= \text{cost} & V \propto L^3 &\rightarrow T \propto \frac{1}{L} \\ \rho_{rad} V^{4/3} &= \text{cost} & V \propto L^3 &\rightarrow V^{4/3} \simeq L^4 &&\rightarrow \rho_{rad} \simeq \frac{1}{L^4} \end{aligned}$$

3. Se $p = -\rho c^2$ ($w = -1$) $\rightarrow \rho V^0 = \text{cost}$ cioè ρ non dipende da V e da L e rimane costante se V varia.

Possiamo esprimere il primo principio in un' altra forma utile, ponendo $V \propto L^3$

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)dV + Vd\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \cdot 3L^2dL + L^3d\rho = 0$$

da cui

$$3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dL}{L} + d\rho = 0$$

e, tenendo conto di una dipendenza di L dal tempo,

$$3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{L}}{L} + \dot{\rho} = 0$$

Abbiamo scritto $\partial_\alpha T^{\beta\alpha} = 0$ nello spazio di Minkowski; se però i $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ non sono tutti nulli, ed in generale sarà così, al posto della derivata parziale semplice si deve utilizzare la derivata covariante:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

che esprime le leggi di conservazione in un sistema di riferimento generico.

3.3 Il principio di Mach

Per la dinamica di Newton le proprietà inerziali di un corpo dipendono dal suo moto rispetto ad uno spazio assoluto. *Ernst Mach*⁷ suggerì invece che l'inerzia è legata al moto rispetto alla distribuzione totale di materia dell'universo. Il moto è solamente relativo agli altri corpi: operativamente possiamo misurare solo il moto della materia relativamente ad altra materia, non rispetto allo spazio assoluto di Newton. Se vi fosse un solo corpo nell'universo, il suo moto non sarebbe definibile: senza altra materia non potremmo dire se questo corpo è in quiete o se sta accelerando. E siccome la reazione della materia all'accelerazione è il solo modo per determinarne l'inerzia, questo corpo non possiederebbe inerzia. Viene detta **principio di Mach** l'idea che sono la massa e la posizione dei corpi celesti a definire l'inerzia ed i sistemi inerziali. Si possono muovere varie obiezioni a questa idea: nessun osservatore può trovarsi in un universo vuoto e verificare le idee di Mach, e l'inerzia potrebbe esistere anche in un universo vuoto.

Comunque sia, le idee di Mach influenzarono, per sua stessa ammissione, Einstein. Secondo la fisica newtoniana, in uno spazio privo di interazioni, i corpi dovrebbero rimanere in quiete o muoversi di moto rettilineo uniforme. Siccome però l'universo è permeato da campi gravitazionali che non possono essere schermati, tutti i corpi si muovono lungo traiettorie curve per effetto di questi campi. Sorge però un problema: se diciamo che una traiettoria è curva, assumiamo di saper definire una linea retta. Ma come possiamo farlo se nessun corpo, nemmeno i fotoni, come vedremo, segue una linea retta? Cerchiamo allora di far a meno del concetto di linea retta, e assumiamo che non ci siano enti fisici come le "forze gravitazionali" che curvano le traiettorie dei corpi celesti, ma che la geometria dello spazio venga modificata dalla gravitazione in modo tale che le traiettorie osservate corrispondono ai moti liberi, inerziali, di detti corpi. Ma come esprimere questo legame tra moto inerziale e gravitazione?

La Relatività Ristretta può venir descritta da una geometria di Minkowski $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ ed è dalle proprietà di invarianza del ds^2 tra sistemi inerziali che derivano i risultati di questa Teoria (dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze, ...). Come si passa ad una metrica $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ in presenza di campi gravitazionali? Che legami ci sono tra $g_{\alpha\beta}$ ed il campo gravitazionale e tra $g_{\alpha\beta}$ e la gravitazione di Newton? Impostata in questo modo, la Relatività Generale risulta essere una teoria geometrica della gravitazione.

⁷*Ernst Mach (1838-1916) fu professore di fisica e poi di filosofia all'Università di Vienna. Le sue idee avevano avuto un precursore nel filosofo e vescovo inglese George Berkeley, nel 1710, quando Newton era ancora vivo.*

3.4 Sistemi localmente inerziali

Volendo dare una descrizione geometrica dello spazio-tempo possiamo usare quello che già abbiamo appreso riguardo alle superfici e generalizzarlo in 4 dimensioni. In particolare, abbiamo visto che, in un intorno di un generico punto, è possibile trasformare $g_{\alpha\beta}$ in modo tale che abbia una data forma e che le derivate prime siano nulle. Quindi, nell'intorno di un evento, possiamo sempre porre $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(|x|^2)$: al prim'ordine la geometria è la stessa della Relatività Ristretta. Nell'intorno (infinitesimo) di ogni evento le leggi della Fisica sono quelle che valgono in un sistema di riferimento inerziale. In un intorno di ogni evento posso definire un *sistema di riferimento localmente inerziale*.

In presenza di campi gravitazionali, per quanto detto poco sopra, localmente gli scostamenti dalla Relatività Ristretta si manifestano solo a livello delle derivate seconde di $g_{\alpha\beta}$ che, ricordiamo, sono connesse con il tensore di curvatura $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$. In questo senso **la gravitazione curva lo spazio-tempo**. Ma quali sono questi sistemi localmente inerziali?

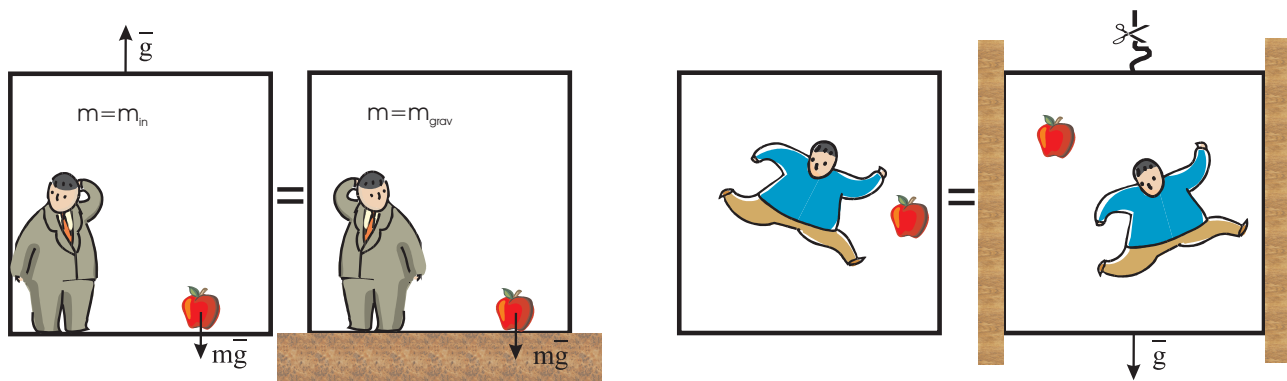
3.5 Principio di Equivalenza

L'esperienza che corpi diversi cadono (in assenza di resistenza dell'aria) allo stesso modo per effetto della gravità ha portato a concludere, con grande precisione, che massa inerziale m_{in} e massa gravitazionale m_{grav} sono tra loro proporzionali (e in pratica uguali, facendo rientrare entro la costante di gravitazione G la costante di proporzionalità). Einstein assunse che, **per definizione**, $m_{in} \equiv m_{grav}$. Questo porta al famoso *esperimento pensato* dell'**ascensore di Einstein**: se un osservatore, dotato di strumenti scientifici, è rinchiuso in un ascensore e non può quindi vedere cosa accade attorno a lui, non sarà in grado di distinguere, dai suoi esperimenti di meccanica, tra le due situazioni:

- è fermo in campo gravitazionale con accelerazione di gravità \bar{g}
- è nello spazio vuoto, e l'ascensore è accelerato verso l'alto con accelerazione costante \bar{g}

Analogamente, poichè tutto cade allo stesso modo in un campo gravitazionale, l'osservatore non sarà in grado di distinguere tra le situazioni di:

- moto rettilineo uniforme nel vuoto
- caduta libera in un campo gravitazionale



Questo ci permette di dire quali sono i *sistemi localmente inerziali*: *quelli in caduta libera*. Quindi in un sistema in caduta libera valgono localmente (e al prim'ordine in $g_{\alpha\beta}$) le leggi della Relatività Ristretta.

Il Principio di Equivalenza richiede che tutte le leggi della fisica (non solamente quelle della Meccanica) siano le stesse sia in un sistema localmente inerziale, sia nella Relatività Ristretta.

Il fatto che gli effetti della gravitazione scompaiano in un sistema in caduta libera, fa sì che i fenomeni che vi avvengono sono completamente indipendenti dalla presenza di masse vicine. Secondo il punto di vista di Mach, invece, una grossa massa vicina dovrebbe introdurre una anisotropia della massa inerziale. Effetti dovuti al Sole o alla nostra Galassia sono stati ricercati, ma non trovati entro $\Delta m/m \sim 10^{-20}$, per cui il principio di equivalenza sembra favorito rispetto alle ipotesi di Mach (che quindi non sono completamente coerenti con la

Relatività Generale, a parte l'ispirazione fornita ad Einstein⁸).

3.6 Principio di Covarianza Generale

Questo principio ci suggerisce come scrivere le equazioni della fisica in presenza di un campo gravitazionale, quando sappiamo come sono fatte in assenza di gravità.

Affinchè un'equazione esprime una legge fisica valga in un campo gravitazionale è necessario che:

1. Sia "covariante", cioè non cambi forma cambiando sistema di riferimento, sia cioè espressa come una relazione tra tensori.
2. L'equazione valga in assenza di gravitazionali, quando cioè $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta}$ e $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \equiv 0$.

Ci possono essere molte equazioni covarianti che si riducono, in assenza di gravità, alla stessa equazione della Relatività Ristretta. Tuttavia, poichè il Principio di Covarianza Generale, come quello di Equivalenza, agiscono su scale piccole, ci aspettiamo che entrino in gioco solo $g_{\alpha\beta}$ e le sue prime derivate. Questo obbedisce anche ad un principio di semplicità.

In questo modo $T^{\alpha\beta}_{;\beta} \rightarrow T^{\alpha\beta}_{;\beta}$ (derivata covariante), o, ad esempio, per l'equazione del moto di un corpo libero,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

Abbiamo visto che in ogni punto (evento) possiamo definire un sistema localmente inerziale, ed in esso le derivate seconde di $g_{\alpha\beta}$ sono in generale $\neq 0$: è quindi a livello di derivate seconde del tensor metrico che entra in gioco il campo gravitazionale.

Analogamente, nella fisica newtoniana, in un sistema in caduta libera, quello che si può misurare è la differenza di accelerazione di gravità tra due corpi $\Delta g/\Delta x$. Questo è il tipo di fenomeno che chiamiamo *maree*. Ma $\bar{g} = -\bar{\nabla}\Phi_{grav}$ e quindi $\partial g/\partial x \propto \partial^2 \Phi_{grav}/\partial x^2$. Quello che è rilevabile sono quindi le derivate seconde di Φ_{grav} , come in Relatività Generale lo sono le derivate seconde di $g_{\alpha\beta}$; vedo quindi che c'è un'analogia tra $g_{\alpha\beta}$ e Φ_{grav} : le $g_{\alpha\beta}$ fanno le veci del potenziale gravitazionale di Newton.

3.7 Le equazioni di Einstein

Nella teoria di Newton della gravitazione il potenziale Φ soddisfa l'equazione di Poisson: $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_0$ e $\bar{g} = -\bar{\nabla}\Phi$. La Relatività Ristretta ci insegna che tutte le forme di energia sono equivalenti alla massa, e allora una teoria relativistica della gravità avrà come sorgenti del campo gravitazionale tutte le forme presenti di energia, e non solamente ρ_0 . In particolare, la densità di energia del campo gravitazionale stesso è proporzionale a $(\bar{\nabla}\Phi)^2$ nel caso newtoniano (pensiamo, per analogia, che la densità di energia del campo elettromagnetico è proporzionale a E^2).⁹

Se dunque portiamo a sinistra, nell'equazione di Poisson, il termine $\propto (\bar{\nabla}\Phi)^2$ che deriverebbe dalla densità di energia gravitazionale, otteniamo un'equazione differenziale non lineare (che sarà lineare nella derivata seconda e quadratica in quella prima) per il campo gravitazionale.

Formalmente avremo un'equazione del tipo:

$$F(g) \sim \kappa T$$

dove g rappresenta il tensore metrico (corrispondente a Φ); F è un operatore differenziale (verosimilmente qualcosa di lineare nelle derivate seconde e quadratico nelle derivate prime) che si riduce a ∇^2 nel limite di

⁸Einstein concepì la sua teoria della Relatività Generale cercando di incorporarvi l'idea di Mach secondo la quale l'inerzia è dovuta alle interazioni gravitazionali con tutta la materia dell'Universo. Ma, come lui stesso ammise, c'era riuscito solo parzialmente, dato che ottenne una soluzione delle sue equazioni di campo nella quale una singola particella, immersa in un Universo peraltro vuoto, possedeva proprietà inerziali.

⁹Possiamo vedere che la densità di energia del campo gravitazionale è proporzionale a $(\bar{\nabla}\Phi)^2$, cioè a g^2 , nel seguente modo. L'energia potenziale gravitazionale per una massa M di raggio R è data da $E = -GM^2/R$. Se penso che questa energia sia distribuita nel campo ($g \propto M/r^2$) creato da M , tra R e ∞ , vedo che, chiamando δ_G la densità di energia gravitazionale, affinché sia $-\int_R^\infty \delta_G(r) \cdot 4\pi r^2 dr \approx -M^2/R$ occorre che $\delta_G(r) \sim (M/r^2)^2 \sim g^2$.

campo debole per cui valgono le leggi di Newton, κ è una costante di proporzionalità che conterrà G , T è una quantità che descrive tutte le forme non-gravitazionali di energia, e che, nel caso nonrelativistico, dovrebbe ridursi essenzialmente a ρ_0 .

Un naturale candidato per T è la componente T^{00} del tensore energia-impulso. Ma tenere come sorgente del campo solo una componente di un tensore darebbe una teoria non invariante: si dovrebbe adottare un sistema di riferimento particolare per calcolare T^{00} . Da qui l'idea di Einstein di usare come sorgente l'intero $T^{\alpha\beta}$: anche la pressione, gli sforzi (se $T^{\alpha\beta}$ non è diagonale), ecc.. tutto agisce come sorgente. Ma se T è un tensore, allora nell'equazione anche il termine di sinistra deve essere un tensore, funzione del tensor metrico.

Ma $T^{\alpha\beta}$ è simmetrico, ed ha divergenza "covariante" nulla: $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Quindi il termine di sinistra dovrà avere queste proprietà; in più ci aspettiamo che sia lineare nelle derivate seconde di $g_{\alpha\beta}$ e quadratico nelle derivate prime.

Ma abbiamo già incontrato un tensore con queste proprietà, ed abbiamo visto che è unico nel suo genere: il tensore di Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$$

Einstein propose quindi, come equazione del campo gravitazionale,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$$

Se penso di includere anche le derivate di ordine zero nell'operatore differenziale, ed essendo $g_{\alpha\beta}$ simmetrico ed a divergenza covariante nulla si può aggiungere un termine proporzionale a $g_{\alpha\beta}$:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$$

Λ e κ sono costanti; Λ è la cosiddetta *costante cosmologica*.

3.8 Il limite newtoniano - campo debole (weak field)

Scritte le equazioni di Einstein, occorre verificare che, nel limite di validità della fisica classica, esse si riducono alla legge di Newton; dobbiamo anche vedere quanto vale la costante κ che compare nelle equazioni.

Supponiamo che il campo sia stazionario (cioè la sua derivata temporale sia nulla), che le velocità delle particelle siano piccole ($v \ll c$) e che, a grandi distanze dalle masse che generano il campo, il tensore metrico sia asintoticamente piatto: $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$. Supponiamo inoltre che il campo sia debole: cioè che gli scostamenti dalla metrica $\eta_{\alpha\beta}$ siano piccoli:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{con } |h| \ll 1$$

Poichè $v/c \ll 1$ sarà

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{ds} &= \frac{cdt}{cd\tau} = \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dx^i}{ds} &= \frac{dx^i}{cd\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v^i}{c} \frac{dt}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \equiv \frac{dx^0}{ds} \end{aligned}$$

L'equazione delle geodetiche sarà, come al solito,

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

ma, per α fissato, nella somma sugli indici β e γ , i termini in cui compaiono i dx^i/ds sono trascurabili rispetto al termine con $(dx^0/ds)(dx^0/ds)$, per cui

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \simeq 0$$

Con l'assunzione $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ ($|h| \ll 1$) vediamo come calcolare $g^{\alpha\beta}$. Sappiamo che, per definizione, $g_{\alpha\delta}g^{\delta\beta} \equiv \delta_{\alpha}^{\beta}$ e che $\eta_{\alpha\delta}\eta^{\delta\beta} \equiv \delta_{\alpha}^{\beta}$. Definiamo la quantità $h^{\gamma\delta} \equiv \eta^{\gamma\alpha}\eta^{\delta\beta}h_{\alpha\beta}$. Mostriamo che

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta}) = \delta_{\alpha}^{\delta} :$$

Sviluppando il termine a sinistra, e trascurando i termini del secondo ordine in h ,

$$\begin{aligned} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta}) &= \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} - \eta_{\alpha\beta}h^{\beta\delta} + h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} - h_{\alpha\beta}h^{\beta\delta} = \\ &= \delta_{\alpha}^{\delta} - \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\sigma}\eta^{\delta\tau}h_{\sigma\tau} + h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} = \delta_{\alpha}^{\delta} \end{aligned}$$

Infatti $\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\sigma} \equiv \delta_{\alpha}^{\sigma}$, $\delta_{\alpha}^{\sigma}h_{\sigma\tau} = h_{\alpha\tau}$ e $\eta^{\delta\tau}h_{\alpha\tau} \equiv h_{\alpha\beta}\eta^{\delta\beta}$, poiché τ è un indice muto e posso chiamarlo β . Vedo quindi che $\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta} = g^{\beta\delta}$.

Calcoliamo Γ_{00}^{α} (ricordiamo che la stazionarietà implica che le derivate rispetto a x^0 sono nulle):

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} \left[\frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\gamma}} \right] = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\gamma} - h^{\alpha\gamma}) \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\gamma}} \right) \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\gamma}}$$

al primo ordine in h . Quindi

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\gamma}} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

- Per $\alpha = 0$ abbiamo:

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = \frac{1}{2}\eta^{00} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^0}{ds} = \text{cost} = \frac{dt}{d\tau}$$

- Per $\alpha = 1, 2, 3$ invece:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d^2x^i}{c^2 d\tau^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{dx^i}{d\tau} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2x^i}{dt^2}$$

per cui

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2}\eta^{i\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\gamma}} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (\eta^{i\gamma} = -1 \text{ se } i = \gamma)$$

cioè

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad \text{e vettorialmente} \quad \frac{1}{c^2} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2} \bar{\nabla} h_{00}$$

Ma secondo la gravità di Newton, indicato con Φ il potenziale,

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\bar{\nabla}\Phi$$

e confrontando i due risultati:

$$-\bar{\nabla}\Phi \simeq -\frac{c^2}{2} \bar{\nabla} h_{00} \quad \rightarrow \quad h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} + \text{cost.}$$

Ma, se a grandi distanze dalle masse sorgenti del campo, $\Phi \rightarrow 0$ e $h_{00} \rightarrow 0$ pure perchè assumiamo che $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$, segue che $\text{cost.} = 0$, cioè

$$h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} \quad \rightarrow \quad g_{00} \simeq 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

L'ipotesi di campo debole, $|h| \ll 1$, implica quindi che sia $2\Phi/c^2 \ll 1$.

Nel caso di una massa M in cui la densità è distribuita con simmetria sferica, il potenziale esterno è dato da $\Phi = -GM/r$ secondo Newton. L'ipotesi che il campo sia debole implica che $|2\Phi/c^2| \ll 1$, cioè

$$\frac{2GM}{rc^2} \ll 1$$

Per un buco nero o un corpo generico sferico, $R_S \equiv 2GM/c^2$ è il cosiddetto *raggio di Schwarzschild*, corrispondente, per un buco nero non rotante ed elettricamente neutro, all'*orizzonte degli eventi*, la zona dalla quale nulla può uscire (prescindendo da effetti quantistici di evaporazione). In questo caso vedo che la condizione di campo debole è che

$$\frac{R_S}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad r \gg R_S$$

Per il nostro sole, $R_S \sim 3$ km.

Vediamo ora, con le stesse assunzioni fatte sopra, che le equazioni di Einstein si riducono all'equazione di Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0$ e determiniamo la costante κ . Il tensore di curvatura è:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \simeq \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \quad (\text{gli altri termini sono } \mathcal{O}(h^2))$$

I simboli di Christoffel saranno:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial h_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (\text{allo } \mathcal{O}(h))$$

Il tensore di Ricci si ottiene da $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ contraendo il primo e terzo indice:

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta} = R^\alpha_{\beta(\gamma\equiv\alpha)\delta} &= \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta} = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial h_{\delta\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\delta}}{\partial x^\sigma} \right) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\delta} \left(\frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^\sigma} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} + \frac{\partial^2 h_{\delta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} \right] = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial^2 h_{\delta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \right] \end{aligned}$$

Riprendiamo l'equazione di Einstein, con il termine in Λ portato a destra:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

lo moltiplichiamo per $g^{\alpha\gamma}$ e otteniamo:

$$R^\gamma_{\beta} - \frac{1}{2}R\delta^\gamma_{\beta} = \kappa T^\gamma_{\beta} + \Lambda\delta^\gamma_{\beta}$$

poniamo $\gamma = \beta$ (cioè sommiamo su $\beta = \gamma = 0, 1, 2, 3$, $\delta^\beta_{\beta} = \delta^0_0 + \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$) e cioè contraiamo i tensori; essendo $R = R^\gamma_{\gamma}$ sarà:

$$R - \frac{1}{2}R \cdot 4 = \kappa T^\gamma_{\gamma} + 4\Lambda \quad \rightarrow \quad R = -\kappa T^\gamma_{\gamma} - 4\Lambda$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione di partenza, questa diventa:

$$R_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(-\kappa T^\gamma_{\gamma} - 4\Lambda) = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^\gamma_{\gamma}) - \Lambda g_{\alpha\beta}$$

Valutiamo, sempre con le approssimazioni assunte, la componente 00 di $R_{\alpha\beta}$:

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial^2 h_{0\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{0\alpha}}{\partial x^0 \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^0 \partial x^0} \right] \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \quad (\text{per la stazionarietà } \partial/\partial x^0 = 0)$$

ma se $\alpha = 0$ e/o $\sigma = 0$ la derivata è nulla; quindi restano solo i termini con indici 1, 2, 3 (e $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1$):

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^3 \partial x^3} \right] \simeq \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

D'altra parte

$$R_{00} = \kappa \left[T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T_{\gamma}^{\gamma} \right] - \Lambda g_{00}$$

Consideriamo per $T^{\alpha\beta}$ il caso *polvere*: $T^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta}$, supponendo trascurabili, rispetto a $\rho_0 c^2$, i termini che esprimono la pressione. Sarà

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta} \quad (u^i \ll u^0 \simeq 1)$$

$$T_{00} = g_{0\alpha} g_{0\beta} \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta} \simeq g_{00} g_{00} \rho_0 c^2 u^0 u^0 \simeq g_{00}^2 \rho_0 c^2$$

Ma $g_{00} = 1 + h_{00} \simeq 1$ e quindi

$$T_{00} \simeq \rho_0 c^2$$

$$T_{\gamma}^{\alpha} = g_{\gamma\beta} T^{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta} \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta}$$

$$T_{\gamma}^{\gamma} = g_{\gamma\beta} \rho_0 c^2 u^{\gamma} u^{\beta} \simeq g_{00} \rho_0 c^2 u^0 u^0 (+\text{termini trascurabili}) \simeq g_{00} \rho_0 c^2 \simeq \rho_0 c^2$$

Avremo quindi

$$\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \simeq \kappa (\rho_0 c^2 - \frac{1}{2} \rho_0 c^2) - \Lambda \quad \rightarrow \quad \nabla^2 h_{00} \simeq \kappa \rho_0 c^2 - 2\Lambda$$

ma $h_{00} = 2\Phi/c^2$ e quindi:

$$\nabla^2 \Phi \simeq \frac{\kappa \rho_0 c^4}{2} - \Lambda c^2 \simeq \kappa \left(\frac{\rho_0 c^4}{2} - \frac{c^2 \Lambda}{\kappa} \right)$$

L'equazione di Poisson prevede che $\nabla^2 \Phi = 4\pi g \rho_0$; le due espressioni coincidono se

$$(A) \quad \frac{\rho_0 c^4}{2} \gg \left| \frac{c^2 \Lambda}{\kappa} \right|$$

$$(B) \quad 4\pi G \rho_0 = \frac{\kappa \rho_0 c^4}{2} \quad \rightarrow \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Abbiamo quindi l'equazione di Einstein completa

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

La condizione su Λ scritta sopra diventa:

$$|\Lambda| \ll \frac{4\pi G \rho_0}{c^2} = \Lambda_E$$

Nel 1916, quando Einstein scrisse le equazioni della Relatività Generale, non si conosceva l'espansione cosmica, e Einstein cercò una soluzione statica per il modello di universo. Vediamo infatti che se $\Lambda = \Lambda_E$ e ρ_0 è la densità dell'universo; abbiamo $\nabla^2 \Phi = 0$, $\Phi = \text{cost}$, $\bar{g} = -\bar{\nabla} \Phi = 0$, dal punto di vista *classico*.

Una cosa analoga risulta dalle equazioni della Relatività Generale. Questo modello statico è però instabile: basta una piccola fluttuazione di densità e si produce, localmente, espansione o contrazione.

Dimensionalmente $[c^2 \Lambda] = [4\pi g \rho_0] = [\nabla^2 \Phi]$ cioè $[\Lambda] = [\nabla^2 (\Phi/c^2)] = L^{-2}$ (ricordiamo che Φ/c^2 è adimensionale).

Scrivendo $\nabla^2 \Phi = 4\pi G [\rho_0 - c^2 \Lambda / 4\pi G]$ vedo che posso pensare che Λ misuri la densità di massa-energia del vuoto.

Per valutare un limite superiore di Λ possiamo assumere per ρ_0 la densità media di un sistema gravitante per cui le leggi di Newton vanno bene e che quindi richiede $\Lambda \sim 0$. Se assumiamo come sistema gravitante il sistema solare (massa = $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} g$, raggio dell'orbita di Plutone $\sim 6 \cdot 10^9 km$) otteniamo

$$|\Lambda_{SS}| \ll 2 \cdot 10^{-39} cm^{-2}$$

Se assumiamo come sistema autogravitante un ammasso di galassie (ma qui la sicurezza sulla bontà delle leggi di Newton è minore), con massa pari a $\sim 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ e raggio $\sim 3h^{-1} Mpc$, otteniamo

$$|\Lambda_{SS}| \ll 10^{-54} h^2 cm^{-2}$$

Einstein definì l'introduzione di Λ come il più grande sbaglio della sua vita, ma, come vedremo, essa è ritornata prepotentemente in auge negli ultimi anni.

Da recenti osservazioni basate su supernovae di tipo *Ia* in galassie lontane, e dallo studio del fondo cosmico a microonde, si è ottenuto **non più un limite superiore, ma una possibile stima di $\Lambda \sim 2 \cdot 10^{-56} h^2 cm^{-2}$** .

3.9 Metrica del campo debole e trasformazioni di gauge, onde gravitazionali

Abbiamo visto, trattando il campo debole, che il Tensore di Ricci si può scrivere

$$R_{\beta\delta} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial^2 h_{\delta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \right]$$

Portando $\eta^{\alpha\sigma}$ (costante) entro gli operatori di derivazione parziale, e chiamando h la *traccia* di $h_{\alpha\sigma}$

$$h = h^\alpha_\alpha = \eta^{\alpha\sigma} h_{\alpha\sigma} = h_{00} - (h_{11} + h_{22} + h_{33})$$

posso riscrivere la relazione di sopra come

$$2R_{\beta\delta} \simeq \frac{\partial^2 h^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h^\sigma_\beta}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\sigma \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\delta \partial x^\beta}$$

Definiamo ora un campo ausiliario $\bar{h}_{\beta\delta}$, definito in modo che $\bar{h}_{\beta\delta} \equiv h_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\delta} \cdot h$ e avremo, moltiplicando per $\eta^{\beta\delta}$:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= h - \frac{1}{2}h \cdot 4 = -h && \text{essendo } \eta_{\beta\delta} \cdot \eta^{\beta\delta} = 4 \\ h_{\beta\delta} &= \bar{h}_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\delta} \bar{h} \end{aligned}$$

Osserviamo anche che, usando $\bar{h}_{\beta\delta}$, si ha, per i termini misti di $h_{\beta\delta}$,

$$h^\alpha_\delta = \eta^{\alpha\beta} h_{\beta\delta} = \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\delta} \bar{h} = \bar{h}^\alpha_\delta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\delta \bar{h}$$

Sostituendo nell'espressione del tensore di Ricci si ha:

$$\begin{aligned} 2R_{\beta\delta} &\simeq \frac{\partial^2 \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\delta \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \bar{h}^\sigma_\beta}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\beta \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \bar{h}^\sigma_\beta}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \end{aligned}$$

poiché il secondo e quarto termine sono uguali, ma di segno opposto, alla metà del sesto e si annullano con questo.

Osserviamo che le equazioni di Einstein per $G_{\mu\nu}$ sono 10, essendo $G_{\mu\nu}$ simmetrico. Ma $G_{\mu\nu}$ soddisfa anche le quattro condizioni $G^\mu_{\nu;\mu} = 0$, per cui ho $10 - 4 = 6$ equazioni indipendenti. Le incognite sono le 10 componenti del tensor metrico, in questo caso $h_{\beta\delta}$. Vedo quindi che le equazioni di Einstein non riescono a definire in modo univoco la soluzione. Per far questo è necessario imporre altre quattro condizioni su $h_{\beta\delta}$, occorre cioè scegliere quello che si dice un *gauge* particolare. In questo caso è particolarmente indicato il cosiddetto *gauge di Lorentz* (vedremo più avanti perché questo si può fare e che senso ha):

$$\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} \equiv 0 \quad (4 \text{ condizioni: } \delta = 0, 1, 2, 3)$$

Con questa scelta i due termini contenenti \bar{h}^α_δ nell'equazione in alto sono nulli e rimane:

$$R_{\beta\delta} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial z^2} \right) \right] \equiv -\frac{1}{2} \square^2 h_{\beta\delta}$$

dove con \square^2 si indica l'operatore d'Alembertiano.

\implies *Metrica del campo debole (stazionario)*

\implies *Trasformazioni di gauge*

Abbiamo visto che le equazioni di Einstein si possono scrivere anche nella forma $R_{\beta\delta} =$ funzione di $T_{\beta\delta}$ e Λ . Se siamo nel vuoto, e trascuriamo Λ , allora sarà:

$$R_{\beta\delta} \equiv 0 \quad \implies \quad \square^2 h_{\beta\delta} \equiv 0$$

che è l'**equazione di un'onda che propaga alla velocità della luce.**

Metrica nel campo debole (stazionario), senza Λ CD 1

Scriviamo le eq. di Einstein nella forma

$$R_{\beta\delta} = -\frac{1}{2} \square^2 h_{\beta\delta} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\beta\delta} \right]$$

Se il campo è stazionario, le derivate rispetto al tempo saranno nulle, per cui

$$R_{\beta\delta} \approx \frac{1}{2} \nabla^2 h_{\beta\delta}$$

Abbiamo già visto che

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T^\delta_\delta \right) \quad \text{e nel caso "polvere"} \quad T^\delta_\delta \approx \rho c^2$$

$$\text{e } T_{\alpha\beta} = \rho c^2 g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} u^\delta u^\gamma \quad (u^i \ll u^0 \approx 1)$$

Esplicitamente

$$T_{\alpha\beta} = \rho c^2 g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} u^\delta u^\gamma \approx \rho c^2 g_{\alpha 0} g_{\beta 0} \approx \rho c^2 (\eta_{\alpha 0} + h_{\alpha 0})(\eta_{\beta 0} + h_{\beta 0}) \approx$$

$$\approx \rho c^2 \left[\eta_{\alpha 0} \eta_{\beta 0} + \eta_{\alpha 0} h_{\beta 0} + \eta_{\beta 0} h_{\alpha 0} + h_{\alpha 0} h_{\beta 0} \right]$$

$$T_{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{in somma su } \delta \text{ e } \gamma \\ \text{resta } u^\delta u^\gamma \end{array}$$

Solo termine con $\alpha=0$ e $\beta=0$ è diverso da zero

• caso 00

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[\rho c^2 - \frac{1}{2} (\eta_{00} + h_{00}) \rho c^2 \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \frac{1}{2} \rho c^2 = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$$

$= \frac{1}{2} \rho c^2$

Dall'eq. di Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \rightarrow \frac{\nabla^2 \phi}{c^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \rightarrow \nabla^2 h_{00} = \nabla^2 \left(\frac{2\phi}{c^2} \right)$

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} + \text{cost} \quad (\text{ma la cost} = 0 \text{ per condizioni all'infinito})$$

Ritroviamo $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}$

• caso 11

$$R_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{11} - \frac{1}{2} \eta_{11} \rho c^2 \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \frac{1}{2} \rho c^2 = \frac{4\pi G \rho}{c^2} = \frac{\nabla^2 \phi}{c^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{11}$$

da cui anche qui $h_{11} = \frac{2\phi}{c^2}$

• caso 22 e 33: come sopra $h_{22} = h_{33} = h_{11} = \frac{2\phi}{c^2}$

• fuori diagonale: $\alpha \neq \beta$

$$T_{\alpha\beta} = 0; \eta_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta} \cong 0$$

per cui ho

$$\frac{1}{2} \square^2 h_{\alpha\beta} \cong 0 \rightarrow \square^2 h_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{eq. di Laplace:}$$

Se la soluzione è nulla all'infinito
(io ho imposto questo), allora è nulla

$$h_{\alpha\beta} \cong \text{cost} = 0$$

o costante anche all'interno

Quindi la metrica è diagonale e, messo tutto insieme,
si ha:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(-1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \text{cioè:}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

qui: indice di rifrazione gravitazionale

Sempre nelle condizioni di linearità, le eq di Einstein
si scrivono

$$R_{\beta\delta} = -\frac{1}{2} \square^2 h_{\beta\delta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} T^\alpha_\alpha \right] - \Lambda g_{\beta\delta} \quad / \cdot -2$$

$$\square^2 h_{\beta\delta} \cong -\frac{16\pi G}{c^4} \left[T_{\beta\delta} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\delta} T^\alpha_\alpha \right] + 2\Lambda \eta_{\beta\delta}$$

dove sono state trascurate le perturbazioni $h_{\beta\delta}$ nel tensor metrico
e nel tensore energia-impulso.

Unicità soluzioni equazione di Poisson

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da$$

applies to any well-behaved vector field \mathbf{A} defined in the volume V bounded by the closed surface S . Let $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$, where ϕ and ψ are arbitrary scalar fields. Now

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \quad (1.32)$$

and

$$\phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (1.33)$$

where $\partial/\partial n$ is the normal derivative at the surface S (directed outward from inside the volume V). When (1.32) and (1.33) are substituted into the divergence theorem, there results *Green's first identity*:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \, d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, da \quad (1.34)$$

We want to show the uniqueness of the solution of the Poisson equation, $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0$, inside a volume V subject to either Dirichlet or Neumann boundary conditions on the closed bounding surface S . We suppose, to the contrary, that there exist two solutions Φ_1 and Φ_2 satisfying the same boundary conditions. Let

$$U = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (1.37)$$

Then $\nabla^2 U = 0$ inside V , and $U = 0$ or $\partial U/\partial n = 0$ on S for Dirichlet and Neumann boundary conditions, respectively. From Green's first identity (1.34), with $\phi = \psi = U$, we find

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) \, d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} \, da \quad (1.38)$$

With the specified properties of U , this reduces (for both types of boundary condition) to:

$$\int_V |\nabla U|^2 \, d^3x = 0$$

which implies $\nabla U = 0$. Consequently, inside V , U is constant. For Dirichlet boundary conditions, $U = 0$ on S so that, inside V , $\Phi_1 = \Phi_2$ and the solution is unique. Similarly, for Neumann boundary conditions, the solution is unique, apart from an unimportant arbitrary additive constant.

Trasformazioni di gauge

La RG è invariante rispetto a un enorme gruppo di simmetria, il gruppo di tutte le possibili trasformazioni di coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$$

dove x'^μ è una funzione regolare (smooth) di x^μ ; più precisamente si richiede che $x'^\mu(x)$ sia invertibile, differenziabile e con una inversa differenziabile; $x'^\mu(x)$ è un arbitrario diffeomorfismo.

Stiamo considerando la teoria lineare, in cui

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Il fatto di aver scelto un particolare sistema di riferimento, in cui $g_{\mu\nu}$ ha la forma appena scritta, "rompe" l'invarianza della RG. Ma rimane ancora una simmetria residua di gauge; imporre la condizione $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ non è sufficiente = esistono infinite possibilità di scrivere $g_{\mu\nu}$ in questo modo.

Consideriamo infatti le trasformazioni di coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

in cui le derivate $|\partial_\mu \xi^\nu|$ siano al più dello stesso ordine di $|h_{\mu\nu}|$. [$\partial_\mu \xi^\nu = \partial_\mu \eta_{\rho\sigma} \xi^\sigma = \eta_{\rho\sigma} \partial_\mu \xi^\sigma$, dello stesso ordine di $\partial_\mu \xi^\sigma$, essendo $\eta_{\rho\sigma} \sim 1$]

l'effetto delle

trasformazioni di coordinate sul tensore metrico

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g^{\alpha\beta} = \left(\delta^\mu_\alpha + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) \left(\delta^\nu_\beta + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x'^\beta} \right) (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})$$

$$= \left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + \delta^\mu_\alpha \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x'^\beta} + \delta^\nu_\beta \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x'^\beta} \right) (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})$$

$$= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x'^\rho} + \eta^{\nu\rho} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\rho} + \mathcal{O}(\partial \xi \cdot h)$$

dal confronto ho

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x'^\rho} - \eta^{\nu\rho} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\rho} + \eta^{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\rho \partial \xi^\sigma}{\partial x'^\alpha}$$

Ricordiamo che $(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta})(\eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma}) = \delta^\alpha_\sigma$ e che gli indici di h si alzano e si abbassano con η

otteniamo:

$$h'_{\sigma\tau} = h_{\sigma\tau} - \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \underbrace{\eta^{\mu\rho}}_{\delta^{\mu\rho}} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} \underbrace{\eta^{\mu\sigma}}_{\delta^{\mu\sigma}} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\tau} \right)$$

$$= h_{\sigma\tau} - \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \eta_{\nu\tau} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\tau} \eta_{\mu\sigma} \right) \quad \left| \eta_{\mu\sigma} \xi^\mu \equiv \xi_\sigma \right.$$

$$h'_{\sigma\tau} = h_{\sigma\tau} - \left(\frac{\partial \xi_\tau(x)}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \xi_\sigma(x)}{\partial x^\tau} \right)$$

Quindi, se $h_{\sigma\tau}$ è soluzione delle eq. di Einstein, ogni metrica ottenuta per cambio di coordinate è ancora soluzione. In particolare anche $h'_{\sigma\tau}$ è una soluzione che mantiene $g_{\mu\nu}$ nella forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Vediamo di giustificare che si può porre $\frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} \equiv 0$.

Ricordiamo che $\bar{h}_{\beta\gamma} \equiv h_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} h$

Indicando con un "primo" le quantità che hanno subito le transf. di gauge, per la linearità delle trasformazioni sarà

$$\bar{h}'_{\beta\gamma} = h'_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} h'$$

$$= h_{\beta\gamma} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \eta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} \left(h - 2 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$\bar{h}'_{\beta\gamma} = \underbrace{h_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} h}_{\bar{h}_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \eta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{h}'^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \eta^{\beta\gamma} - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \eta^{\alpha\gamma} + \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\gamma} \quad / - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial \bar{h}'^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) - \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\alpha} \right)$$

$\square \xi^\gamma_\sigma(x)$

$$h'_{\sigma\tau} = h_{\sigma\tau} - \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\tau} - \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x^\sigma} \quad / \eta^{\sigma\alpha}$$

$$h'^{\alpha\sigma} = h^{\alpha\sigma} - \eta^{\sigma\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \quad \alpha = \sigma$$

$$h'^{\alpha\alpha} = h^{\alpha\alpha} - \eta^{\alpha\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$h' = h - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} = h - 2 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

Ottengo quindi

$$\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} - \square^2 \zeta_\delta(x)$$

Se $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} \neq 0$, posso fare una trasf. di gauge che mi porta ad avere $\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$, basta che $\square^2 \zeta_\delta(x) = \frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = f_\delta(x)$

E' quindi giustificato porre le 4 condizioni $\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} \equiv 0$

Nel vuoto le eq. di Einstein diventano

$$\square^2 h_{\beta\gamma} = 0$$

con in più le condizioni di gauge $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$. Quindi, dato 10 componenti indipendenti, con le condizioni di gauge (4) arriviamo a 6 componenti indipendenti di $h_{\beta\gamma}$.

Ma abbiamo visto che, se facciamo una trasformazione

$$x'^\mu(x) = x^\mu(x) + \zeta^\mu(x) \quad \text{allora, per effetto di questa,}$$

$$\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} - \square^2 \zeta_\delta(x)$$

Se $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$ e scelgo le 4 $\zeta_\delta(x)$ in modo che $\square^2 \zeta_\delta(x) = 0$, continuo a vedere le condizioni di gauge $\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$. Quindi la condizione $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$ non fissa completamente il gauge, ma restano 4 funzioni $\zeta^\mu(x)$ arbitrarie (perché $\square^2 \zeta_\delta = 0$), le quali permettono di porre altre 4 condizioni su $h_{\beta\gamma}$, per cui le sue componenti indipendenti si riducono da 6 a 2 soltanto!

Le 4 condizioni supplementari che conviene imporre sono:

$$h = 0 \quad h_{0i} = 0$$

* Una possibile trasformazione è del tipo $\zeta_\mu = \epsilon_\mu e^{i k_\delta \cdot x^\delta}$ con ϵ_μ costante. Questo soddisfa alle $\square^2 \zeta_\mu = 0$

A questa equazione vanno affiancate le **condizioni di gauge**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{ma siccome} \quad \bar{h}_\delta^\alpha &= \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\beta\delta} = \eta^{\alpha\beta} h_{\beta\delta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\delta} h = h_\delta^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\delta^\alpha h \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial h_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \delta_\delta^\alpha \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial h_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^\delta} = 0 \end{aligned}$$

Cerchiamo una soluzione rappresentata da un'onda piana: $h_{\beta\delta} = A_{\beta\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma}$ con $A_{\beta\delta} = \text{cost}$.

Poichè $h_{\beta\delta}$ è simmetrico (10 componenti indipendenti), poste le 4 condizioni di gauge, restano 6 gradi di libertà. Ma di questi 6, 4 sono in realtà fittizi, legati all'arbitrarietà del sistema di riferimento, per cui alla fine mi rimangono solo 2 gradi di libertà veri e propri. Vediamo come.

Scegliamo, come 4 condizioni che fissano il sistema di riferimento, le seguenti:

$$h = 0 \qquad h_{0i} = 0$$

Dalla prima segue subito che $\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta}$.

Sostituiamo l'onda piana nella $\square^2 h_{\beta\delta} = 0$, che scriviamo nella forma

$$\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} = 0$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} A_{\beta\delta} \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \right) &= A_{\beta\delta} \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(i k_\sigma e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \right) = i k_\sigma A_{\beta\delta} \eta^{\alpha\sigma} \cdot e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot i k_\alpha = \\ &= -A_{\beta\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot k_\sigma k_\alpha \eta^{\alpha\sigma} = -A_{\beta\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot k_\sigma k^\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\sigma k^\sigma = 0 \end{aligned}$$

Scriviamo il quadrivettore k^σ come $k^\sigma \equiv (\frac{\omega}{c}, \bar{k})$. Poichè $k_\sigma = \eta_{\sigma\alpha} k^\alpha$ sarà:

$$k_\sigma k^\sigma = \eta_{\sigma\alpha} k^\alpha k^\sigma = k^0 k^0 - (k^1 k^1 + k^2 k^2 + k^3 k^3) = \frac{\omega^2}{c^2} - |\bar{k}|^2 \equiv 0$$

Da questo ho $\omega = kc \rightarrow \hbar\omega = \hbar k \cdot c \Rightarrow E = P \cdot c$ come per i fotoni, con massa a riposo nulla: il quanto mediatore dell'interazione gravitazionale, il *gravitone*, ha massa nulla.

Osserviamo anche che

$$k_\gamma \cdot x^\gamma = \eta_{\gamma\sigma} k^\sigma \cdot x^\gamma = k^0 x^0 - |\bar{k} \cdot \bar{x}| = \omega t - \bar{k} \cdot \bar{x}$$

Dalla condizione di gauge:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{essendo} \quad h_\delta^\alpha &= \eta^{\alpha\sigma} h_{\sigma\delta} = \eta^{\alpha\sigma} A_{\sigma\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(A_{\sigma\delta} \eta^{\alpha\sigma} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \right) &= A_{\sigma\delta} \eta^{\alpha\sigma} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot i k_\alpha \equiv 0 \end{aligned}$$

cioè

$$i k_\alpha A_\delta^\alpha e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} = i k_\alpha h_\delta^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad h_\delta^\alpha \cdot k_\alpha = 0$$

che è detta *condizione di trasversalità*. Vediamo perchè.

Scegliamo la direzione di propagazione lungo l'asse x : ovvero $\bar{k} \equiv (k, 0, 0)$ e quindi $h_\sigma^\alpha \cdot k_\alpha = \eta^{\alpha\delta} h_{\delta\sigma} k_\alpha = h_{\delta\sigma} k^\delta = 0$. Ricordiamo le condizioni di scelta del sistema di riferimento ($h = 0$ e $h_{0i} = 0$).

$$\begin{aligned} \sigma = 0 &\rightarrow h_{00} k^0 + h_{10} k^1 + h_{20} k^2 + h_{30} k^3 = 0 \rightarrow h_{00} = 0 \\ \sigma = 1 &\rightarrow h_{01} k^0 + h_{11} k^1 + h_{21} k^2 + h_{31} k^3 = 0 \rightarrow h_{11} = 0 \\ \sigma = 2 &\rightarrow h_{02} k^0 + h_{12} k^1 + h_{22} k^2 + h_{32} k^3 = 0 \rightarrow h_{12} = h_{21} = 0 \\ \sigma = 3 &\rightarrow h_{03} k^0 + h_{13} k^1 + h_{23} k^2 + h_{33} k^3 = 0 \rightarrow h_{13} = h_{31} = 0 \end{aligned}$$

Riassumendo il tutto in forma matriciale

$$h_{\beta\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad h = 0 \Rightarrow h_{22} + h_{33} = 0 \Rightarrow h_{22} = -h_{33} \equiv h_+ \Rightarrow \quad h_{\beta\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix}$$

e per simmetria $h_{23} = h_{32} \equiv h_\times$

Vedo che se \bar{k} è lungo l'asse x , le componenti non nulle dell'onda sono perpendicolari all'asse x . Sono onde trasversali a due componenti (polarizzazioni):

$$\begin{cases} h_+ = A_+ e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x})} \\ h_\times = A_\times e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x})} \end{cases}$$

3.10 Lenti gravitazionali

Abbiamo visto che la metrica del campo debole, stazionario, si può scrivere nella forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Questo risultato ci permette di ricavarne un altro molto interessante. Per un raggio luminoso $ds^2 = 0$ e, posto $dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv dl^2$, avremo

$$\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl^2$$

da cui

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)} \equiv v_{eff}^2 \equiv \frac{c^2}{n_g^2}$$

dove v_{eff} è la velocità *efficace* di propagazione dell'onda luminosa e n_g si può pensare come un *indice di rifrazione* gravitazionale. Si ha

$$n_g = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)}} \sim \sqrt{\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)} \quad \rightarrow \quad n_g \simeq 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$$

Se $\Phi = 0$ all'infinito ed è negativo nei pressi di una massa, $n_g > 1$ e $v_{eff} < c$. Queste relazioni ci fanno vedere che lo spazio, per effetto della gravitazione, si comporta come un mezzo rifrattivo: questa è la base di quei fenomeni noti come **lenti gravitazionali**.

localize the source by a factor of $1/\text{SNR}$ better than this.

For long-lived sources, however, a single antenna synthesizes many antennas by observing the source at different points along its orbit around the sun. The baseline for such observations is 2 AU, so that, for a source emitting radiation at 1 kHz, the resolution is as good as $\Delta\theta = 10^{-6}$ rad, which is smaller than an arcsecond.

For space-based detectors orbiting the sun, like LISA, the baseline is again 2 AU, but the observing frequency is some five or six orders of magnitude lower, so the basic resolution is only of order 1 radian. However, as we shall see later, some of the sources that a space-based detector will observe have huge amplitude SNRs in the range of $\text{SNR} \sim 10^3 - 10^4$, which improves the resolution to arcminute accuracies in the best cases.

2.4 Amplitude of gravitational waves – the quadrupole approximation

The Einstein equations are too difficult to solve analytically in the generic case of a strongly gravitating source to compute the luminosity and amplitude of gravitational waves from an astronomical source. We will discuss numerical solutions later; the most powerful available analytic approach is called the *post-Newtonian* approximation scheme. This approximation is suited to gravitationally-bound systems, which constitute the majority of expected sources. In this scheme [79, 169], solutions are expanded in the small parameter $(v/c)^2$, where v is the typical dynamical speed inside the system. Because of the virial theorem, the dimensionless Newtonian gravitational potential ϕ/c^2 is of the same order, so that the expansion scheme links orders in the expanded metric with those in the expanded source terms. The lowest-order post-Newtonian approximation for the emitted radiation is the quadrupole formula, and it depends only on the density (ρ) and velocity fields of the Newtonian system. If we define the spatial tensor Q_{jk} , the second moment of the mass distribution, by the equation

$$Q_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3x, \quad (1)$$

then the amplitude of the emitted gravitational wave is, at lowest order, the three-tensor

$$h_{jk} = \frac{2}{r} \frac{d^2 Q_{jk}}{dt^2} \cdot \frac{G}{c^4} \quad (2)$$

This is to be interpreted as a linearized gravitational wave in the distant almost-flat geometry far from the source, in a coordinate system (gauge) called the Lorentz gauge.

2.4.1 Wave amplitudes and polarization in TT-gauge

A useful specialization of the Lorentz gauge is the TT-gauge, which is a comoving coordinate system: free particles remain at constant coordinate locations, even as their proper separations change. To get the TT-amplitude of a wave traveling outwards from its source, project the tensor in Equation (2) perpendicular to its direction of travel and remove the trace of the projected tensor. The result of doing this to a symmetric tensor is to produce, in the transverse plane, a two-dimensional matrix with only two independent elements:

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}. \quad (3)$$

This is the definition of the wave amplitudes h_+ and h_\times that are illustrated in Figure 1. These amplitudes are referred to as the coordinates chosen for that plane. If the coordinate unit basis vectors in this plane are \hat{e}_x and \hat{e}_y , then we can define the basis tensors

$$\mathbf{e}_+ = \hat{e}_x \otimes \hat{e}_x - \hat{e}_y \otimes \hat{e}_y, \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_\times = \hat{e}_x \otimes \hat{e}_y + \hat{e}_y \otimes \hat{e}_x. \quad (5)$$

In terms of these, the TT-gravitational wave tensor can be written as

$$\mathbf{h} = h_+ \mathbf{e}_+ + h_\times \mathbf{e}_\times. \tag{6}$$

If the coordinates in the transverse plane are rotated by an angle ψ , then one obtains new amplitudes h'_+ and h'_\times given by

$$h'_+ = \cos 2\psi h_+ + \sin 2\psi h_\times, \tag{7}$$

$$h'_\times = -\sin 2\psi h_+ + \cos 2\psi h_\times. \tag{8}$$

This shows the quadrupolar nature of the polarizations, and is consistent with our remark in association with Figure 1 that a rotation of $\pi/4$ changes one polarization into the other.

It should be clear from the TT projection operation that the emitted radiation is not isotropic: it will be stronger in some directions than in others¹. It should also be clear from this that spherically-symmetric motions do not emit any gravitational radiation: when the trace is removed, nothing remains.

2.4.2 Simple estimates

A typical component of d^2Q_{jk}/dt^2 will (from Equation (1)) have magnitude $(Mv^2)_{\text{nonsph}}$, where $(Mv^2)_{\text{nonsph}}$ is twice the nonspherical part of the kinetic energy inside the source. So a bound on any component of Equation (2) is

$$h \lesssim \frac{2(Mv^2)_{\text{nonsph}}}{r} \frac{G}{c^4} \lesssim 2 \frac{GM}{rc^2} \frac{v^2}{c^2} \tag{9}$$

It is interesting to observe that the ratio ϵ of the wave amplitude to the Newtonian potential ϕ_{ext} of its source at the observer's distance r is simply bounded by

$$h/\phi_{\text{ext}} < 2v_{\text{nonsph}}^2, \quad h/\phi_{\text{ext}}/c^2 \lesssim 2 \frac{v^2}{c^2}$$

and this bound is attained if the entire mass of the source is involved in the nonspherical motions, so that $(Mv^2)_{\text{nonsph}} \sim Mv_{\text{nonsph}}^2$. By the virial theorem for self-gravitating bodies

$$v_{\text{nonsph}}^2 \leq \phi_{\text{int}}, \quad \frac{v^2}{c^2} \lesssim \frac{GM}{Rc^2} = \frac{\phi_{\text{int}}}{c^2} \tag{10}$$

where ϕ_{int} is the maximum value of the Newtonian gravitational potential inside the system. This provides a convenient bound in practice [328]:

$$h \lesssim 2\phi_{\text{int}}\phi_{\text{ext}}. \quad h \lesssim 2 \frac{\phi_{\text{int}}}{c^2} \cdot \frac{\phi_{\text{ext}}}{c^2} \tag{11}$$

ϕ_{int}/c^2 The bound is attained if the system is highly nonspherical. An equal-mass star binary system is a good example of a system that attains this bound.

$G \cdot M \odot \approx 10^{30} \text{ kg} \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 10^8 \text{ s}^{-2}$ For a neutron star source, one has $\phi_{\text{int}} \sim 0.2$. If the star is in the Virgo cluster ($r \sim 18$ Mpc) and has a mass of $1.4 M_\odot$, and if it is formed in a highly-nonspherical gravitational collapse, then the upper limit on the amplitude of the radiation from such an event is 1.5×10^{-21} . This is a simple way to get the number that has been the goal of detector development for decades, to make detectors that can observe waves at or below an amplitude of about 10^{-21} .

¹In the case of an inspiraling binary, the root mean square of the two polarization amplitudes in a direction orthogonal to the orbital plane will be a factor $2\sqrt{2}$ larger than in the plane.

$$\frac{GM}{R} \sim v^2$$

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ext}}/c^2 &\sim \frac{GM_\odot}{18 \text{ Mpc} \cdot c^2} \\ &\approx 3 \times 10^{-21} \\ h &\lesssim 2 \cdot 0.2 \cdot 3 \times 10^{-21} \\ &\sim 10^{-21} \end{aligned}$$

$$n = 1 - \frac{2\phi}{c^2} \geq 1$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{c}{n} \leq c$$

LG 1

• Shapiro delay

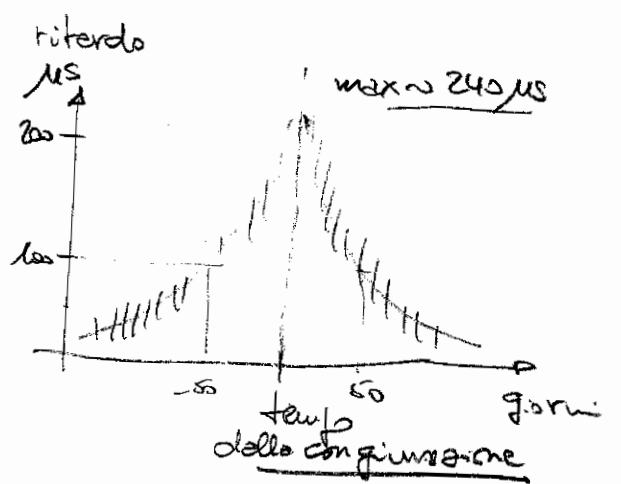
Poiché $v_{\text{eff}} < c$, esiste un ritardo di propagazione rispetto ad uno spazio vuoto:

$$d(\Delta t) = \frac{dx}{v_{\text{eff}}} - \frac{dx}{c} = \frac{dx}{c} (n-1) = -\frac{2\phi}{c^2} \frac{dx}{c}$$

da cui, integrando lungo la linea di vista:

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int \phi dx$$

Misurato con l'eco radar di Venere



• Principio di Fermat = tempo di volo è un estremo

$$d\tau = \frac{m dl}{c} \rightarrow \tau = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{m(\bar{x}) dl}{c}$$

parte "spaziale"

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \left(g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right) d\lambda^2$$

con λ parametro che "scorre" lungo la traiettoria

allora λ_2

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(x^i) \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda$$

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

(non posso prendere ds perché per i fotoni ds=0)

Eq. Eulero-Lagrange

NB: ci muoviamo praticamente in linea retta, per cui $g_{ij} \sim -\eta_{ij} = \delta_{ij}$ ($=1$ $i=j$, $=0$ $i \neq j$)

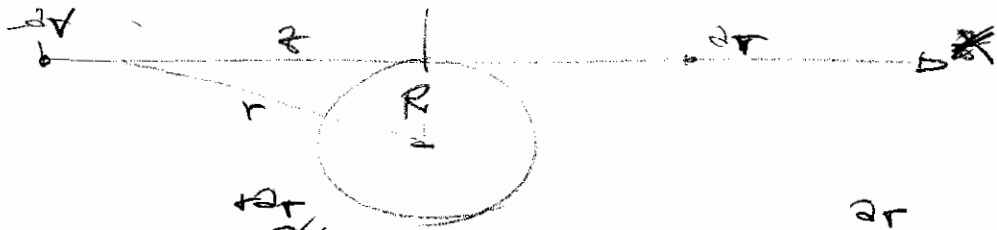
$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial m}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda} \left[m \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = g_{ij} \cdot \left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^k} \dot{x}^j + \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial x^k} \right) = g_{ij} (\dot{x}^j \delta_{ik} + \dot{x}^i \delta_{jk}) = g_{kj} \dot{x}^j + g_{ik} \dot{x}^i = 2 g_{ki} \dot{x}^i$$

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int \phi dx$$

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

2G1 bis



$$a_V \sim 108.2 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$a_T \sim 149.6 \text{ u}$$

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int_{-a_V}^{+a_V} -\frac{GM}{\sqrt{R^2+x^2}} dx = \frac{2GM}{c^3} \int_{-a_V}^{+a_V} \frac{dx}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R^2+x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{R^2+x^2} \right) \Big|_{-a_V}^{+a_V}$$

$$= \ln \left(a_V + \sqrt{R^2+a_V^2} \right) - \ln \left(-a_V + \sqrt{R^2+a_V^2} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{\sqrt{R^2+a_V^2} + a_V}{\sqrt{R^2+a_V^2} - a_V} \right) = \ln \left(\frac{a_V \left[\left(\frac{R}{a_V} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} + a_V}{a_V \left[\left(\frac{R}{a_V} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - a_V} \right)$$

$$= \ln \frac{a_V \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{a_V} \right)^2 \right) + a_V}{a_V \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{a_V} \right)^2 \right] - a_V} = \ln \frac{2a_V + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a_V}}{a_V + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a_V} - a_V}$$

$$\approx \ln \frac{2 \cdot 2 a_T a_V}{R^2} \sim \ln \left(\frac{4 a_T a_V}{R^2} \right)$$

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{4 a_T a_V}{R^2} \right)$$

(A+R)

$$= 2.33 \times 10^{-4} \text{ sec} \sim 230 \text{ } \overset{\text{u}}{\mu\text{sec}}$$

$$R = 0.696 \text{ M km}$$

$$a_V = 108.21 \times 10^6 \text{ m}$$

$$a_T = 149.60$$

$$\mu\text{sec} = 10^{-6}$$

Ma, se $g_{ij} \sim \delta_{ij} \rightarrow 2 g_{ij} \dot{x}^j = 2 \delta_{ij} \dot{x}^j = 2 \dot{x}^k$

Allora l'eq. di E-L è

$$\sqrt{\frac{\partial m}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left[m \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^k}} \cdot \dot{x}^k \right]} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^k}}$$

e ricordo che $\sqrt{\dot{x}^k} = dl$, per cui

$$\frac{\partial m}{\partial x^k} = \frac{d}{dl} \left[m \frac{dx^k}{dl} \right]$$

ma $dt = \frac{dl}{v_{eff}} = \frac{dl}{c} \cdot m \rightarrow dl = \frac{c dt}{m}$

per cui $\frac{d}{dl} = \frac{m}{c} \frac{d}{dt}$

$$\frac{\partial m}{\partial x^k} = \frac{m}{c} \frac{d}{dt} \left[m \cdot \frac{m}{c} \frac{dx^k}{dt} \right] \rightarrow m \sim 1 - \frac{2\phi}{c^2}$$

e $m = m(x)$, è stationario

$$\frac{\partial m}{\partial x^k} = - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

$$- \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = \frac{m^3}{c^2} \frac{d^2 x^k}{dt^2}$$

Cioè

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = - \frac{2}{m^3} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \approx m^{-3} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \sim \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)^{-3} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \sim \left(1 + \frac{6\phi}{c^2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \sim \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

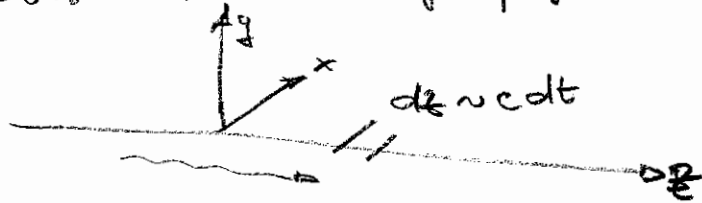
Allora

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} \sim -2 \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

$$\frac{d^2 \bar{x}^k}{dt^2} \sim -2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^k}$$

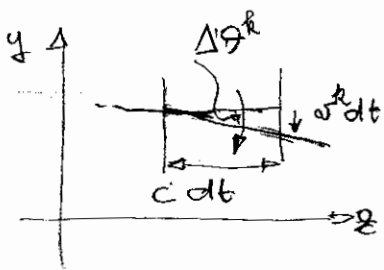
NB il fattore 2 che non ci si aspetterebbe della gravitazione "classica"

Consideriamo che la propagazione avviene lungo l'asse z



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx^k}{dt} \right) = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x^k} / \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{d}{cdt} \left(\frac{dx^k}{cdt} \right) = - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} / \cdot c dt = dz \rightarrow d \left(\frac{dx^k}{cdt} \right) = - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \cdot dz$$



$$\Delta \theta^k = - \frac{v^k dt}{c dt} \quad (- \text{for } v^k < 0, \Delta \theta^k > 0 \text{ for costruzione})$$

$$d\left(\frac{v^k}{c}\right) = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} dz ; \quad \frac{v^k}{c} = -\Delta \theta^k$$

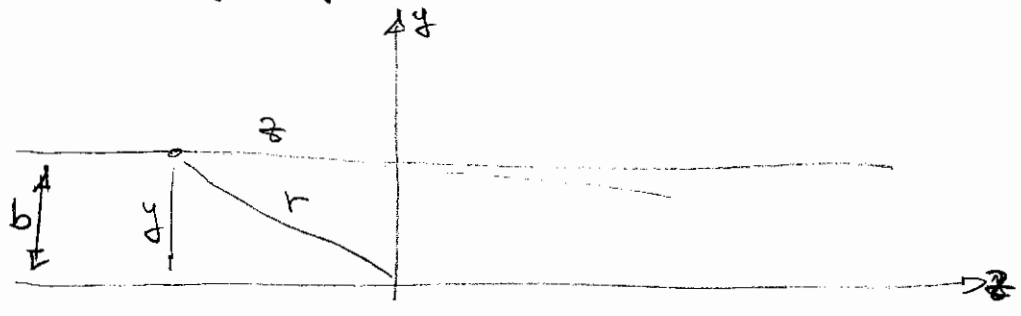
$$+ d(\Delta \theta^k) = + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} dz$$

Nel piano $x y$ avremo una deflessione vettoriale

$$\bar{\theta} = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\nabla}_{\perp} \phi dz$$

dove $\bar{\nabla}_{\perp} \phi$ indica il gradiente nel piano perpendicolare alla proiezione

Masse puntiforme di massa M



$$\phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{y^2+z^2}} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = +GM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2y = \frac{GM y}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\theta = \frac{2}{c^2} GM \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

ma $y = b \cos t = b$ parametro d'impatto

$$\theta \approx \frac{2}{c^2} GM b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\theta \approx \frac{2}{c^2} GM b \cdot \frac{2}{b^2} = \frac{4GM}{bc^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{a^2} - \left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{a^2}$$

al bordo del Sole:

$$\theta_{\odot} = 1.74 \text{ arcsec}$$

2 History of Gravitational Lensing

The first written account of the deflection of light by gravity appeared in the “Berliner Astronomisches Jahrbuch auf das Jahr 1804” in an article entitled: “Ueber die Ablenkung eines Lichtstrals von seiner geradlinigen Bewegung, durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht” (“On the Deflection of a Light Ray from its Straight Motion due to the Attraction of a World Body which it Passes Closely”) [142]. Johann Soldner – a German geodesist, mathematician and astronomer then working at the Berlin Observatory – explored this effect and inferred that a light ray close to the solar limb would be deflected by an angle $\hat{\alpha} = 0.84$ arcsec. It is very interesting to read how carefully and cautiously he investigated this idea and its consequences on practical astronomy.

In the year 1911 – more than a century later – Albert Einstein [41] directly addressed the influence of gravity on light (“Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes” (“On the Influence of Gravity on the Propagation of Light”). At this time, the General Theory of Relativity was not fully developed. This is the reason why Einstein obtained – unaware of the earlier result – the same value for the deflection angle as Soldner had calculated with Newtonian physics. In this paper, Einstein found $\hat{\alpha} = 2GM_{\odot}/c^2R_{\odot} = 0.83$ arcsec for the deflection angle of a ray grazing the sun (here M_{\odot} and R_{\odot} are the mass and the radius of the sun, c and G are the velocity of light and the gravitational constant, respectively). Einstein emphasized his wish that astronomers investigate this question (“Es wäre dringend zu wünschen, daß sich Astronomen der hier aufgerollten Frage annähmen, auch wenn die im vorigen gegebenen Überlegungen ungenügend fundiert oder gar abenteuerlich erscheinen sollten.” (“It would be very desirable that astronomers address the question unrolled here, even if the considerations should seem to be insufficiently founded or entirely speculative.”) Recently it was discovered that Einstein had derived the lens equation, the possibility of a double image and the magnifications of the images in a notebook in the year 1912 [120]. In 1913 Einstein even contacted the director of the Mt. Wilson Observatory, George Ellery Hale, and asked him whether it would be possible to measure positions of stars near the sun during the day in order to establish the deflection effect of the sun.

See [9] to view a facsimile of a letter Einstein wrote to G.E. Hale on October 14, 1913. In the letter, Einstein asked Hale whether it would be possible to determine the light deflection at the solar limb during the day. However, there was a “wrong” value of the deflection angle in a sketch Einstein included in the letter.

There actually were plans to test Einstein’s wrong prediction of the deflection angle during a solar eclipse in 1914 on the Russian Crimea peninsula. However, when the observers were already in Russia, World War I broke out and they were captured by Russian soldiers [27]. So, fortunately for Einstein, the measurement of the deflection angle at the solar limb had to be postponed for a few years.

With the completion of the General Theory of Relativity, Einstein was the first to derive the correct deflection angle $\hat{\alpha}$ of a light ray passing at a distance

r from an object of mass M as

$$\left(\tilde{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{r}, \right) \quad (1)$$

where G is the constant of gravity and c is the velocity of light. The additional factor of two (compared to the "Newtonian" value) reflects the spatial curvature (which is missed if photons are just treated as particles). With the solar values for radius and mass Einstein obtained [42, 43]:

$$\left(\tilde{\alpha}_{\odot} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2} \frac{1}{R_{\odot}} = 1.74 \text{ arcsec}. \right) \quad (2)$$

It is common wisdom now that the determination of this value to within 20% during the solar eclipse in 1919 by Arthur Eddington and his group was the second observational confirmation of General Relativity [38] and the basis of Einstein's huge popularity starting in the 1920s. (The first one had been the explanation of Mercury's perihelion shift.) Recently, the value predicted by Einstein was confirmed to an accuracy better than 0.02% [80].

In the following decades, light deflection or gravitational lensing was only very rarely the topic of a research paper: In 1924, Chwolson [31] mentioned the idea of a "fictitious double star" and the mirror-reversed nature of the secondary image. He also mentioned the symmetric case of star exactly behind star, resulting in a circular image. Einstein also reported in 1936 about the appearance of a "luminous circle" for perfect alignment between source and lens [44], and of two magnified images for slightly displaced positions¹. Today such a lens configuration is called "Einstein-ring", although more correctly it should be called "Chwolson-ring". Influenced by Einstein, Fritz Zwicky [174, 175] pointed out in 1937 that galaxies ("extragalactic nebulae") are much more likely to be gravitationally lensed than stars and that one can use the gravitational lens effect as a "natural telescope".

In the 1960s, a few partly independent theoretical studies showed the usefulness of lensing for astronomy [73, 84, 85, 93, 113, 114]. In particular, Sjur Refsdal derived the basic equations of gravitational lens theory and subsequently showed how the gravitational lens effect can be used to determine Hubble's constant by measuring the time delay between two lensed images. He followed up this work with interesting applications of lensing [116, 115, 117]. The mathematical foundation of how a light bundle is distorted on its passage through the universe had been derived in the context of gravitational radiation even before [124].

Originally, gravitational lensing was discussed for stars or for galaxies. When quasars were discovered in the 1960s, Barnothy [15] was the first to connect them with the gravitational lens effect. In the late 60s/early 70s, a few groups and individuals explored various aspects of lensing further, for example, statistical effects of local inhomogeneities on the propagation of light [57, 58, ?]; lensing

¹As stated above. Only very recently it was shown that Einstein had derived these equations as early as 1912, but did not bother to publish them [120].

applied to quasars and clusters of galaxies [34, 100, 125]; development of a formalism for transparent lenses [?, 32]; and the effect of an inhomogeneous universe on the distance-redshift relations [37].

But only in 1979 did the whole field receive a real boost when the first double quasar was discovered and confirmed to be a real gravitational lens by Walsh, Carswell & Weymann [160]. This discovery, and the development of lensing since then, will be described in Section 4.

- **Going further.** There are a few historic accounts of lensing which are more detailed than the one presented here. Some examples can be found in [122], in [135], and in [161]. The complete history of gravitational lensing has yet to be written.

(for $\theta, \beta, \bar{\alpha} \ll 1$; this condition is fulfilled in practically all astrophysically relevant situations). With the definition of the reduced deflection angle as $\alpha(\theta) = (D_{LS}/D_S)\bar{\alpha}(\theta)$, this can be expressed as:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta). \tag{6}$$

This relation between the positions of images and source can easily be derived for a non-symmetric mass distribution as well. In that case, all angles are vector-valued. The two-dimensional lens equation then reads:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \bar{\alpha}(\vec{\theta}). \tag{7}$$

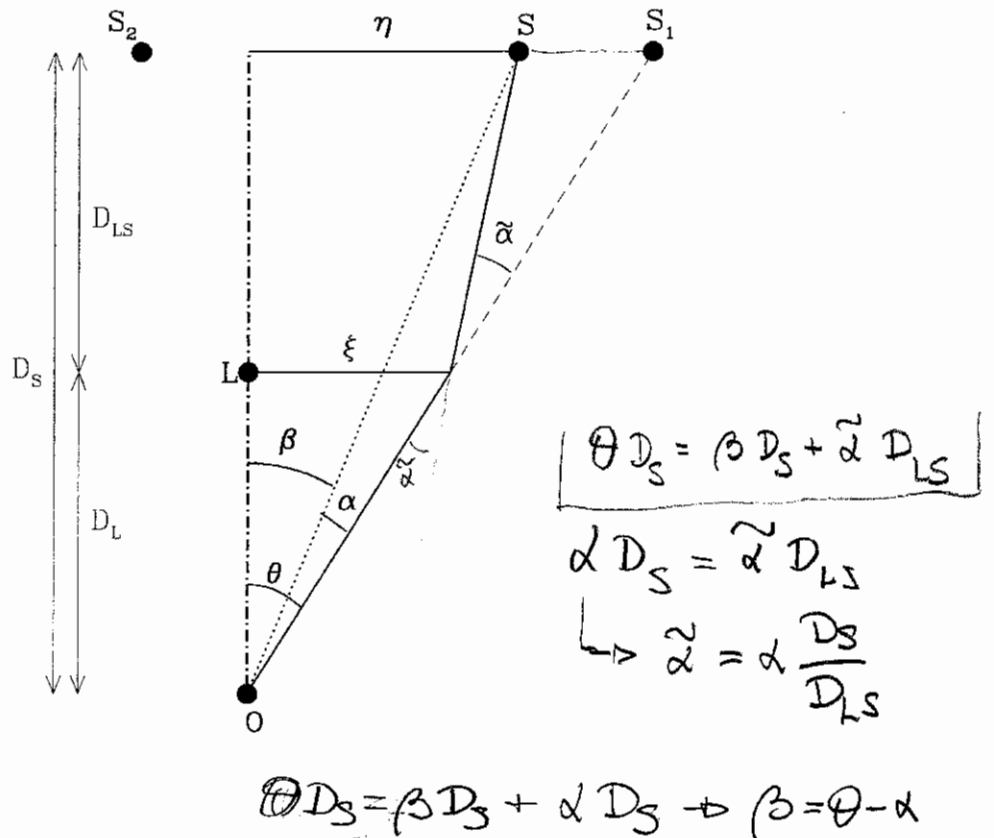


Figure 3: The relation between the various angles and distances involved in the lensing setup can be derived for the case $\bar{\alpha} \ll 1$ and formulated in the lens equation (6).

$\beta=0$ $\alpha=0$

$$\theta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}$$

$$\theta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}}$$

Einstein Ring

$$\frac{2}{\theta} = \frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{2}{D_L} = \theta \rightarrow \theta = \frac{2}{D_L}$$

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_S} \cdot \frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{1}{\theta D_L}$$

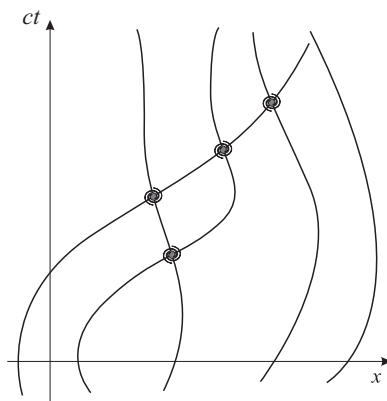
$$\alpha = \frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \cdot \frac{1}{\theta}$$

4 La metrica di Robertson-Walker

4.1 Il principio cosmologico

Se vogliamo applicare la Relatività Generale (intesa come la miglior teoria disponibile per descrivere il moto dei corpi per effetto della distribuzione di materia) allo studio del cosmo, dovremo aspettarci che, in generale, la geometria dello spazio tempo non sia statica, ma dipenda dal tempo. Questo è anche suggerito dall'evidenza osservativa di un moto generale di allontanamento delle galassie da noi (legge di Hubble).

Se però le linee di universo (traiettorie nello spazio-tempo) delle galassie, pensate come “mattoni” dell'universo e “traccianti” della sua evoluzione, fossero come in figura, le cose sarebbero estremamente complicate: non ci sarebbe nessun ordine nell'evoluzione e, dove le linee si incrociano, avremmo delle collisioni.



Fortunatamente le osservazioni astronomiche ci confortano. L'espansione dell'universo appare abbastanza regolare. Vi sono, a causa della presenza di disomogeneità (come gruppi, ammassi di galassie), delle perturbazioni nei moti delle galassie indotti dall'azione gravitazionale di queste disomogeneità. Ma questi moti sono relativamente “piccoli”, con velocità dell'ordine di $100 \div 1000 \text{ km/s}$, rispetto alle velocità di allontanamento (*recessione*)¹⁰ da noi delle galassie che, nelle survey ottiche, arrivano anche a frazioni significative della velocità della luce. Questi moti, inoltre, appaiono generalmente non sistematici.

Si sta inoltre delineando sempre meglio l'evidenza che, su scale dell'ordine dei $100 h^{-1} \text{ Mpc}$, l'universo sia in media simile a se stesso. L'elevatissimo grado di isotropia della radiazione di fondo a microonde, che è dell'ordine di 10^{-5} , e la posizione per nulla particolare occupata dalla Galassia nella struttura a grande scala, rendono ragionevole supporre che questa isotropia non sia caratteristica della nostra collocazione, ma sia tipica di ogni punto dello spazio. È questa un'ulteriore applicazione del punto di vista “Copernicano”, secondo il quale l'uomo non occupa più il centro geometrico dell'universo. Ma *l'isotropia attorno ad ogni punto dello spazio implica l'omogeneità di questo*¹¹ (in uno spazio disomogeneo sarebbe impossibile avere ovunque isotropia). Osserviamo incidentalmente che non è necessariamente vero il contrario: posso avere uno spazio omogeneo ma non isotropo (immaginiamo come esempio un universo omogeneo, ma in rotazione attorno ad un certo asse spaziale).

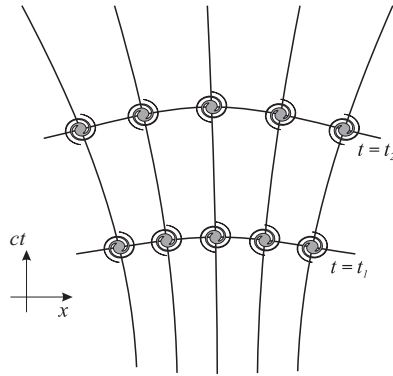
Sulla base di quanto detto sopra arriviamo ad enunciare il **Principio Cosmologico**: “Ad ogni epoca fissata l'universo appare lo stesso in ogni punto, a parte le irregolarità locali”.¹²

L'enunciazione di questo principio permette di semplificare enormemente lo studio della cosmologia. Possiamo pensare di smussare tutte le irregolarità e moti locali, su scale dell'ordine dei $100 h^{-1} \text{ Mpc}$, ottenendo un *substrato* che evolve in modo uniforme ovunque, ad un certo istante. Posso dire “ad un certo istante”, lasciando presupporre l'esistenza di un tempo definibile in modo inequivocabile, proprio perché l'universo è omogeneo: in ogni punto la situazione evolve allo stesso modo (posso pensare di legare lo scorrere del tempo, in ogni punto, alla densità locale di materia; a densità uguali corrispondono tempi uguali).

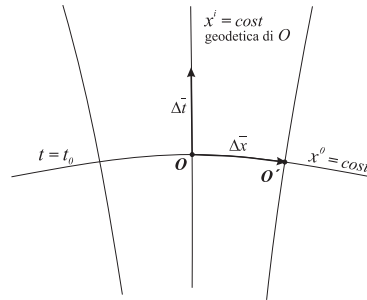
¹⁰Più che di una vera velocità, si tratta del rate di variazione della distanza propria, come vedremo; ma, seppur impropriamente (e pericolosamente), si usa abitualmente questo termine, come in questa pagina

¹¹Almeno nel caso che la distribuzione di materia non sia un frattale.

¹²Esiste anche un *Principio Cosmologico Perfetto*, secondo il quale *l'universo appare lo stesso in ogni luogo ed in ogni tempo*, nel quale quindi la densità ed i vari parametri cosmologici non mutano nel tempo. Questo Principio è stato implementato nel modello di universo detto *Stato Stazionario (Steady State)* di Hoyle, Bondi e Gold.



Immaginiamo di riempire fittamente questo spazio “smussato” e omogeneo di osservatori, ognuno con orologio e regoli, ognuno in quiete rispetto al moto medio della materia circostante. Le linee di universo (cioè le geodetiche) di questi osservatori non si intersecano, eccetto possibilmente in un punto singolare nel passato e, forse, nel futuro. C’è una sola geodetica che passa per un punto dello spazio-tempo, e quindi la materia possiede, in ogni punto, una ben definita velocità. Questo substrato “smussato” si comporta come un fluido perfetto. La regolarità del moto degli osservatori (*postulato di Weyl*) permette di definire, per ogni valore del tempo cosmico, una **sezione spaziale** $t = cost$ dello spazio-tempo. Queste sezioni spaziali sono perpendicolari alle geodetiche descritte dagli osservatori (vedi più avanti).



Se consideriamo infatti uno di questi osservatori O in quiete rispetto al moto medio locale della materia, la sua geodetica sarà per lui definita dalle condizioni $x^i = cost$ ($i = 1, 2, 3$); se consideriamo un osservatore vicino, che si trovi sulla stessa superficie $t = t_0 = cost$, cioè $x^0 = cost$, di O , il vettore $\Delta \bar{x}$ che unisce l’evento O all’evento O' sarà perpendicolare al vettore $\Delta \bar{t}$ parallelo alla geodetica per O ed alla quadrivelocità di componenti $(1, 0, 0, 0)$. Se fosse $\Delta \bar{t} \cdot \Delta \bar{x} \neq 0$ gli eventi O ed O' non sarebbero più contemporanei, perchè $\Delta \bar{x}$ avrebbe una componente non nulla lungo l’asse dei tempi di O .

Questo ci permette di semplificare la scelta della metrica per l’osservatore O , che sarà in generale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Poichè però vettori del tipo $(1, 0, 0, 0)$ (tipo $\Delta \bar{t}$) e vettori del tipo $(0, 1, 0, 0)$ del tipo $\Delta \bar{x}$ sono perpendicolari, il loro prodotto scalare si scriverà:

$$\Delta \bar{t} \cdot \Delta \bar{x} = 0 = g_{0i} \Delta t^0 \Delta x^i \quad \forall \Delta t^0, \forall \Delta x^i \Rightarrow g_{0i} = 0$$

e la metrica sarà del tipo

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Ricordiamo che, per il tipo di osservatori scelto, in quiete rispetto al moto medio locale dell’universo, le componenti spaziali dx^i sono nulle, cioè $x^i = cost$: i valori delle coordinate spaziali assegnate all’osservatore restano costanti nel tempo. Queste coordinate costanti sono dette *co-moventi* (*co-moving*). Il fatto che le coordinate degli osservatori siano costanti non implica che mutue distanze siano costanti, perchè i $g_{\alpha\beta}$ dipenderanno, in generale, anche dal tempo.

Consideriamo un osservatore co-movente O . Le sue coordinate spaziali saranno $x^i = cost$, per cui $dx^i = 0$; l’intervallo ds^2 tra due eventi successivi lungo la linea d’universo di O sarà quindi $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2$, ma questo è anche uguale, per definizione, a $c^2 d\tau^2$ con τ tempo proprio associato ad O :

$$c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

Lo spazio è omogeneo, e questa relazione deve valere per qualunque osservatore, quali che siano le sue coordinate x^i , per cui g_{00} deve dipendere solo da x^0 . Posso quindi definire una nuova scala di tempo cosmico tale che

$$cdt = \sqrt{g_{00}}dx^0$$

che coinciderà con il tempo proprio degli osservatori co-moventi e scriverò, usando t per indicare il tempo proprio,

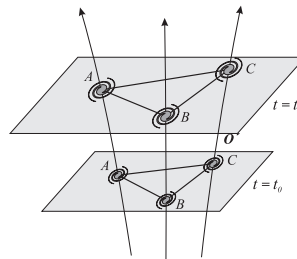
$$ds^2 = c^2dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$$

Un sistema di riferimento in cui sia $g_{00} \equiv 1$ e $g_{0i} \equiv 0$ è detto *sincrono*. In questo caso le linee d'universo $x^i = cost.$ sono linee geodetiche. Infatti il quadrivettore tangente alla linea d'universo $u^\alpha \equiv dx^\alpha/ds$ ha le componenti uguali a $(1, 0, 0, 0)$ e soddisfa automaticamente l'equazione delle geodetiche perché

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma \simeq \Gamma_{00}^\alpha$$

ma, essendo $g_{00} = 1 = cost.$ e $g_{0i} = 0$,

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right) = 0$$



Consideriamo ora un triangolo formato da tre particelle sia al tempo $t = t_0$ che al tempo successivo $t = t_1$. I due triangoli non saranno in generale uguali, ma saranno necessariamente simili, perchè se così non fosse ci sarebbe disomogeneità e/o anisotropia nell'universo, in contrasto con il Principio Cosmologico. Da questo deriva che la dipendenza dei g_{ij} dal tempo deve essere simile, e non dipendere dalle coordinate spaziali. Perciò sarà:

$$ds^2 = c^2dt^2 + a(t)^2 g_{ij} dx^i dx^j$$

dove la dipendenza dal tempo è tutta nella funzione $a(t)$ detta **fattore di scala**, ed i g_{ij} non dipendono dal tempo. Il rapporto $a(t_1)/a(t_0)$ rappresenta l'ingrandimento al tempo t_1 , rispetto al tempo t_0 , di una lunghezza misurata lungo le due superfici $t = t_1$ e $t = t_0$.

Osserviamo che, per eventi che giacciono su una superficie $t = cost$ ($dt = 0$), e che sono quindi tra loro contemporanei, il ds^2 sarà del tipo "spazio" e quindi < 0 , cioè $a^2(t)g_{ij}dx^i dx^j < 0$; se poniamo $\tilde{g}_{ij} = -g_{ij}$ sarà quindi $a^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j > 0$ e scriveremo

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j$$

che è del tipo $ds^2 = c^2dt^2 - (d\bar{l})^2$ (come siamo abituati a scrivere nella Relatività Ristretta), dove $d\bar{l}^2$ è l'intervallo in uno spazio 3-D caratterizzato da $t = cost = t_0$

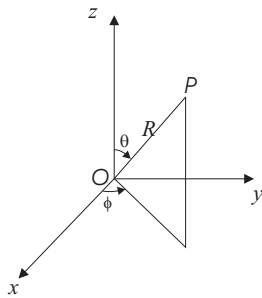
$$d\bar{l}^2 = a^2(t_0)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j \quad i = 1, 2, 3$$

Dobbiamo ora definire \tilde{g}_{ij} per uno spazio a 3 dimensioni che sia isotropo e omogeneo.

4.2 La metrica di Robertson e Walker

Usiamo anzitutto il fatto di avere una simmetria sferica dovuta all'isotropia scegliendo un sistema di coordinate sferico, che riflette questa simmetria. Restiamo, per ora, nello spazio euclideo e definiamo:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$



Definita in questo modo la superficie sferica è immediato ricavare il tensore metrico:

$$\begin{aligned}\bar{x}_R &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ \bar{x}_\theta &= (R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\sin\phi, -R\sin\theta) \\ \bar{x}_\phi &= (-R\sin\theta\sin\phi, R\sin\theta\cos\phi, 0)\end{aligned}$$

$${}^3g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$dl^2 = dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = dR^2 + R^2d\Omega^2$$

Per $R = cost$ sarà $dl^2 = R^2d\Omega^2$ con ${}^2g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$. Ricordiamo che l'area della superficie si può ottenere dalla relazione

$$dA = \sqrt{{}^2g} d\theta d\phi = R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

da cui l'area della sfera è pari a

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2\sin\theta d\theta d\phi = 4\pi R^2$$

Questa relazione si può generalizzare alle tre dimensioni ottenendo in questo caso un volume:

$$dV = \sqrt{{}^3g} dR d\theta d\phi = R^2\sin\theta dR d\theta d\phi$$

da cui otteniamo

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

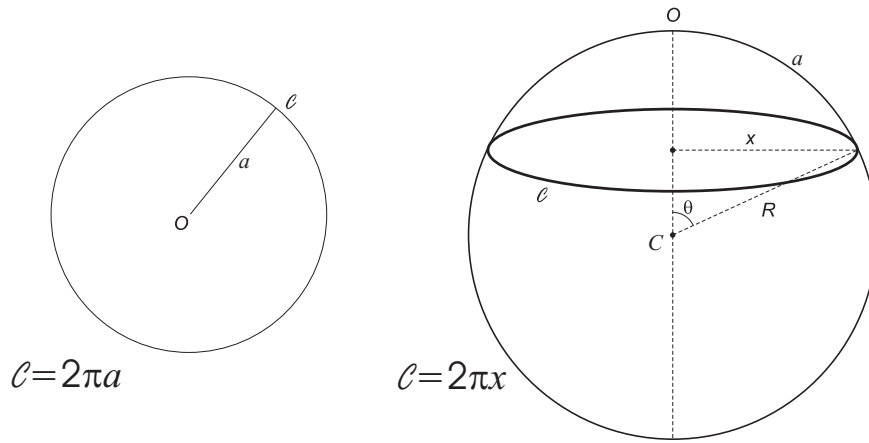
Tutto questo vale nella spazio euclideo, in cui l'area della sfera è $4\pi \times$ (il coefficiente di $d\Omega^2$). In uno spazio generico, non euclideo, ma a simmetria sferica, lo scostamento dallo spazio euclideo si farà sentire (a causa dell'isotropia) solo in direzione radiale. Ogni punto si troverà su una superficie sferica bidimensionale, il cui elemento di linea sarà

$$dl^2 = g(r')(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = g(r')d\Omega^2$$

dove $g(r')$ è una funzione della terza coordinata (quella radiale) che abbiamo chiamato r' . Sulla sfera $g(r') = cost$, e l'area della sfera sarà $4\pi \times g(r')$.

Poichè ho la massima libertà nel definire il sistema di coordinate, posso ridefinire la coordinata radiale r in modo che $r^2 \equiv g(r')$, con una trasformazione $r' \rightarrow r$. Allora, nuovamente, una superficie con $r = cost$ ha area $4\pi r^2$, ma ora r non corrisponde più alla distanza propria radiale (misurata idealmente con regoli a $t = cost$., immaginando cioè di congelare l'espansione) dal centro alla superficie sferica, anche se ovviamente ci sarà un legame tra le due grandezze.

Posso vedere la cosa in modo intuitivo riducendo di uno la dimensione dello spazio e parlando di circonferenza anzichè di area. Nel piano euclideo abbiamo $C = 2\pi a$; ma su una sfera sarà $C = 2\pi f(a) = 2\pi x$ con $x = f(a) = R\sin\theta = R\sin(a/R)$. Ora x non rappresenta la distanza propria della circonferenza dal centro, che è a , ma è una coordinata come le altre, e la posso usare se mi torna utile.



Torniamo alla sfera nello spazio 3-D, con r come coordinata radiale (legata alla distanza propria ma diversa da questa). L'elemento di linea nello spazio sarà

$$dl^2 = g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

I termini del tipo $g_{r\theta}$ o $g_{r\phi}$ saranno nulli poichè la coordinata radiale r sarà, per la simmetria sferica che impongo, perpendicolare alle superfici $r = cost$.

Tornando allo spazio-tempo avremo quindi un

$$ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2[f(r)dr^2 + r^2d\Omega^2]$$

con $f(r)$ da determinare. Fissiamo la coordinata temporale: $t = t_0$, così che $a(t) = a(t_0) = a_0 = cost$; il tensor metrico della parte spaziale sarà (in coordinate r, θ, ϕ):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 f(r) & 0 & 0 \\ 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad g = a^6 f(r) r^4 \sin^2\theta$$

Voglio imporre la condizione che lo spazio sia omogeneo; questo significa che anche la curvatura dello spazio sarà costante ovunque. Ho una sola funzione da definire, $f(r)$, per cui mi basta una sola condizione, cioè che lo scalare di Ricci della sezione spaziale a tempo cosmico costante, 3R , sia costante.

Ricordiamo che ${}^3R = g^{\alpha\beta} {}^3R_{\alpha\beta}$ e ${}^3R_{\alpha\beta} = {}^3R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ (abbiamo messo l'apice 3 davanti a R per indicare che ci riferiamo alla parte spaziale, non allo spazio-tempo completo).

Il calcolo è lungo, noioso, e banale. Riportiamo solo alcuni passaggi. Si inizia come sempre dalle connessioni affini; ce ne sono 18 indipendenti; di queste solo 7 sono diverse da zero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{f} \frac{df}{dr} & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{f} \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2\theta}{f} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Poichè ${}^3R = g^{\beta\delta} R_{\beta\delta} = g^{11} {}^3R_{11} + g^{22} {}^3R_{22} + g^{33} {}^3R_{33}$ risulta che:

$${}^3R_{11} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{f} \frac{df}{dr} \quad {}^3R_{22} = 1 - \frac{1}{f} + \frac{1}{2} \frac{r}{f^2} \frac{df}{dr} \quad {}^3R_{33} = \sin^2\theta \cdot {}^3R_{22}$$

da cui, imponendo che ${}^3R = costante = K$

$${}^3R = K = \frac{2}{a^2 r^2} \left[1 - \frac{1}{f} + \frac{r}{f^2} \frac{df}{dr} \right] = \frac{2}{a^2 r^2} \left[1 - \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{f} \right) \right] = \frac{2}{a^2 r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{f} \right) \right]$$

da cui

$$d \left[r \left(1 - \frac{1}{f} \right) \right] = \frac{K a^2 r^2}{2} dr$$

cioè

$$r \left(1 - \frac{1}{f} \right) = \frac{K a^2 r^3}{6} + A \quad \Rightarrow \quad f(r) = \frac{1}{1 + \frac{K a^2 r^2}{6} - \frac{A}{r}}$$

Ma, se $r \rightarrow 0$, la metrica sarà quella euclidea per cui $f(r) \equiv 1$; ne segue che $A = 0$ e

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{K a^2(t) r^2}{6}} + r^2 d\Omega \right]$$

Osserviamo però che, come avevamo detto, la dipendenza dal tempo della parte spaziale si esplica attraverso la $a^2(t)$ davanti alla parentesi quadra, ed il termine all'interno di questa non dipende dal tempo. Questo significa che $K a^2(t)$ non dipende dal tempo, e questo si vede anche dalla relazione che definisce K , nella quale si vede che $K a^2$ è funzione di r . Sarà allora $K = K(t)$.

Definiamo un cambiamento di scala in r tale che $\frac{K a^2 r^2}{6} \equiv k \tilde{r}^2$, dove $k = 0$ se $K = 0$, altrimenti k ha lo stesso segno di K , ma modulo 1. Abbiamo quindi

$$r^2 = \frac{6k}{K a^2} \tilde{r}^2 \quad \rightarrow \quad r = \tilde{r} \sqrt{\frac{6k}{K a^2}} \quad dr = \sqrt{\frac{6k}{K a^2}} d\tilde{r}$$

e quindi

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{6k}{K(t) a^2(t)} \cdot \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k \tilde{r}^2} + \frac{6k}{K(t) a^2(t)} \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right] = \frac{6k}{K(t)} \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 - k \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

Se vogliamo che $dl^2 = \tilde{a}^2(t)[\dots]$, definiamo $\frac{6k}{K(t)} \equiv \tilde{a}^2(t)$ e avremo:

$$dl^2 = \tilde{a}^2(t) \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 - k \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

in cui $K(t) = {}^3 R(t) \equiv \frac{6k}{\tilde{a}^2(t)}$.

Se finalmente lascio cadere la tilde inessenziale avremo che la metrica del nostro universo si potrà scrivere

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

che è la *metrica* (l'elemento di linea) di *Robertson-Walker*, in cui lo scalare di Ricci che esprime la curvatura della parte spaziale è $K = 6k/a^2(t)$, dove t è il tempo cosmico, tempo proprio degli osservatori co-moventi, θ e ϕ sono coordinate angolari e r è legata alla distanza radiale.

4.3 Topologia dell'Universo

Vediamo ora in dettaglio le proprietà topologiche dei modelli cosmologici corrispondenti ai tre casi $k = 0, +1, -1$.

4.3.1 Caso $k = 0$

Se $k = 0$ la sezione spaziale a tempo cosmico costante è uno spazio euclideo (piatto) \mathbf{E}^3 , $0 < r < \infty$, lo spazio è infinito. Superfici e volumi si esprimono nel modo abituale.

4.3.2 Caso $k = +1$

Per $d\theta = d\phi = 0$ abbiamo $dl = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$ per cui vedo che $|r| < 1$ e la metrica diverge se $r \rightarrow 1$. Posso eliminare questa divergenza scegliendo una nuova coordinata χ al posto di r , tale che $r = \sin \chi$ così che

$$dr = \cos \chi d\chi = \sqrt{1 - \sin^2 \chi} d\chi = \sqrt{1 - r^2} d\chi$$

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{(1-r^2)d\chi^2}{1-r^2} + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right] = a^2(t) \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right]$$

con $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

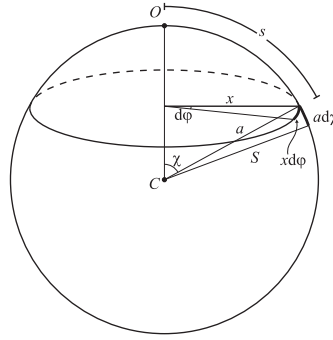
Per visualizzare meglio la metrica facciamo un passo indietro, alla sfera in 2-D in \mathbf{E}^3 . Sarà $\chi = s/a$; $s = a\chi$, $a\sin\chi = x$

$$dl^2 = a^2 d\chi^2 + x^2 d\phi^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\phi^2)$$

Inoltre, detto $u \equiv x/a$, $u = \sin\chi$, $du = \cos\chi d\chi = \sqrt{1 - \sin^2\chi} d\chi = \sqrt{1 - u^2} d\chi$ e la metrica diviene:

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{du^2}{1 - u^2} + u^2 d\phi^2 \right]$$

Vedo che la coordinata r in Robertson-Walker con $k = +1$ corrisponde a x/a nel caso 2-D della sfera; χ varia tra 0 e π .



Consideriamo una ipersfera¹³: una sfera 3-D in \mathbf{E}^4 . L'equazione della sfera, estendendo il teorema di Pitagora e ricordando che la quarta dimensione sarà in qualche modo perpendicolare alle altre tre, sarà

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \quad a = cost = \text{raggio della sfera}$$

Sia $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (sfera 2-D per $u = cost$) così che $a^2 = r^2 + u^2 = cost$. Differenziando ottengo

$$2rdr + 2udu = 0 \quad \rightarrow \quad rdr = -udu$$

$$du^2 = \frac{r^2 dr^2}{u^2} = \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2}$$

Questo per garantire che lo spostamento du sia sulla ipersfera in \mathbf{E}^4 . Il dl^2 in \mathbf{E}^4 sarà (ricordiamo che \mathbf{E}^4 è euclideo):

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$$

Esprimiamo $dx^2 + dy^2 + dz^2$ in coordinate polari come al solito abbiamo:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + du^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} = dr^2 \left[1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2} \right] + r^2 d\Omega^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 d\Omega^2$$

Posto $\tilde{r} = r/a$ abbiamo che ($dr = a d\tilde{r}$):

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 - \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

E questa è la parte spaziale della metrica di Robertson-Walker con $k = +1$, che è quindi localmente la stessa di una ipersfera in \mathbf{E}^4 .

Torniamo alla metrica di R&W nella forma $dl^2 = a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2]$ e, ricordando come si valutano gli elementi di superficie e di volume, calcoliamo appunto superficie e volume.

Per una sfera 2-D, ponendo $d\chi = 0$, avremo

$${}^2g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2\chi & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\chi \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \sqrt{{}^2g} = a^2 \sin^2\chi \sin\theta$$

$$A(\chi) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 \sin^2\chi \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi a^2(t) \sin^2\chi$$

¹³Possiamo pensare alla *sfera* come ad un disco il cui bordo è tutto identificato in un punto. Con un'analogia, possiamo pensare ad un'*ipersfera* come ad una sfera (intesa come volume sferico), la cui superficie è tutta identificata in un punto.

Questa è minima sia per $\chi \rightarrow 0$ che per $\chi \rightarrow \pi$ e massima all' "equatore" $\chi = \pi/2$, ed è sempre, come ci si aspetta per $K > 0$, $k = +1$:

$$\frac{\text{Area}}{(\text{raggio})^2} = \frac{4\pi a^2 \sin^2 \chi}{a^2 \chi} < 4\pi$$

Il raggio proprio si ottiene dalle metrica ponendo $d\theta = d\phi = 0$ e risulta $r_p = a\chi$.

Per calcolare il volume dello spazio avremo

$${}^3g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{{}^3g} = a^3 \sin^2 \chi \sin \theta$$

Il volume entro la coordinata "radiale" χ sarà:

$$V(\chi) = \int_{\chi=0}^{\chi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\theta d\phi d\chi = 2\pi a^3 \left(\chi - \frac{\sin 2\chi}{2} \right)$$

che cresce, ed ha un valore massimo finito, per $\chi = \pi$ pari a $V = 2\pi^2 a^3$.

Il volume totale dello spazio è proporzionale a a^3 , per cui si dice che $a(t)$ è il "raggio dell'universo". Il volume è finito, anche se non ci sono confini fisici e la topologia di questo spazio è indicata con \mathbf{S}^3 .

4.3.3 Caso $k = -1$

In questo caso non vi sono discontinuità in r ($0 \leq r \leq \infty$) e

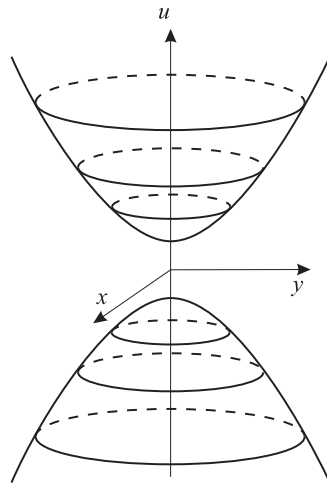
$$dl^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Introduciamo anche qui la variabile χ e definiamo $r \equiv \sinh \chi$ da cui (si ricordi che $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$) $dr = \cosh \chi d\chi = \sqrt{1 + \sinh^2 \chi} d\chi = \sqrt{1 + r^2} d\chi$ e

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

Possiamo cercare di fare come nel caso di $k = +1$: di "immergere" la superficie di cui dl^2 è la metrica, in uno spazio a 4 dimensioni. Definiamo la superficie

$$\begin{aligned} u^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= a^2 = \text{cost} & r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ u^2 - r^2 &= a^2 \Rightarrow u du = r dr & du^2 &= \frac{r^2 dr}{a^2 + r^2} \end{aligned}$$



Possiamo vedere la superficie (eliminando, come in figura, la coordinata z) come un iperboloide a 2 falde. Ma se tentiamo di fare la stessa cosa fatta per la ipersfera scrivendo $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$ otteniamo

$$dl^2 = \frac{r^2 dr}{a^2 + r^2} + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

che **non** è metrica voluta. Per riuscire nell'intento dobbiamo assumere uno spazio simile a quello di Minkowski

con tensor metrico $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ per cui $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2$ e allora:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 - \frac{r^2 dr}{a^2 + r^2} = \frac{dr}{1 + r^2/a^2} + r^2 d\Omega^2$$

e posto $\bar{r} \equiv r/a$ si ha, come voluto:

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{d\bar{r}}{1 + \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

Non è possibile contenere lo spazio, indicato con \mathbf{H}^3 , in \mathbf{E}^4 , come si cercava di fare! Ci vorrebbe infatti \mathbf{E}^7 (come per \mathbf{H}^2 ci vorrebbe \mathbf{E}^5).

Analogamente a quanto abbiamo fatto per $k = +1$ possiamo calcolare la superficie della sfera di raggio $a\chi$ (raggio proprio):

$$A(\chi) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 \sinh^2 \chi \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi a^2 \sinh^2 \chi$$

e poichè $\sinh \chi \geq \chi$ si ha che

$$\frac{\text{Area}}{(\text{raggio})^2} = \frac{4\pi a^2 \sinh^2 \chi}{a^2 \chi^2} > 4\pi$$

Il volume, potendo $\chi \rightarrow \infty$, è infinito. Il fatto che la superficie della sfera cresca più rapidamente che nello spazio euclideo rende impossibile contenere \mathbf{H}^3 in \mathbf{E}^4 , cosa invece possibile per \mathbf{S}^3 , in cui l'area cresce meno rapidamente che in \mathbf{E}^4 .

Chiudiamo il paragrafo facendo osservare che la metrica di R&W, oltre che nel modo in cui l'abbiamo presentata sopra, cioè

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

si può trovare scritta anche nella forma, peraltro equivalente,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

con $R(t)$ fattore di scala, e la funzione $S_k(\chi)$ definita come:

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & (k = +1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh(\chi) & (k = -1) \end{cases}$$

Ma, **attenzione**, al posto di χ si può trovare scritto r , per cui bisogna capire dal contesto quale delle due relazioni viene usata! Noi useremo generalmente la prima delle due forme.

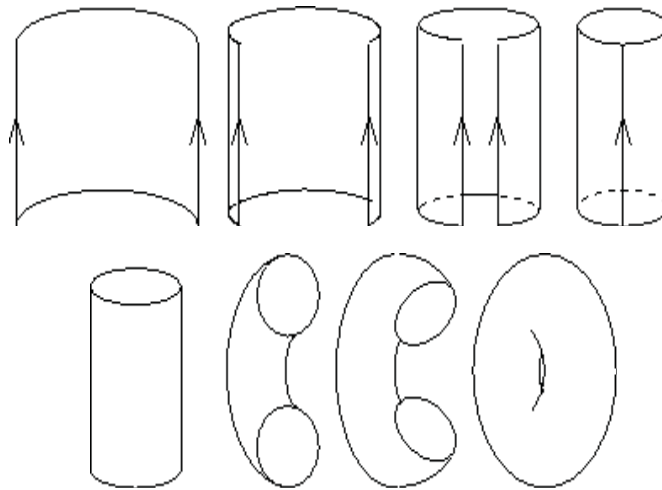
4.3.4 Topologie più complesse

Nei tre casi visti sopra abbiamo analizzato le tre topologie più semplici: \mathbf{E}^3 , \mathbf{S}^3 ed \mathbf{H}^3 . Ma la Relatività Generale è in realtà una **teoria locale**, e la nostra assunzione di isotropia e omogeneità locali implica che lo spazio è **localmente** quello di \mathbf{E}^3 , \mathbf{S}^3 ed \mathbf{H}^3 .

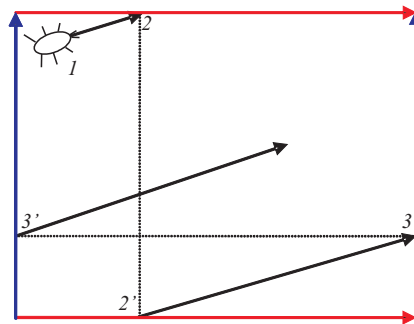
Sono però possibili topologie più complesse¹⁴. Vediamo alcuni esempi.

Se partiamo inizialmente in 2 dimensioni (per aiutare l'intuizione) possiamo costruire un *Toro* 2D (\mathbf{T}^2) partendo da una superficie rettangolare piana (euclidea). Si identificano in modo opportuno punti appartenenti al bordo del rettangolo e questo si può visualizzare immaginando di eseguire piegature ed incollaggi come mostrato qui sotto (ma la curvatura si mantiene nulla, mentre la ciambella qui sotto non ha curvatura nulla in \mathbf{E}^3):

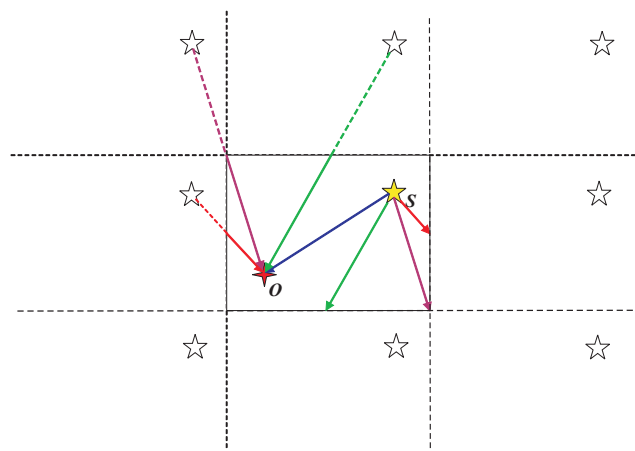
¹⁴Si vedano, ad esempio, gli articoli *The Mathematics of Three-Dimensional Manifolds* di *W.P. Thurston* e *J.R. Weeks*, Scientific American, July 1984, p. 94 e *La forma dell'universo* di *C. Adams* e *J. Shapiro*, Le Scienze, 414, p. 72. Anche il libro *La segreta geometria del cosmo* di *J.-P. Luminet*, 2004, Raffaello Cortina Editore, ed il sito di *Jeffrey Weeks* www.geometrygames.org



Immaginiamo ora un insetto che cammina sulla superficie del toro. L'insetto attraversa il confine superiore in 2 e rientra dal basso in 2', esce in 3 a destra e rientra in 3' a sinistra. Il toro è equivalente ad un rettangolo i cui bordi sono identificati a due a due. Pur essendo finita, la superficie non ha confini.



Un altro effetto tipico di questo tipo di topologia compatta è la presenza di fantasmi (*ghosts*), cioè di immagini multiple dello stesso oggetto S , che arrivano in O da varie direzioni. Poiché i cammini, e quindi i tempi di percorrenza, sono diversi, le varie immagini dello stesso oggetto ce lo mostrano in diversi momenti della sua evoluzione (quindi non è banale riconoscerlo!).

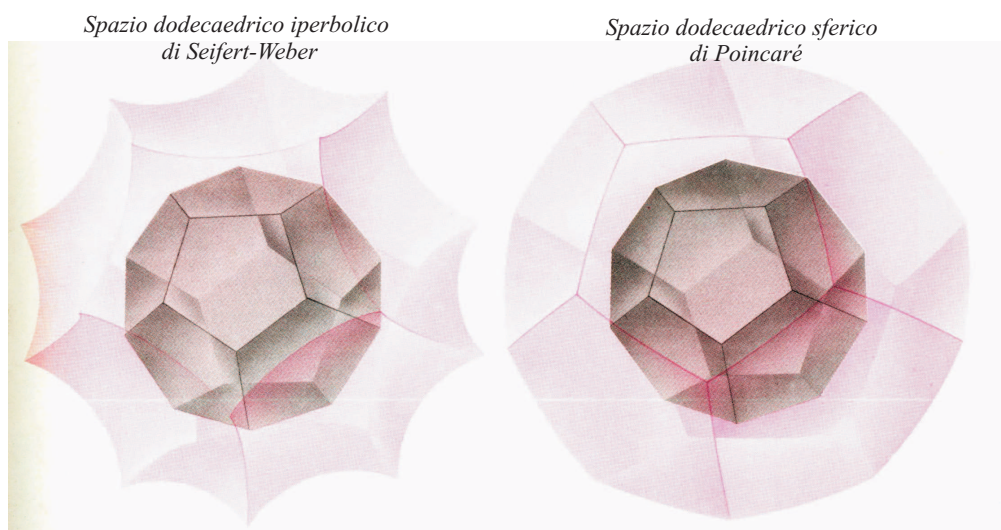


L'analogo di \mathbf{T}^2 in 3D è il toro 3D, \mathbf{T}^3 . Un osservatore posto al suo interno ha l'impressione di trovarsi in una stanza con pareti, soffitto e pavimento ricoperti di specchi che però non rovesciano l'immagine. Anche qui osserveremo, per ogni oggetto reale, i suoi fantasmi in tutte le direzioni.



Quanto detto vale per uno spazio Euclideo (2D o 3D), che può essere rappresentato, oltre che con una celletta a forma di parallelepipedo, anche con una a forma di prisma a base esagonale. Nel caso di uno spazio 3D euclideo ci sono 10 varietà euclidee compatte candidate a rappresentare il nostro universo, che apparentemente non presentano confini, come il toro 2D o 3D.

Esistono varietà compatte anche negli spazi non euclidei, con curvatura positiva e negativa. Tra queste ricordiamo lo spazio dodecaedrico iperbolico di *Seifert-Weber*, variante compatta (cioè con volume finito) di \mathbf{H}^3 , ottenuto incollando ogni faccia del dodecaedro a quella opposta dopo una rotazione di 108° (tre decimi di angolo giro). Una variante compatta dell'ipersfera \mathbf{S}^3 è invece rappresentata dallo spazio dodecaedrico sferico di *Poincaré*, ottenuto incollando ogni faccia del dodecaedro a quella opposta dopo una rotazione di 36° (un decimo di angolo giro).



Già nel 1924 *Friedmann* e nel 1927 *Lemaître* si erano resi conto che le equazioni di Einstein non permettevano, da sole, di decidere se l'universo fosse finito o infinito. Friedmann mostrò come lo spazio possa diventare finito se si identificano i punti tra loro, intuì che questo consentiva l'esistenza di fantasmi e osservò che uno spazio a curvatura positiva è sempre finito. Lemaître fece notare che gli spazi con curvatura negativa ammettono topologie con volume finito.

*J.-P. Luminet*¹⁵ ha interpretato la mancanza di fluttuazioni del fondo cosmico a microonde (*CMB*) su scale angolari maggiori di 60° come dovute al volume finito del nostro universo. La cella che meglio si accorda con i dati sperimentali (quelli del satellite *WMAP*) sarebbe quella di uno spazio dodecaedrico sferico di Poincaré.

In base a quanto detto sopra l'affermazione che se l'universo è finito la sua geometria deve essere localmente sferica, e che se la geometria è localmente iperbolica o euclidea l'universo deve essere infinito, è sbagliata. Ma tutti gli spazi di curvatura costante e localmente sferici ($k = +1$) sono compatti.

¹⁵J.-P. Luminet et al., 2003, *Nature* **425**, 593

Poichè spesso si trova, nella letteratura, confusione tra curvatura, topologia ed evoluzione temporale di $a(t)$, vediamo le possibilità corrispondenti a questi tre parametri (l'evoluzione in dettaglio di $a(t)$ la vedremo meglio più avanti):

- Sulla base della **curvatura** (della sezione spaziale di $a = \text{costante}$) possiamo avere:
 - un universo *sferico* (ellittico) se $k = +1$
 - un universo *euclideo* (piatto) se $k = 0$
 - un universo *iperbolico* se $k = -1$
- In base alla **topologia** possiamo avere:
 - un universo *finito* (per quanto riguarda il volume parte spaziale)
 - un universo *infinito* (per quanto riguarda il volume parte spaziale)
- Per quanto riguarda l'**evoluzione temporale** e “destino” futuro possiamo avere:
 - un universo *chiuso* \rightarrow termina con un ricollasso
 - universo *critico* \rightarrow diventa asintoticamente statico
 - universo *aperto* \rightarrow l'espansione continua all'infinito

curvatura	topologia (volume spaziale)
sferico $k = +1$	finito
euclideo $k = 0$	finito o infinito
iperbolico $k = -1$	finito o infinito

4.4 Legge di Hubble

Consideriamo un osservatore co-movente preso come origine, un punto caratterizzato dalle coordinate co-moventi (r, θ, ϕ) ed un raggio luminoso (il metodo più efficiente per scambiare informazioni) che li congiunge radialmente ($d\theta = d\phi = 0$). Sappiamo che per i fotoni $ds^2 = 0$.

Dalla metrica di R&W avremo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \equiv 0$$

Un segnale luminoso emesso dal punto (r, θ, ϕ) a $t = 0$ (nell'ipotesi che esista un istante iniziale dell'universo, come nel modello del *Big Bang*) giungerà a $r = 0$ (l'osservatore) all'istante t tale che (ricordiamo che, se dt è positivo, dr è negativo, cioè al trascorrere del tempo il raggio luminoso passa per punti via via a noi più vicini):

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

Vediamo il significato del termine a destra. Immaginiamo di misurare, ad un istante t fissato, con una serie di regoli (immaginando di congelare l'espansione durante la misura) la distanza radiale tra l'origine e il punto di coordinate (r, θ, ϕ) ; dalla parte spaziale ($dt \equiv 0$) di R&W avremo che questa distanza, detta **distanza propria** d_{pr} , sarà espressa da:

$$d_{pr}(t) = \int_0^r \frac{a(t) \cdot dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = a(t) \cdot f_k(r)$$

dove, per quanto abbiamo già visto quando avevamo fatto le sostituzioni $r = \sin \chi$, $r = \chi$, $r = \sinh \chi$:

$$f_k(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \arcsin r \simeq r + r^3/6 + \dots & (k = +1) \\ r & (k = 0) \\ \operatorname{arcsinh} r \simeq r - r^3/6 + \dots & (k = -1) \end{array} \right\} \simeq r + k r^3/6 + \dots$$

In realtà la $d_{pr}(t)$ non è direttamente misurabile. Il suo legame con $d_{pr}(t_0)$ ($t = t_0$ corrisponde all'epoca attuale) viene dal fatto che

$$\frac{d_{pr}(t)}{a(t)} = \frac{d_{pr}(t_0)}{a(t_0)} = f_k(r) \quad \text{essendo } r = \text{cost nel tempo}$$

$$d_{pr}(t) = \frac{a(t)}{a_0} d_{pr}(t_0) \quad (a_0 = a(t_0))$$

$d_{pr}(t)$ è quindi funzione del tempo tramite $a(t)$. La quantità $f_k(r)$, o anche $a_0 f_k(r)$, invariante nel tempo, viene chiamata anche *distanza co-movente*.

Se deriviamo rispetto al tempo la relazione $d_{pr}(t) = a(t) \cdot f_k(r)$ otteniamo il tasso di variazione di d_{pr} nel tempo, che dimensionalmente è una velocità, e che viene chiamata **velocità di recessione** v_r :

$$\frac{dd_{pr}(t)}{dt} \equiv v_r(t) = \dot{a}(t) f_k(r) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d_{pr}(t) \equiv H(t) d_{pr}(t)$$

$$v_r(t) = H(t) d_{pr}(t)$$

Questa relazione esprime la **legge di Hubble** e la quantità $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ è detta **parametro di Hubble**. Se scriviamo questa relazione per il tempo attuale t_0 avremo $v_r(t_0) = H_0 d_{pr}(t_0)$, dove $H_0 \equiv H(t_0)$ è la cosiddetta **costante di Hubble**. Si usa parametrizzare l'incertezza sul suo valore sperimentale scrivendo $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, con $0.5 \leq h \leq 1.0$. H_0 ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, ed è approssimativamente $1/H_0 \simeq 3 \cdot 10^{17} h^{-1} \text{ s}$. Dopo decenni di dispute, il valore di H_0 sembra finalmente abbastanza definito; il valore fornito di recente dal *Key Program* a questo dedicato dallo *Hubble Space Telescope* è $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, mentre dal fondo a microonde e dalla struttura a grande scala dell'universo si ha, in ottimo accordo, $H_0 = 71 (+0.04, -0.03) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Sulla legge di Hubble va fatto un commento importante. Fissato H_0 , se d_{pr} cresce a sufficienza, v_r può diventare maggiore della velocità della luce. La distanza propria alla quale $v_r = c$ viene detta **raggio di Hubble**, R_H , che viene quindi definito come

$$R_H(t) \equiv \frac{c}{H(t)}$$

e dipende dal tempo, così come H . Il fatto che, per $d_{pr} > R_H$, risulti $v_r > c$ può creare qualche sconcerto, ma questo non è in contrasto con la Relatività Ristretta perchè, rispetto agli osservatori co-moventi, la velocità di qualunque oggetto è, *localmente*, sempre minore di c . Nessuna informazione viaggia con $v > c$. È la distanza tra osservatori, lo spazio tra loro interposto, che cresce più rapidamente di c , ma questo non corrisponde ad una trasmissione di informazione. Inoltre, per misurare una velocità relativa ad un osservatore, devo poter spostare i due vettori velocità (dell'oggetto e dell'osservatore) nello stesso punto e fare la differenza; in uno spazio euclideo questo implica un trasporto parallelo il cui risultato, però, in uno spazio curvo, dipende dal percorso. In uno spazio curvo non ha quindi senso parlare di velocità relativa di oggetti che non si trovino nello stesso punto.

Oltre alla costante (parametro) di Hubble è stato definito un altro parametro: il cosiddetto **parametro di decelerazione** q , così detto in quanto legato a \ddot{a} che, in un universo senza costante cosmologica, è sempre negativo. Per definizione

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}(t)^2}$$

con il corrispondente valore q_0 relativo al tempo t_0 . I due parametri H_0 e q_0 tornano utili nello **sviluppo in serie** di $a(t)$ in un intorno di $t = t_0$. Avremo

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots = a(t_0)[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots]$$

che ci sarà utile in seguito.

4.5 Tempo conforme - Redshift

Abbiamo scritto la metrica di R&W nella forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2] \quad \text{con} \quad S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh\chi & k = -1 \end{cases}$$

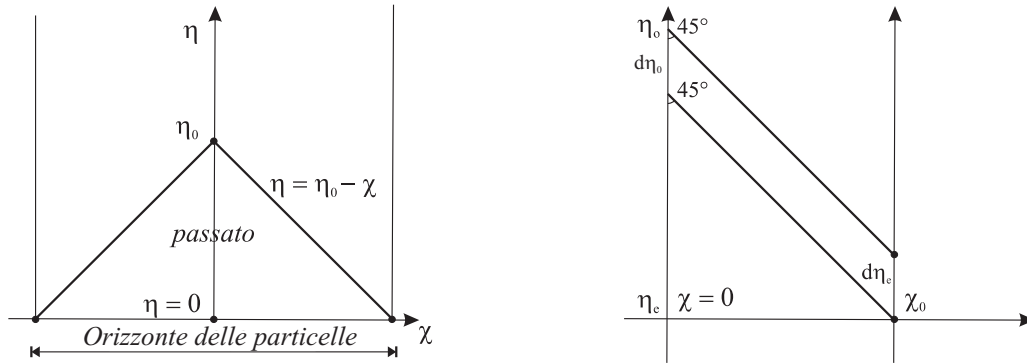
In questo caso si dice che si usa il *gauge sincrono*. È utile talvolta separare completamente il fattore di scala dal resto. Per fare questo si definisce il *tempo conforme* η in modo che $d\eta = c dt/a(t)$, e la metrica si può scrivere (*gauge conforme*):

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - (d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2)]$$

Se consideriamo il moto di un fotone che ci arriva con $\theta = \phi = \text{cost}$ e per cui $ds^2 = 0$, sarà

$$a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2] = 0$$

cioè $d\eta = \pm d\chi$ che rappresenta il cono luce, con i raggi inclinati a 45° . Se $\eta = 0$ rappresenta l'inizio dell'universo, vedo che ci sono valori di χ tali che da essi non è arrivata ancora l'informazione: c'è un orizzonte delle particelle. Per un fotone che si muove verso l'osservatore ($\chi = 0$) sarà $\eta = \eta_0 - \chi$ con $\eta_0 = "$ η attuale".



Due segnali, emessi ai tempi η_e e $\eta_e + d\eta_e$ da una sorgente co-movente a $\chi = \chi_e$, saranno ricevuti in $\chi = 0$ ai tempi η_0 ed $\eta_0 + d\eta_0$.

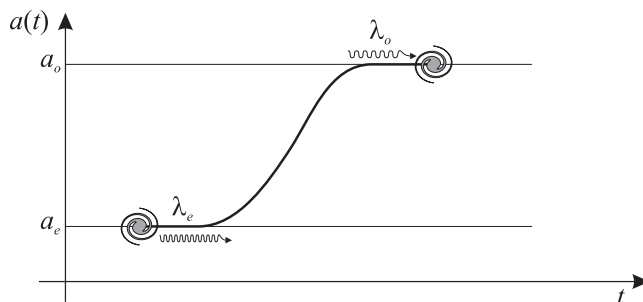
Poichè nel gauge conforme il moto dei fotoni è sempre inclinato di 45° , sarà $d\eta_e \equiv d\eta_0$ e quindi

$$\frac{cdt_e}{a(t_e)} = \frac{cdt_0}{a(t_0)}$$

Se dt_e è il periodo di un'onda elettromagnetica di frequenza $\nu_e = 1/dt_e$, la frequenza osservata $\nu_0 = 1/dt_0$ sarà data da $\nu_e a(t_e) = \nu_0 a(t_0) = \nu_0 a_0$ cioè:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a_0}{a(t_e)} \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a_0}$$

La lunghezza d'onda subisce una "dilatazione" pari a quella del fattore di scala. E' la variazione del fattore di scala dovuta all'espansione, e non la velocità relativa tra sorgente e ricevitore, che produce questo effetto, che quindi è improprio definire effetto Doppler. Per illustrare questo fatto supponiamo che in un ideale modello cosmologico un fotone venga emesso quando $a(t)$ è costante; poi subentra una fase di espansione da a_e ad a_0 , seguita da una nuova fase di $a = cost = a_0$, durante la quale il fotone viene ricevuto da un osservatore. Sorgente e osservatore sono in quiete relativa quando il fotone viene emesso e ricevuto, quindi non c'è effetto Doppler, ma il redshift cosmologico è presente e $\lambda_0/\lambda_e = a_0/a_e$!



Se definiamo il **redshift** z come

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{a_0}{a(t_e)} - 1$$

otteniamo

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{a_0}{a(t_e)} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{a_0}{1 - z}$$

Questa relazione è anche utile per legare il redshift al fattore di scala.

Anche se il redshift cosmologico non è dovuto all'effetto Doppler, *localmente*, al prim'ordine in v/c , il fenomeno può essere visto in questi termini. Infatti, dalla formula dell'effetto Doppler, si ha:

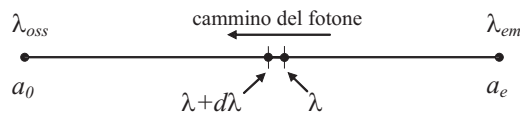
$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{a_0 - a(t_e)}{a(t_e)}$$

ma $a(t_e) \simeq a_0 + H_0 a_0 (t_e - t_0) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ per cui

$$v \simeq c \frac{-H_0 a_0 (t_e - t_0)}{a_0 + H_0 a_0 (t_e - t_0)} \simeq c H_0 (t_0 - t_e) [1 + H_0 (t_0 - t_e)] \simeq c H_0 (t_0 - t_e) \simeq c H_0 \Delta t$$

Ma, se $ds^2 = 0$ e $d\theta = d\phi = 0$, $c^2 dt^2 = a^2 d\chi^2$ e $c\Delta t = a_0 \Delta\chi = d_{pr}$ e quindi $v = H_0 d_{pr}$ cioè proprio la legge di Hubble. Quindi, procedendo a ritroso a partire da questa, mi ritrovo la formula dell'effetto Doppler. *Localmente*, quindi, il redshift cosmologico si può interpretare come un effetto Doppler dovuto al moto differenziale tra due osservatori co-moventi vicini.

Ma possiamo anche interpretarlo *su grande scala* come un effetto Doppler *integrato*, somma dei tanti effetti differenziali lungo il cammino del fotone dalla sorgente fino a noi.



Consideriamo gli osservatori co-moventi posti lungo il cammino che il fotone compie dalla sua emissione ($a = a_e$) al suo arrivo a noi ($a = a_0$). Se consideriamo due osservatori vicini, separati da una distanza propria dl che il fotone percorre in un tempo dt ($dl = cdt$), che si muovono con velocità relativa dv a causa dell'espansione ($dv = Hdl$), e che osservano il fotone, emesso con $\lambda = \lambda_{em}$, rispettivamente con lunghezze d'onda λ e $\lambda + d\lambda$, avremo (ricordiamo che $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$) per effetto Doppler *locale* :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = dz = \frac{dv}{c} = \frac{Hdl}{c} = \frac{Hcdt}{c} = \frac{da}{a} \frac{1}{dt} dt = \frac{da}{a}$$

Da questa deriva, integrando, che

$$\int_{a_e}^{a_0} d \ln \lambda = \int_{a_e}^{a_0} d \ln a \quad \rightarrow \quad \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \ln \frac{a_0}{a_e} \quad \rightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_e \frac{a_0}{a_e} = \lambda_e (1 + z)$$

Vedo quindi che posso interpretare il redshift cosmologico semplicemente come un effetto globale dovuto alle differenti velocità relative degli osservatori che immagino posti lungo il cammino del fotone che arriva a noi. Non occorre pensare ad un "stiramento" della lunghezza d'onda del fotone per effetto dell'espansione dello spazio!

4.6 Orizzonti

La difficoltà nel definire la topologia globale dell'universo risiede anche in un limite osservativo, non di tipo semplicemente strumentale, ma di natura fisica. Una domanda che ci si potrebbe porre è: *Qual è la frazione dell'universo dai cui punti mi è arrivata finora informazione?* Come abbiamo già più volte sottolineato, l'evidenza osservativa ci suggerisce che l'universo abbia avuto un'origine nel tempo (e gran parte dei modelli teorici supportano questa evidenza).

Abbiamo visto che un segnale luminoso, emesso alla coordinata co-movente $r = r_H$ a $t = 0$ arriva all'osservatore ($r = 0$) al tempo t secondo la relazione

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

In base alla definizione di distanza propria avremo che

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f_k(r_H) \equiv \frac{d_{pr}(t, r_H)}{a(t)}$$

La quantità

$$d_H(t) \equiv d_{pr}(t, r_H) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}$$

rappresenta la *distanza propria massima* dalla quale, al tempo t , abbiamo ricevuto segnali luminosi. Se $d_H(t)$ è *finito*, esiste una parte dell'universo dalla quale non ci sono ancora giunti segnali luminosi ed esiste quello che si

chiama un **orizzonte delle particelle** (*PH*). Il fatto che $d_H(t)$ sia finito dipende dal comportamento di $a(t)$. Per modelli ragionevoli vedremo che $d_H \propto t$ ed è quindi finito. Per modelli cosmologici senza singolarità iniziale (come il modello dello *Stato Stazionario*) il limite inferiore di integrazione va posto non a 0 ma a $-\infty$.

Se guardiamo invece avanti, possiamo chiederci: *Da quale distanza potremmo in futuro ricevere segnali che partono oggi?* La risposta si ottiene integrando tra t e ∞ (o $t = t_{max}$ se c'è ricollasso) anzichè tra 0 e t .

$$d_E(t) \equiv a(t) \int_t^\infty \frac{cdt'}{a(t')}$$

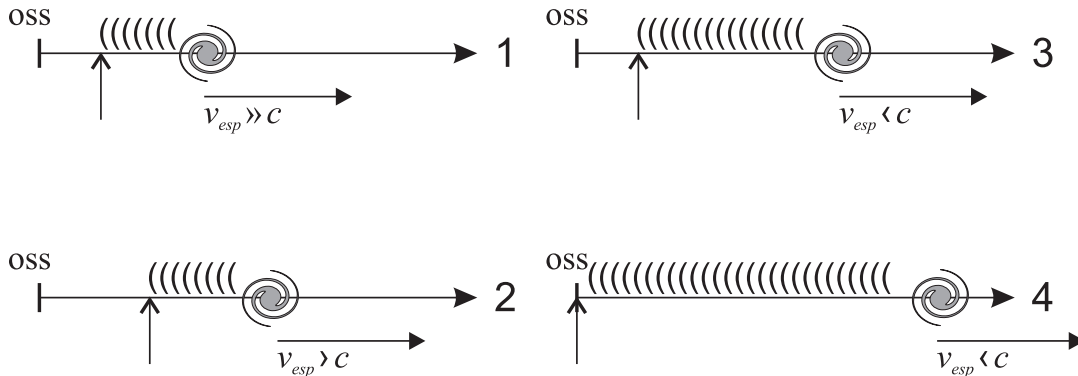
Se l'integrale diverge basta avere pazienza per vedere un qualunque evento; altrimenti ci sono distanze dalle quali non riceveremo mai informazione. In questo caso si ha un **orizzonte degli eventi** (*EH*). Poichè questo accada occorre che $a(t)$ cresca più rapidamente di t . Ad esempio se $a(t) \propto e^{Ht}$, con $H = cost$, avremo:

$$d_E(t) = e^{Ht} \cdot \int_t^\infty \frac{cdt'}{e^{Ht'}} = c e^{Ht} \left[-\frac{1}{H} e^{-Ht'} \right]_t^\infty = c e^{Ht} \cdot \frac{e^{-Ht}}{H} = \frac{c}{H} = cost$$

come nei modelli dominati da costante cosmologica ed in quello dello *Stato Stazionario*. Ma, mentre $d_E = cost$, le distanze proprie delle galassie crescono come $a(t) \propto e^{Ht}$ e quindi, col passare del tempo, le galassie "escono" da d_E : ci attende un destino solitario in questo modello cosmologico! Ma le galassie che escono da *EH* sono comunque sempre visibili, ma con una storia, vista da noi, rallentata, e con i fotoni sempre più arrossati. Infatti, dalle galassie sul bordo ci arrivano fotoni a $t = \infty$ quando $a(t) \rightarrow \infty$ e quindi con un redshift $z \rightarrow \infty$ ($\lambda_{oss} \rightarrow \infty$).

Può apparire a prima vista strano che in un universo in espansione, e quindi inizialmente molto "piccolo" rispetto ad oggi, esista un orizzonte delle particelle. La causa di questo risiede nel fatto che il tasso di espansione definito dalla velocità di recessione $v_r(t)$ può essere, ed in certi casi è, molto maggiore di c (vedi quanto detto sopra). Questo non viola la Relatività Ristretta perchè la velocità di recessione non corrisponde ad una trasmissione di informazione, ma misura solo come lo spazio tra gli osservatori co-moventi aumenta.

A causa di questa espansione, che nelle prime fasi del *Big Bang* avviene con $v_r \gg c$, un fotone, emesso verso di noi nelle prime fasi di vita dell'universo, finisce con l'allontanarsi inizialmente da noi perchè la strada da percorrere aumenta più rapidamente della sua velocità, per poi avvicinarsi quando la velocità di espansione diviene minore di c .



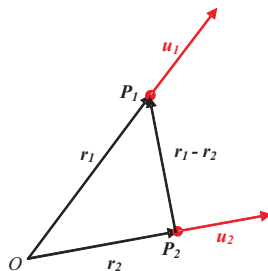
Torniamo brevemente sulla crescita delle mutue distanze tra gli osservatori co-moventi. Si usa esprimere comunemente questo fatto dicendo che lo spazio "si espande"; ma non si deve pensare che sia lo spazio in espansione a trascinare con sè le galassie, come la pasta di un panettone che, lievitando, allontana i canditi uno dall'altro. Subito dopo il *Big Bang*, le particelle elementari che componevano l'universo primordiale (e dalle quali si sono poi formate le galassie), si sono trovate in uno stato di mutuo allontanamento (per il momento dobbiamo prenderla come una condizione iniziale del moto, ma il meccanismo potrebbe essere simile a quello che produce l'inflazione); l'evoluzione di questo mutuo allontanamento, descritto dal fattore di scala $a(t)$, deriva dall'applicazione delle equazioni di Einstein ed è legato alla quantità di massa-energia, più la costante cosmologica, presenti nell'universo. Di questa espansione, di questo moto di mutuo allontanamento degli oggetti, possiamo anche dare una descrizione in termini di espansione del *substrato* cosmico; ma il modo più corretto e sicuro è quello di pensare che gli oggetti, date le condizioni iniziali, si muovono sotto l'effetto dell'interazione gravitazionale (includiamo in questa anche la costante cosmologica) con tutte le sorgenti di massa-energia dell'universo, e non perchè trascinati o "allungati" e "stirati" da un misterioso spazio in espansione (cosa che, tra l'altro, richiederebbe di introdurre un nuovo tipo di interazione in grado di produrre questo "stiramento").

A conclusione di queste osservazioni sulla geometria del cosmo, arriviamo a concludere che limiti fisici ci impediscono di accedere a tutto l'universo: ne conosciamo solo una parte, ed estrapoliamo la nostra conoscenza "locale" al tutto. Ricordiamo inoltre che l'universo, per definizione, è l'insieme di tutti gli oggetti e concetti fisici (come stelle, galassie, atomi, spazio e tempo). Non esiste uno spazio fisico al di fuori di un universo finito. In questo senso certe rappresentazioni "naif" dell'universo come un palloncino (2D) che si gonfia nello spazio (3D) possono generare confusione. Inoltre, se l'universo è infinito spazialmente, esso era tale anche nel passato, quando $a(t) \rightarrow 0$. Infine, non c'è un punto privilegiato da cui si possa dire che tutto si sia espanso. Ogni punto è equivalente, ed in ogni punto c'è stato il big bang: se, in un punto qualsiasi, risaliamo indietro nel tempo, la densità e la temperatura locali aumentano e tendono all'infinito quando $t \rightarrow 0$.

4.7 Il modello di Milne

Il fatto di aver definito un "tempo cosmico" in un modo che appare abbastanza naturale, non deve ingannare sulle conseguenze di questa assunzione. Vediamo di illustrare le conseguenze dell'esistenza del tempo cosmico descrivendo il modello cosmologico di Milne (1932), molto semplice, che non usa la Relatività Generale, ma soddisfa il Principio Cosmologico. Si usa invece la Relatività Ristretta. Inoltre questo modello, per certi versi, come vedremo, non soddisfacente, ci aiuta a comprendere alcuni elementi fondamentali dell'espansione cosmica.

Consideriamo uno spazio di Minkowski e supponiamo che ad un certo istante $t = 0$, dall'origine O venga emessa in tutte le direzioni, con tutte le velocità $u < c$, una nube di particelle di massa nulla. Tutte queste particelle, essendo nulle le interazioni gravitazionali, si muovono di moto rettilineo uniforme. Secondo l'osservatore S , solidale con O , l'universo sarà un insieme di "granelli di polvere" che si espandono con tutte le velocità $u < c$; il "confine" del suo universo, sul quale nessuna particella si trova, si muove alla velocità c . A prima vista sembra che questo non soddisfi il Principio Cosmologico, perchè O è un punto privilegiato. Ma il "confine" dell'universo si comporta, cinematicamente, come un fronte sferico di luce emesso in O al tempo $t = 0$ (evento creazione, C). Ma ogni particella, essendo stata presente in C , considererà se stessa al centro del fronte d'onda.



Il moto è radiale da O , con $r = u \cdot t$ per ogni particella, per cui $u = r/t = H \cdot r$ cioè $H = 1/t$ e vale la legge di Hubble. Non solo: essa vale per ogni "granello" mobile: infatti per la particella 2 sarà $(\bar{r}_1 = \bar{u}_1 t, \bar{r}_2 = \bar{u}_2 t)$ $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) t \Rightarrow d = v \cdot t$ come se ci riferissimo all'origine O .

Resta da vedere se possiamo avere una distribuzione isotropa di densità attorno ad ogni punto. Per studiare questa possibilità, definiamo τ il tempo proprio trascorso per ogni particella dalla creazione. Allora n_0 , la densità propria di particelle attorno ad una generica particella P , sarà della forma

$$n_0 = \frac{N}{\tau^3} \quad (N = cost) \quad (*)$$

perchè una piccola sfera attorno a P , contenente un numero fisso di particelle, si espande con la velocità relativa costante δu della particella più lontana da P , quindi ha un raggio $\delta u \cdot \tau$ e volume $\frac{4}{3}\pi \delta u^3 \tau^3$. Evidentemente, per avere la massima simmetria, assumiamo che N sia uguale per tutte le particelle. Se la particella P è alla distanza r dall'origine, per S in O sarà:

$$\tau = \frac{t}{\gamma(u)} \quad u = \frac{r}{t} \quad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

e la densità di particelle in P , relativa all'origine O , sarà (ricordando che i volumi sono contratti di un fattore $1/\gamma$ nella direzione del moto)

$$n = \frac{\gamma(u) \cdot N}{\tau^3} = \frac{\gamma^4 N}{t^3} = \frac{Nt}{(t^2 - r^2/c^2)^2} \quad (**)$$

Evidentemente, una densità definita dalla (**) relativa all'origine O si riduce alla forma (*) per ogni particella in moto e quindi alla (**) prendendo come origine una qualunque delle particelle. Quindi la (**) è la distribuzione che deve valere attorno ad una qualunque delle particelle.

Vediamo quindi che il modello di Milne è isotropo ed omogeneo, e che τ definisce il tempo cosmico (dato, per esempio, da un orologio ideale che misura la densità media dell'universo). Notiamo anche che, dalla (**), la densità n tende all'infinito avvicinandosi al confine $r = ct$. Non ci sono galassie al confine, e per ogni galassia ce ne sono infinite da lei al confine, in tutte le direzioni (ovviamente devo assumere un numero infinito di granelli di polvere prodotti alla creazione).

Anche se il modello di Milne soddisfa il principio cosmologico, non è soddisfacente poichè ammette che ci sia un "fuori" dell'universo delle galassie (oltre il bordo $r = ct$) che può tuttavia interagire con queste (ad esempio mandando segnali luminosi che possono essere visti). L'espansione dei granelli di polvere avviene *nello* spazio, mentre in un modello cosmologico soddisfacente, senza un "fuori", si ha l'espansione *dello* spazio tra le galassie.

Consideriamo ora il modello di Milne sotto un altro punto di vista. Prendiamo il tempo cosmico come coordinata temporale e consideriamo delle coordinate co-moventi (ad esempio u, θ, ϕ) rispetto al sistema inerziale S . La metrica in coordinate polari sferiche sarà, relativamente ad S ,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

e supponiamo che $r = t = 0$ coincida con la "creazione". Passiamo ora al tempo cosmico τ già definito: $\tau = t \cdot (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ e definiamo una nuova coordinata co-movente \tilde{r} , più conveniente di u , come $c\tilde{r} = u/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$. Se ci aiutiamo con la relazione $\tilde{r} = \sinh\psi$ (ricordiamo che $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$) otteniamo:

$$r = ut = \frac{u\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = c\tau\tilde{r} = c\tau\sinh\psi$$

$$\sinh\psi = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad \sinh^2\psi = \frac{u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} = \cosh^2\psi - 1$$

$$\cosh^2\psi = \frac{1 - u^2/c^2 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \quad \rightarrow \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

che ci permette di scrivere $t = \tau\cosh\psi$. Notiamo anche che $\cosh^2\psi = 1 + \sinh^2\psi = 1 + \tilde{r}^2$, per cui, dalla relazione $\tilde{r} = \sinh\psi$, per differenziazione, si ha $d\tilde{r} = \cosh\psi d\psi$, cioè $d\psi = d\tilde{r}/\sqrt{1 + \tilde{r}^2}$.

Riprendiamo la metrica $ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\Omega^2]$ e passiamo da r, t a \tilde{r}, τ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 [\tau\sinh\psi d\psi + \cosh\psi d\tau]^2 - [c\tau\cosh\psi d\psi + c\sinh\psi d\tau]^2 - c^2\tau^2\sinh^2\psi d\Omega^2 \\ &= c^2 d\tau^2 - c^2\tau^2 [d\psi^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2] \\ &= c^2 d\tau^2 + c^2\tau^2 \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 + \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right] \end{aligned}$$

che corrisponde ad una metrica di RW con $k = -1$ e con $a(\tau) = c\tau$ (ricordiamo che il tempo indicato con t nella metrica R&W è in realtà il tempo proprio che qui abbiamo indicato con τ)

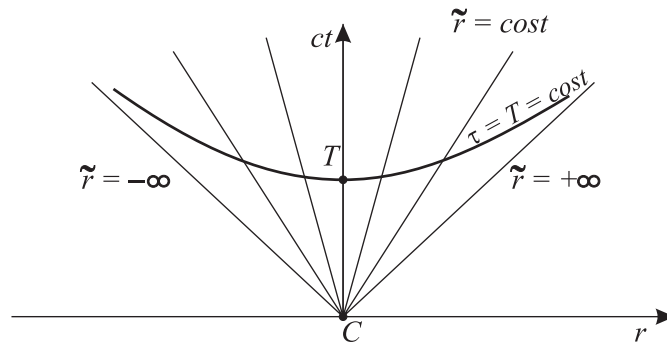
Se sopprimiamo due dimensioni spaziali (ad esempio θ e ψ) possiamo visualizzare il legame tra le vecchie coordinate r, t e le nuove \tilde{r}, τ . Sarà:

$$\tilde{r} = \sinh\psi = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{c} = \text{cost.}$$

e quindi $r = ut = \frac{u}{c}ct$: le linee $\tilde{r} = \text{cost}$ sono rette per l'origine; se $u \rightarrow \pm c$, $r \sim \pm ct$, $\tilde{r} \rightarrow \pm\infty$.

Per quanto riguarda le linee $\tau = \text{cost} = T$, dalla $t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ segue

$$t^2 = \frac{T^2}{1 - u^2/c^2} = \frac{T^2}{1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}} = \frac{T^2 c^2 t^2}{c^2 t^2 - r^2}$$



da cui risulta $c^2t^2 - r^2 = c^2T^2$ che è un'iperbole, con $r = \pm ct$ come asintoti. Questa rappresenta una sezione a tempo cosmico costante dello spazio-tempo.

Al di là del fatto che il modello di Milne può non essere soddisfacente per molti aspetti, esso mostra come l'introduzione di un principio cosmologico e di un tempo cosmico portano automaticamente ad introdurre uno spazio con curvatura negativa, anche a partire da uno spazio di Minkowski che è per sua natura piatto. Non occorre la Relatività Generale per avere uno spazio curvo! Inoltre, *in questo modello* basato unicamente sulla Relatività Ristretta, è lecito applicare la formula relativistica dell'effetto Doppler per legare redshift e velocità:

$$1 + z = \frac{\sqrt{1 + (v/c)}}{\sqrt{1 - (v/c)}}$$

5 Modelli cosmologici

5.1 Le equazioni di Friedmann

Possiamo, a questo punto, ricavare le equazioni che regolano il comportamento del fattore di scala $a(t)$ in un universo con la metrica di Robertson-Walker e con un tensore energia-impulso proprio di un fluido perfetto.

Partiamo con lo scrivere il tensor metrico; le coordinate sono $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad {}^4g = -\frac{a^6r^4\sin^2\theta}{1-kr^2} \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Passiamo poi a calcolare le *connessioni affini*. Molte di queste sono nulle; quelle diverse da zero sono le

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{g_{ij}}{c}$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \frac{\delta_j^i}{c}$$

con $i, j = 1, 2, 3$, mentre i termini del tipo Γ_{jk}^i sono gli stessi già calcolati per definire la metrica di R&W (i fattori -1 presenti in g_{ij} e g^{ij} si elidono): basta sostituire, al posto della funzione $f(r)$ incognita, l'espressione $\frac{1}{1-kr^2}$; ad esempio: $\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}$.

Occorre poi passare dalle $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ al tensore di Ricci $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma$; con un po' di pazienza risulta che le componenti diverse da zero sono:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ij} = -\frac{g_{ij}}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2kc^2}{a^2} \right] \quad (3 \text{ componenti } \neq 0 : R_{11}, R_{22}, R_{33})$$

e lo scalare di Ricci è:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = -\frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right]$$

Vediamo quanto valgono le componenti del tensore energia impulso $T_{\alpha\beta} = (p + \rho c^2)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}$

Nel sistema co-movente $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$; si verifica facilmente che $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta = g_{\alpha 0}u^0 = g_{\alpha 0} = (1, 0, 0, 0)$. Sarà quindi

$$T_{00} = (p + \rho c^2) - p = \rho c^2 \quad \text{e} \quad T_{ij} = -pg_{ij}$$

Possiamo quindi finalmente scrivere

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

Per la componente 00 abbiamo facilmente

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{1}{3}a^2c^2\Lambda \quad (F1)$$

Da una qualunque delle tre componenti (11, 22, 33) otteniamo:

$$\ddot{a} + \frac{1}{2a}(\dot{a}^2 + kc^2) = -\frac{4\pi G}{c^2}pa + \frac{1}{2}\Lambda c^2a$$

e sostituendo in questa la (F1) abbiamo:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)a + \frac{1}{3}\Lambda c^2a \quad (F2)$$

La (F1) e la (F2) non sono in realtà indipendenti: se infatti esplicitiamo ρ dalla (F1) e deriviamo rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{\rho} = \frac{3\dot{a}}{4\pi G a^2} \left[\ddot{a} - \frac{1}{a}(\dot{a}^2 + kc^2) \right]$$

Usando (F2) per \ddot{a} e riusando (F1) per il termine in parentesi tonde, si ottiene:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (F3)$$

Ma una relazione di questo tipo (con lo spigolo L di uno spazio cubico al posto del fattore di scala a) l'avevamo già vista derivare dalla conservazione dell'entropia e dal 1° Principio della Termodinamica, parlando del tensore energia-impulso di un gas ideale, ed è quindi legata alla quadridivergenza di $T^{\alpha\beta}$ uguale a zero: $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ (il termine con la costante cosmologica soddisfa automaticamente questa relazione, essendo $g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0$ e non altera quindi con la sua presenza il risultato). La si può considerare come un'equazione di continuità.

La (F3) si può porre in forme analoghe del tipo $dQ = dU + dL = 0$, infatti:

$$\frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3) \quad \rightarrow \quad d(\rho c^2 a^3) + p d(a^3) = 0$$

5.2 La densità dell'universo

Come si vede esaminando le equazioni di Friedmann, uno dei parametri fondamentali è la densità dell'Universo, per cui cercheremo di valutarne il valore. È utile definire anzitutto il parametro, detto **densità critica** ρ_{cr} , come:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

che, dipendendo da H , dipende da t . Il valore attuale, usando $H_0 = h \cdot 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = h \cdot 3.241 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = (h/3.086 \cdot 10^{17}) \text{ s}^{-1}$ fornisce una $\rho_{cr} \simeq 1.879 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$.

Si usa esprimere la densità ρ in funzione di ρ_{cr} usando il **parametro di densità** Ω :

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{cr}}$$

Poiché vi sono, come vedremo subito, vari contributi alla densità dell'Universo, avremo un valore particolare di Ω per ognuno di questi. Vediamo quindi il contributo alla densità totale delle varie componenti dell'universo.

5.2.1 Materia luminosa

La densità ρ_{lum} della materia luminosa, essenzialmente *stelle*, si può ottenere dalla densità di luminosità ρ_L dell'universo ($\rho_L \sim 2 \cdot 10^8 h \text{ L}_\odot \text{ Mpc}^{-3}$), e assumendo un rapporto massa-luminosità $\langle M/L \rangle \sim 1 \text{ M}_\odot / \text{L}_\odot$. Si ottiene $\Omega_{lum} \equiv \rho_{lum} / \rho_{cr}$:

$$\Omega_{lum} h \simeq 0.002 - 0.006$$

5.2.2 Galassie

La presenza di aloni massicci attorno alla parte luminosa delle galassie, evidenziata dalle curve di rotazione "piatte", suggerisce che per queste $\langle M/L \rangle \sim 30 h \text{ M}_\odot / \text{L}_\odot$ ¹⁶. Questo porta ad una stima di Ω_{gal} un ordine di grandezza superiore a quella di Ω_{lum} :

$$\Omega_{gal} \geq 0.03 - 0.05$$

5.2.3 Ammassi di galassie

Dal teorema del viriale applicato a gruppi e ammassi di galassie (Zwicky, 1933), come dalle stime di massa tramite le lenti gravitazionali o l'emissione X del mezzo *intra-ammasso*, si ottiene che $\langle M/L \rangle \sim 100 - 400 h \text{ M}_\odot / \text{L}_\odot$ cioè 10 volte maggiore che per le singole galassie. Usando questo valore si ha

$$\Omega_{cl} \sim 0.1 - 0.3$$

¹⁶Ricordiamo che, per una galassia o un ammasso di galassie di massa M , $M \sim V^2 R \sim V^2 \theta D$, con V dispersione di velocità, D distanza, θ angolo sotteso ed R scala del sistema. D'altra parte, la velocità media di recessione del sistema $\langle v \rangle$ è, per la legge di Hubble, $\langle v \rangle = H_0 D \propto h D$, cioè $D \propto h^{-1}$. Quindi la massa scala come $M \propto h^{-1}$. Il flusso misurato è $F \simeq L/D^2$ e quindi $L \propto D^2 \propto h^{-2}$. Allora $M/L \propto h^{-1}/h^{-2} \propto h$. La densità di luminosità scalerà allora come $L/\text{Volume} \propto L/\text{lunghezza}^3 \propto h^{-2}/h^{-3} \propto h$.

5.2.4 Nucleosintesi primordiale

Il modello dello *Hot Big Bang* prevede la sintesi (detta *nucleosintesi primordiale*) di ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, D , ${}^7\text{Li}$ quando l'universo aveva un'età di circa tre minuti. Come vedremo, dai calcoli teorici, confrontati con le osservazioni, si ha che la densità dei *barioni* (intesi, in astrofisica, come protoni, neutroni, nuclei di elio, ecc.) dà un contributo

$$\Omega_b h^2 \simeq 0.005 - 0.024$$

con una preferenza per i valori alti di questo intervallo (come suggerito dal fondo a microonde).

5.2.5 Catastrofe barionica

Il plasma diffuso e caldo, che emette raggi X nello spazio tra le galassie degli ammassi, rappresenta circa il $6 h^{-3/2}\%$ della massa totale dell'ammasso, mentre le stelle (delle galassie) forniscono un ulteriore 2%. Se, come sembra dalle simulazioni numeriche, il rapporto tra massa in barioni M_b e massa totale M_{tot} di un ammasso è rappresentativo del rapporto su scala cosmica tra densità dei barioni e densità totale, o tra i corrispondenti parametri di densità Ω_b e Ω_M , tenendo anche conto che una parte dei barioni potrebbe essere oscura, si ottiene (assumendo $\Omega_b h^2 \simeq 0.02$)

$$\Omega_b/\Omega_M \geq 0.06 h^{-3/2} + 0.02 \rightarrow \Omega_M \leq \frac{0.02 h^{-2}}{0.06 h^{-3/2} + 0.02} \leq 0.33$$

se assumiamo $h \simeq 0.7$. Il termine *catastrofe barionica* risale all'inizio degli anni novanta, quando si riteneva che $\Omega_M \simeq 1$; la catastrofe era rappresentata dall'impossibilità di avere un valore di Ω_M prossimo all'unità.

5.2.6 Radiazione e neutrini (non massicci)

L'universo è anche riempito dalla radiazione cosmica a microonde (*Cosmic Microwave Background, CMB*), scoperta nel 1965; essa ha uno spettro termico di corpo nero con una temperatura odierna $T_\gamma \simeq 2.73\text{K}$; a questo corrisponde una densità di massa-energia odierna

$$\rho_\gamma = \frac{aT_\gamma^4}{c^2} \simeq 4.7 \cdot 10^{-34} \text{g/cm}^3 \quad \Rightarrow \quad \Omega_\gamma \simeq 2.5 \cdot 10^{-5} h^{-2}$$

Vi è anche un contributo da un fondo cosmico di neutrini che, se hanno una massa nulla o trascurabile, si comportano come fotoni, cioè come materia relativistica, fornendo

$$\rho_\nu \sim N_\nu \cdot 10^{-34} \text{g/cm}^3$$

con N_ν numero di famiglie di neutrini; se $N_\nu = 3$ risulta $\Omega_\nu \simeq 1.7 \cdot 10^{-5}$. Il contributo totale Ω_R sotto forma di materia relativistica, cioè di fotoni e neutrini (non massicci) è quindi

$$\Omega_R h^2 = (\Omega_\gamma + \Omega_\nu) h^2 \simeq 4.2 \cdot 10^{-5}$$

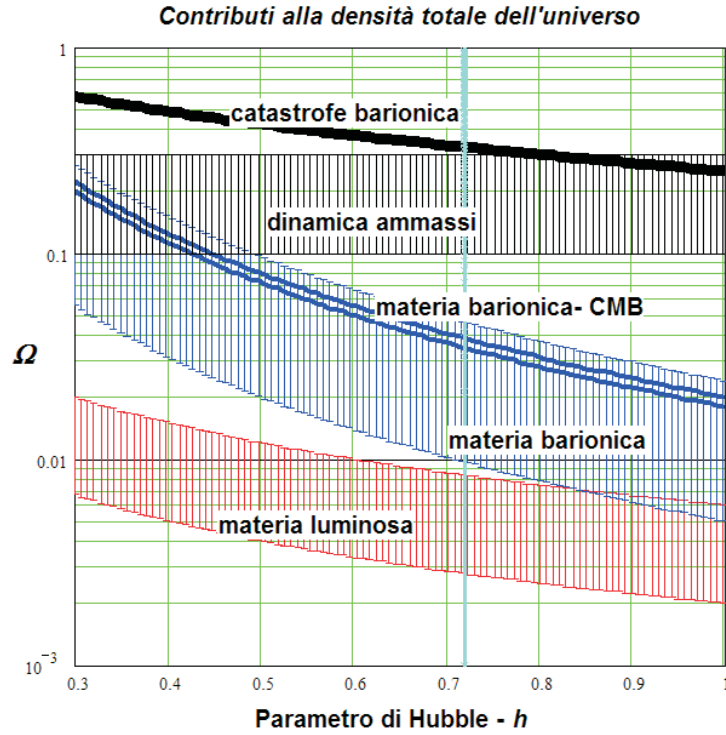
Se i neutrini, come vedremo meglio in seguito, possiedono una massa diversa da zero, il loro contributo può essere maggiore di questo, ma vanno allora annoverati tra la materia non relativistica.

Vediamo che, all'epoca attuale, il contributo dominante alla densità di massa-energia lo fornisce la materia, per cui $\rho \sim \rho_M$. Poichè questa materia non possiede moti relativistici, la pressione $p_0 = p(t_0)$ sarà trascurabile.

5.2.7 Materia oscura barionica e non barionica

La figura seguente riassume le condizioni sopra descritte relative alle varie componenti di materia presenti nell'Universo.

Se prendiamo per H_0 un valore attorno ai $70 \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ vediamo che, rispetto alla materia luminosa, la materia barionica totale è maggiore per almeno un ordine di grandezza. Dinamica degli ammassi di galassie e la catastrofe barionica ci portano ancora su di almeno un ordine di grandezza.



Questo ci mostra che nell'Universo esiste materia oscura, cioè non luminosa, e che questa è sia di tipo barionico che, ancor di più, di tipo non-barionico.

5.2.8 La costante cosmologica

In questi ultimi anni, da un lato l'osservazione di *SNIa* fino a $z \sim 1$, dall'altro la misura da satellite (*COBE*, *WMAP*) e da pallone del *CMB*, hanno suggerito che la geometria della parte spaziale ($t = \text{cost.}$) della metrica è consistente con una metrica Euclidea ($k = 0$). Questo grazie al contributo di una costante cosmologica Λ non nulla.

Risulta utile inglobare la costante cosmologica nel tensore energia-impulso, definendo

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\alpha\beta} = (\tilde{p} + \tilde{\rho}c^2)u_\alpha u_\beta - \tilde{p}g_{\alpha\beta}$$

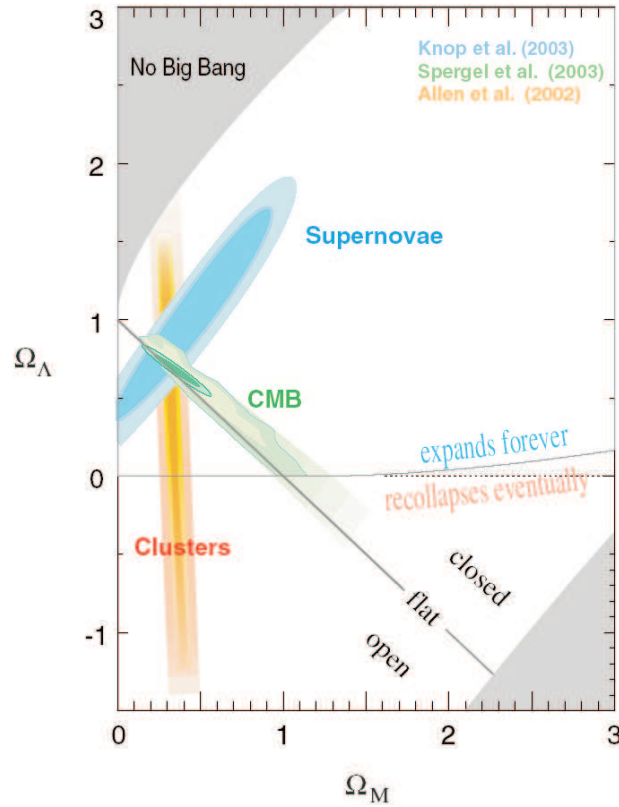
dove pressione efficace \tilde{p} e densità efficace $\tilde{\rho}$ sono espresse da

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \rho + \rho_\Lambda$$

Vediamo quindi che a Λ si può associare una densità $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ e quindi un parametro di densità

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \cdot \frac{8\pi G}{3H^2} = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$$

La figura seguente mostra i vincoli osservativi sui valori di Ω_Λ ed Ω_M derivati dalle *SNIa* lontane, dal *CMB* e dagli ammassi di galassie. Il significato delle varie curve sarà chiarito più avanti (Adattato da: *Knop et al.*, 2003, *ApJ* 598, 102).



Come si vede, le regioni di confidenza relative alle *SNIa* ed al *CMB* si incrociano quasi ad angolo retto, permettendo di definire abbastanza bene $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ ed $\Omega_M \simeq 0.3$.

5.3 Moti peculiari

Prima di proseguire nello studio dei modelli, consideriamo, usando le Γ calcolate, il problema dei cosiddetti *moti peculiari*. Definiamo come *velocità peculiare* u^α (4-velocità) la velocità di una particella rispetto al sistema co-movente del punto in cui essa si trova. L'equazione del moto secondo la geodetica sarà, come al solito:

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 \quad (\text{ricordo che } u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{ds})$$

Per la componente $\alpha = 0$ avremo

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^0 u^\beta u^\gamma = 0$$

ma per la metrica di RW (vedi sopra) l'unica componente non nulla di $\Gamma_{\beta\gamma}^0$ è $\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{g_{ij}}{c}$, ($i, j = 1, 2, 3$). Ricordiamo inoltre che $1 = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = (u^0)^2 + g_{ij} u^i u^j = (u^0)^2 - |\bar{u}|^2$, essendo \bar{u} la parte spaziale del quadrivettore. Quindi:

$$\frac{du^0}{ds} = +\frac{\dot{a}}{a} \frac{g_{ij}}{c} u^i u^j = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{|\bar{u}|^2}{c}$$

Differenziando $1 = (u^0)^2 - |\bar{u}|^2$ ottengo $u^0 du^0 = |\bar{u}| d|\bar{u}|$ ed essendo $u^0 = \frac{dx^0}{ds} = c \frac{dt}{ds}$ si ottiene:

$$\frac{|\bar{u}|}{u^0} \frac{d|\bar{u}|}{ds} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{|\bar{u}|^2}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{d|\bar{u}|}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a} |\bar{u}| \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{|\bar{u}|}}{|\bar{u}|} = -\frac{\dot{a}}{a}$$

Questo significa che $|\bar{u}| \propto 1/a$, ed essendo $p^\alpha = m_0 u^\alpha$, anche $|\bar{p}| \propto 1/a$.

Vediamo di nuovo che il sistema co-movente è quello più naturale. Infatti in un universo in espansione la velocità peculiare (3-velocità) cala al crescere dell'espansione: le particelle tendono a portarsi in quiete rispetto agli osservatori co-moventi. Posso cercare di vedere la cosa in modo intuitivo pensando che se una particella si allontana da un punto con una certa velocità essa passerà per osservatori in moto rispetto al primo, per i quali la velocità peculiare della particella risulterà minore

$$\begin{aligned} D = v_p \cdot \Delta t \quad v'_0 = H_0 D = H_0 v_p \Delta t \quad v'_p = v_p - v'_0 \\ \Rightarrow \Delta v_p = v'_p - v_p = -v'_0 = -H_0 v_p \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_p} \frac{dv_p}{dt} = -H_0 = -\frac{\dot{a}_0}{a_0} \end{aligned}$$

Osserviamo che, poichè la temperatura di un gas ideale è proporzionale al modulo quadrato della velocità media delle particelle: $T_{gas} \propto |\bar{u}|^2 \propto 1/a^2$ ($T_{rad} \propto 1/a$) consistente con l'espansione adiabatica di un gas perfetto: $pV^\gamma = cost \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cost \quad \gamma = 5/3, \quad V \propto a^3 \Rightarrow Ta^2 = cost$.

5.4 L'equazione di stato

Nelle equazioni di Friedmann, oltre alla densità ed alla costante cosmologica, compare anche la pressione p . Esprimeremo la pressione per mezzo di un'equazione di stato del tipo $p = w\rho c^2$ con $w = cost$, $0 \leq w \leq 1$.

Come abbiamo già visto, il caso $w = 0$ è il caso "polvere" in cui, anche se $p = w(T)\rho c^2$ è diverso da zero, essendo il gas non-relativistico, risulta $p \ll \rho c^2$ e quindi $w \simeq 0$. Per un fluido non degenere ultrarelativistico in equilibrio termico l'equazione di stato è del tipo $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ con $w = \frac{1}{3}$, valida anche per un gas di fotoni.

La grandezza w è anche legata alla velocità del suono adiabatica (a entropia costante):

$$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{1/2} \Rightarrow c_s = c\sqrt{w}$$

Se $w = 0$, allora $c_s = 0$; se $w = 1/3$ allora $c_s = c/\sqrt{3}$; se fosse $w > 1$ avremmo $c_s > c$, mentre se fosse invece $w < 0$, c_s sarebbe immaginario.

In queste condizioni abbiamo già visto che $\rho_w V^{1+w} = cost$, ma $V \propto a^3 \rightarrow \rho_w a^{3(1+w)} = cost = \rho_{0w} a_0^{3(1+w)}$ da cui (il suffisso 0 implica $t = t_0$):

$$\rho_w = \rho_{0w} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}$$

- $w = 0 \rightarrow \rho_M a^3 = cost = \rho_{0M} a_0^3; \quad \frac{a_0}{a} = 1 + z \Rightarrow \rho_M = \rho_{0M} (1 + z)^3$
- $w = 1/3 \rightarrow \rho_R a^4 = \rho_{0R} a_0^4 \Rightarrow \rho_R = \rho_{0R} (1 + z)^4$

Per quanto riguarda il comportamento della costante cosmologica, riprendiamo la pressione e la densità efficaci definite poco sopra. Se immaginiamo che pressione e densità di materia e radiazione siano trascurabili, otteniamo

$$\tilde{p} \equiv p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} \equiv \rho_\Lambda = +\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

che ci fornisce

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 \quad \Longrightarrow \quad w_\Lambda = -1$$

Vediamo quindi che la costante cosmologica è caratterizzata da un'equazione di stato con $w = w_\Lambda = -1$. Un caso analogo si ha, come vedremo, per la fase di *inflazione* che si verifica nell'Universo primordiale. Se $w = -1$ l'equazione che esprime ρ_w (che in questo caso sarà ρ_Λ) mi mostra che $\rho_\Lambda = cost$: la densità di massa-energia non muta con l'espansione.

Alle equazioni di cui sopra si può arrivare anche partendo dalla (F3) nella forma già scritta sopra

$$d(\rho c^2 a^3) + p d(a^3) = 0$$

Infatti, posto $p = w\rho c^2$, si ha

$$\begin{aligned} d(\rho c^2 a^3) + w\rho c^2 d(a^3) &= 0 \\ a^3 d(\rho c^2) + \rho c^2 (1+w) \cdot 3a^2 da &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -3(1+w) \frac{da}{a} \end{aligned}$$

che, integrato con $w = cost$, fornisce appunto

$$\int_\rho^{\rho_0} d \ln \rho = -3(1+w) \int_a^{a_0} d \ln a$$

e quindi, nuovamente,

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}$$

Nel caso in cui w non sia costante (come accade in alcune teorie che, al posto della costante cosmologica, considerano un campo scalare variabile nel tempo per spiegare l'origine della cosiddetta *dark energy*) nell'integrale qui sopra il fattore $1 + w$ non si può portare fuori dall'integrale e la soluzione formale si scrive

$$\rho(a) = \rho_0 \exp \left\{ 3 \int_a^{a_0} [1 + w(a)] d \ln a \right\}$$

Se invece del fattore di scala a si vuole usare il redshift z ricordiamo che $a = a_0/(1+z)$ da cui $da = -a_0/(1+z)^2 dz$ per cui

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho_0 \exp \left\{ 3 \int_z^0 [1 + w(z)] \frac{-a_0}{(1+z)^2} \frac{1+z}{a_0} dz \right\} \\ \rho(z) &= \rho_0 \exp \left\{ 3 \int_0^z \frac{[1 + w(z)]}{1+z} dz \right\} \end{aligned}$$

5.5 Relazioni tra i parametri cosmologici

Le equazioni (F1) ed (F2) permettono di ricavare utili relazioni tra i parametri cosmologici. Se partiamo dalla (F1) e la dividiamo per a^2 abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 + kc^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{1}{3} a^2 c^2 \Lambda \quad / \cdot \frac{1}{a^2} \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \rho \frac{H^2}{H^2} + \frac{1}{3} c^2 \Lambda \frac{H^2}{H^2} \\ H^2 + \frac{kc^2}{a^2} &= H^2 \cdot \frac{\rho}{\rho_{cr}} + H^2 \cdot \frac{c^2 \Lambda}{3H^2} \\ \frac{kc^2}{a^2} &= H^2 \left[\frac{\rho}{\rho_{cr}} + \frac{c^2 \Lambda}{3H^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

Ricordiamo che $\Lambda c^2/3H^2 = \Omega_\Lambda$, $\rho = \rho_M + \rho_R$ e quindi

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2 [\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda - 1]$$

Se chiamo $\Omega \equiv \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda$, avremo

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2 [\Omega - 1]$$

Questa relazione vale ad ogni istante; in particolare al tempo attuale $t = t_0$ avremo

$$\frac{kc^2}{a_0^2} = H_0^2 [\Omega_0 - 1]$$

Da questa relazione vedo subito che, a seconda del valore attuale del parametro di densità totale Ω_0 avremo

- $\Omega_0 > 1 \Rightarrow k = +1$
- $\Omega_0 = 1 \Rightarrow k = 0$
- $\Omega_0 < 1 \Rightarrow k = -1$

Quindi il valore di Ω_0 definisce la curvatura della sezione spaziale a tempo cosmico costante! La relazione scritta sopra permette anche di esprimere (per $k \neq 0$) il valore attuale del fattore di scala:

$$a_0 = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{k}{\Omega_0 - 1}}$$

Una seconda relazione deriva dalla (F2) con *pressione trascurabile* ($p = 0$), cioè con trascurabile contributo di materia relativistica ($\Omega_R \simeq 0$):

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\rho a + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a & / \cdot \frac{1}{a} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2 & / \cdot \frac{H^2}{H^2} \\ \frac{1}{3}\Lambda c^2 &= H^2 \frac{2 \cdot 4\pi G}{3H^2} \cdot \frac{1}{2}\rho + \frac{\ddot{a}}{a} \cdot \frac{H^2 a^2}{\dot{a}^2}\end{aligned}$$

Ricordando che il parametro di decelerazione $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ e $\rho = \rho_M$ si può scrivere

$$\frac{1}{3}\Lambda c^2 = H^2 \left[\frac{\Omega_M}{2} - q \right]$$

che vale a qualunque epoca. Questa relazione, all'epoca attuale e se $\Lambda = \Omega_\Lambda = 0$, fornisce un legame tra q_0 ed Ω_0 : $q_0 = \Omega_0/2$. Altrimenti otteniamo più in generale

$$\begin{aligned}\Omega_\Lambda = \frac{\Omega_M}{2} - q &\quad \Rightarrow \quad q = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_\Lambda}{2} - \frac{\Omega_\Lambda}{2} \\ q &= \frac{\Omega}{2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda\end{aligned}$$

che *vale*, come già detto sopra, *quando la pressione è trascurabile*, cioè quando è trascurabile Ω_R . Vedremo poi una relazione che non risente di questa limitazione.

5.6 Il parametro di Hubble

Consideriamo nuovamente la (F1) e dividiamola per a_0^2 , ricordando anche che $kc^2/a_0^2 = H_0^2 [\Omega_0 - 1]$, $\Omega_0 = \sum_w \Omega_{0w}$; inglobiamo anche la costante cosmologica nella densità ρ tramite la $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$:

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 + kc^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 & / \cdot \frac{1}{a_0^2} \\ \frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - \frac{8\pi G}{3H_0^2} H_0^2 \rho \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 &= -\frac{kc^2}{a_0^2}\end{aligned}$$

dove $\rho \equiv \sum_w \rho_w = \sum_w \rho_{0w} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} = \rho_{0cr} \sum_w \Omega_{0w} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)}$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - H_0^2 \sum_w \Omega_{0w} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 &= -H_0^2 \left[\sum_w \Omega_{0w} - 1 \right] \\ \frac{\dot{a}^2}{a_0^2} &= H_0^2 \left[\sum_w \Omega_{0w} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} + \left(1 - \sum_w \Omega_{0w} \right) \right]\end{aligned}$$

che si può scrivere, ricordando che $H(t) \equiv \dot{a}/a$, e moltiplicando per $(a_0/a)^2$:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \left[\sum_w \Omega_{0w} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} + \left(1 - \sum_w \Omega_{0w} \right) \right]$$

Ricordando che $a_0/a = 1 + z$ possiamo ricavare $H(z)$

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[\sum_w \Omega_{0w} (1+z)^{1+3w} + \left(1 - \sum_w \Omega_{0w} \right) \right]$$

che, esplicitando le varie componenti, fornisce

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[\Omega_R (1+z)^2 + \Omega_M (1+z) + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2} + 1 - (\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda) \right]$$

5.7 Le tre epoche dell'Universo

Nell'equazione appena scritta, che descrive l'evoluzione di $H(z)$, e quindi anche del fattore di scala, vediamo che ci sono tre contributi, legati ad Ω_R , Ω_M , Ω_Λ , che variano in modo diverso con il redshift.

A z elevato il termine in Ω_Λ conta poco, come pure il termine $1 - (\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda)$ che è dell'ordine dell'unità, mentre gli altri due crescono; ma quello in Ω_R cresce più rapidamente e, anche se oggi $\Omega_R \ll \Omega_M$, la materia relativistica domina prima dell'epoca cosiddetta dell' *equivalenza*, corrispondente a

$$1 + z_{eq} = \frac{\Omega_M}{\Omega_R} \simeq 23800 \Omega_M h^2$$

che, per $\Omega_M \simeq 0.3$ e $h \simeq 0.7$, fornisce $z_{eq} \simeq 3700$. Quindi prima dell'equivalenza la dinamica dell'Universo è dominata dalla materia relativistica, poi dalla materia non relativistica, fino a quando non entra in gioco la costante cosmologica, cioè quando

$$\Omega_M(1 + z_\Lambda) = \Omega_\Lambda(1 + z_\Lambda)^{-2}$$

cioè ad un redshift z_Λ tale che

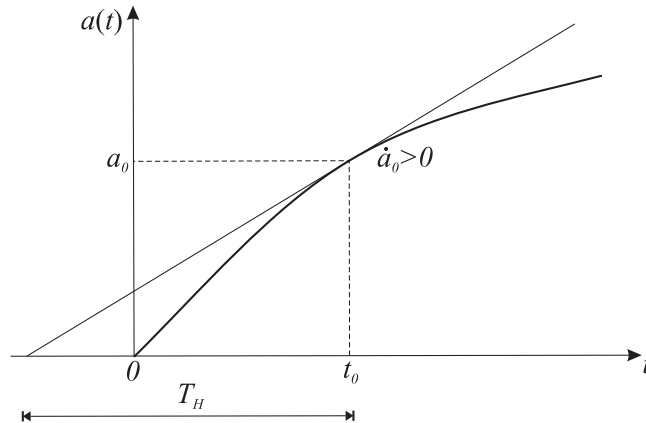
$$1 + z_\Lambda = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \right)^{\frac{1}{3}}$$

che, se $\Omega_\Lambda = 0.7$ ed $\Omega_M = 0.3$ corrisponde a $z_\Lambda = 0.33$.

Abbiamo quindi le *tre fasi* di evoluzione dell'Universo: una prima fase dominata dinamicamente dalla materia relativistica (radiazione) (*RD*), una seconda dominata dalla materia (*MD*), una terza, quella attuale, dominata dal "vuoto" (*VD*), intendendo dominata dalla costante cosmologica (o da una forma di dark energy).

5.8 Il tempo di Hubble

Supponendo che ad un certo istante (ad esempio $t = t_0$) sia $\dot{a} > 0$ (espansione), dalla (*F2*) si vede che, se $(\rho + 3p/c^2) > 0$ (cioè se $(1 + 3w)\rho > 0$, $w > -1/3$), allora \ddot{a} è sempre < 0 e il grafico di $a(t)$ ha la concavità rivolta verso il basso, quindi $a(t)$ deve essere nulla ad un certo istante, che possiamo prendere come $t = 0$. A $t = 0$ ρ ed H divergono, e abbiamo una singolarità, il cosiddetto *Big Bang*.



Vediamo anche che $a_0/T_H = \dot{a}_0 \Rightarrow 1/T_H = H_0$ e $T_H > t_0$ cioè $H_0 t_0 \leq 1$: l'inverso di H_0 dà un limite superiore all'età dell'Universo (T_H è il cosiddetto *tempo di Hubble* $= 1/H_0$).

Il Big Bang è inevitabile se valgono le ipotesi che abbiamo introdotto: il principio cosmologico, la legge di gravitazione di Einstein, $p = w\rho c^2$ con $w > -1/3$. Potrebbe entrare in gioco qualcosa che agisce come una costante cosmologica, e/o fattori che coinvolgono la meccanica quantistica (quantum gravity). Notiamo anche che, se in qualche istante risulta $\dot{a} < 0$, la concavità di $a(t)$ implica che nel futuro ci sia un collasso inarrestabile: il *Big Crunch*. Notiamo che l'effetto di espansione *non* è dovuto in alcun modo alla pressione, che agisce sempre nel senso di decelerare l'espansione, se $w > -1/3$.

5.9 L'evoluzione del parametro di densità Ω

Se dividiamo membro a membro la relazione, relativa ad un istante generico,

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2(\Omega - 1)$$

con la relazione analoga che vale a $t = t_0$ si ha

$$\frac{a_0^2}{a^2} = \frac{H^2}{H_0^2} \frac{\Omega - 1}{\Omega_0 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2}$$

e dall'evoluzione di H si ha:

$$\Omega - 1 = \frac{\Omega_0 - 1}{1 - \Omega_0 + \sum_w \Omega_{0w} (1+z)^{1+3w}}$$

Esplicitando le 3 componenti R , M , Λ :

$$\Omega - 1 = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_R(1+z)^2 + \Omega_M(1+z) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_0}$$

che mi fornisce l'evoluzione di $\Omega(z)$. Vedo anzitutto che, essendo il denominatore della parte destra della relazione sempre positivo (si veda la relazione che esprime $H(z)$), il segno di $\Omega(z) - 1$ non cambia durante l'evoluzione. Quindi se $\Omega_0 > 1$, $\Omega(z)$ rimane sempre maggiore di uno attraverso la storia cosmica. Analogamente se $\Omega_0 < 1$; se $\Omega_0 = 1$ così rimane in tutti i tempi.

Andando indietro nel tempo, per $z \rightarrow \infty$, vedo che $\Omega - 1 \rightarrow 0$, cioè $\Omega \rightarrow 1$: risalendo nel passato l'Universo somiglia sempre più a quello con $k = 0$ e gli effetti della curvatura sono trascurabili nelle prime fasi dell'evoluzione cosmica.

Il fatto che Ω tenda a divergere da 1 al passare del tempo, mentre in realtà oggi sembra essere molto prossimo ad 1, richiede che nel lontano passato Ω sia stato in realtà estremamente prossimo ad 1, con notevole "fine tuning" tra densità e tasso di espansione. Questo è il cosiddetto *problema della piattezza*, che viene risolto dal paradigma dell'inflazione. L'esistenza di una fase di inflazione, dominata cioè dalla densità di energia di un falso vuoto che mima gli effetti di una costante cosmologica, fornisce il meccanismo attraverso il quale Ω viene talmente forzato verso l'unità, da rimanere fino ad oggi non molto diverso da 1.

5.10 Evoluzione del parametro di decelerazione $q(z)$

Vedi pagine scannerizzate.

5.11 Modelli cosmologici

Esaminando le equazioni di Friedmann (F1) e (F2)

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{1}{3} a^2 c^2 \Lambda \quad (F1)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a \quad (F2)$$

possiamo schematizzare qualitativamente l'evoluzione dei vari modelli con $\Lambda \neq 0$ (o, in generale, con Λ qualsiasi).

Se $\Lambda < 0$, dalla (F1) vedo che ($\rho_M \propto a^{-3}$, $\rho_R \propto a^{-4}$) il termine in ρa^2 (positivo) decresce nel tempo, mentre quello in Λa^2 (negativo) cresce (in valore assoluto), kc^2 è una costante e perciò, ad un certo punto, al crescere del fattore di scala a , risulterà $\dot{a}^2 = 0$; se a crescesse ancora, \dot{a}^2 diverrebbe immaginario. Esiste quindi un valore massimo di a e, poiché \ddot{a} è sempre negativo, e la curva $a(t)$ ha la concavità rivolta verso il basso, si ha un ricollasso. Questo per qualunque valore di k se $\Lambda < 0$.

Se $\Lambda > 0$ occorre separare i due casi $k = -1$ o $k = 0$ dal caso $k = +1$. Se $k = -1$ o $k = 0$, $\dot{a}^2 > 0$ sempre e anche \ddot{a} diventa prima o poi positivo: l'universo si espande sempre, inizialmente tende a decelerare ed alla fine accelera.

$$dn = \frac{cdt}{a(t)} \rightarrow \frac{cdte}{a(t_e)} = \frac{cdt_0}{a(t_0)} \rightarrow \text{lunghezza foto ne} \frac{dt}{a} = \text{cost}$$

radiazione da una sorgente che arriva ai tempi t_0 e $t_0 + \Delta t_0$, lasciando la sorgente ai tempi t e $t + \Delta t$

I redshift osservati in $r=0$ saranno:

$$1+z = \frac{a_0}{a(t)} \rightarrow z = \frac{a(t)}{a_0} - 1$$

$$z + \Delta z = \frac{a(t_0 + \Delta t_0)}{a(t + \Delta t)} - 1$$

CODEX
EE-ELT

[ESPRESSO e LIT]

$$\Delta z = \frac{a(t_0) + \dot{a}(t_0) \cdot \Delta t_0}{a(t) + \dot{a}(t) \cdot \Delta t} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 = z$$

~~$$\frac{a(t_0) + \dot{a}(t_0) \cdot \Delta t_0}{a(t) + \dot{a}(t) \cdot \Delta t} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 = z$$~~

$$= \frac{a(t_0) \left[1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \cdot \Delta t_0 \right]}{a(t) \left[1 + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot \Delta t \right]} - \frac{a(t_0)}{a(t)} = z$$

$$= \frac{a(t_0)}{a(t)} \left[\frac{1 + H_0 \cdot \Delta t_0}{1 + H(t) \cdot \Delta t} - 1 \right] =$$

$$= \frac{a(t_0)}{a(t)} \frac{1 + H_0 \Delta t_0 - 1 - H(t) \Delta t}{1 + H(t) \cdot \Delta t} =$$

$$= (1+z) \frac{H_0 \Delta t_0 - H(t) \cdot \Delta t \frac{a(t)}{a(t_0)}}{1 + H(t) \cdot \frac{a(t)}{a(t_0)} \cdot \Delta t} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{\Delta t_0}$$

$$\frac{\Delta t}{a(t)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)}$$

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \frac{a(t)}{a(t_0)}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t_0} = (1+z) \frac{H_0 - \frac{H(t)}{1+z}}{1 + \frac{H(t)}{1+z} \cdot \Delta t_0}$$

e $\Delta t_0 \rightarrow 0$

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_{r=0} = (1+z) H_0 - H(z)$$

[MeVetkie, 1962]

$$q \equiv - \frac{\ddot{a}}{a^3}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2$$

(2)

$$\Rightarrow q \equiv - \frac{\ddot{a}}{a} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = - \frac{\ddot{a}}{a H^2}$$

dalle (F1)

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[\sum_i \Omega_i \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w_i} + (1 - \sum_i \Omega_i) \right] \left(\frac{a_0}{a} \right)^{2w_0}$$

$$2 \dot{a} \ddot{a} = H_0^2 a_0^2 \left[\sum_i \Omega_i (1+3w_i) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} \cdot \frac{-a_0}{a^2} \right]$$

$$\ddot{a} = - \frac{H_0^2 a_0^3}{2 a^2} \left[\sum_i \Omega_i (1+3w_i) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} \right]$$

$$\sum_i \Omega_i \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} + 3 \sum_i w_i \Omega_i \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3w_i}$$

$$q = - \frac{\ddot{a}}{a H^2} = \frac{H_0^2 a_0^3}{2 a^3 H^2} \left[\frac{1}{2} \sum_i \Omega_i \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} + \frac{3}{2} \sum_i w_i \Omega_i \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} \right]$$

$$q_0: a \equiv a_0 \rightarrow q_0 = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i + \frac{3}{2} \sum_i w_i \Omega_i$$

MA: l'epoca t_0 di riferimento, che sopra ho assunto essere l'epoca attuale, può essere in realtà qualunque fase dell'evoluzione dell'universo, purché gli Ω_i siano non gli attuali, ma quelli di quell'epoca. Allora la relazione

$$|q(z) = \frac{1}{2} \Omega_{tot}(z) + \frac{3}{2} \sum_i w_i \Omega_i(z)|$$

continua a valere.

Se, ad esempio, considero un universo piatto (6)
 $(k=0, \Omega_{tot} = 1)$ formato solo da materia e Λ
 $\Omega_m(z) + \Omega_\Lambda(z) = 1$, $\Omega_k = 0$ dunque:

$$q(z) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \left[-1 \cdot \Omega_\Lambda(z) + 0 \cdot \Omega_m(z) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \Omega_\Lambda(z)$$

come calcolo $\Omega_\Lambda(z)$?

Ricordiamo che, in questo caso, ($\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 1$ sempre)

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[\Omega_m(1+z) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} \right]$$

$$= H_0^2 (1+z)^3 \left[\Omega_m + \frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^3} \right]$$

$$\Omega_\Lambda(z) = 1 - \Omega_m(z)$$

$$\Omega_m(z) = \frac{\rho_m(z)}{\rho_{tot}(z)} = \frac{\rho_{0m}(1+z)^3}{\rho_{0cr} \cdot H^2/H_0^2}$$

$$= \Omega_m \frac{(1+z)^3}{(1+z)^3}$$

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_m + \Omega_\Lambda / (1+z)^3}$$

$$\Omega_\Lambda(z) = 1 - \frac{\Omega_m}{\Omega_m + \Omega_\Lambda / (1+z)^3} = 1 - \frac{\Omega_m (1+z)^3}{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda} =$$

$$= \frac{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda - \Omega_m (1+z)^3}{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda} = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda + (1-\Omega_\Lambda)(1+z)^3}$$

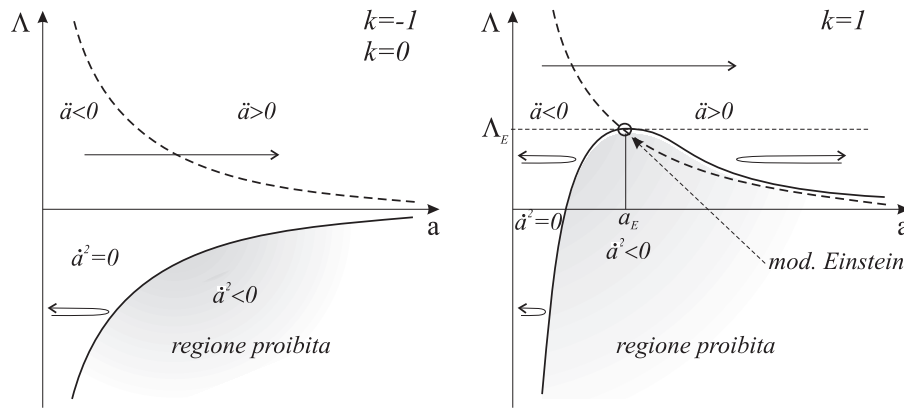
$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \cdot \frac{H^2}{H_0^2}$$

$$q(z) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left[\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda + (1-\Omega_\Lambda)(1+z)^3} \right]$$

$$q(\tilde{z}) = 0$$

$$\tilde{z} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} - 1$$

$$\Omega_\Lambda = 0.7 \rightarrow \tilde{z} = 0.67$$



Se $k = +1$, con $\Lambda = 0$, per un certo valore di a risulta $\dot{a}^2 = 0$, e si ha ricollasso; lo stesso accade se Λ è positivo ma non molto grande. La regione proibita ha l'andamento riprodotto in figura. Come si vede è possibile avere contemporaneamente sia $\dot{a} = 0$ che $\ddot{a} = 0$, che corrispondono al modello statico di **Einstein**. Per valori di $\Lambda > \Lambda_E$, cioè del massimo della regione proibita, nuovamente abbiamo decelerazione iniziale seguita da accelerazione ed espansione fino all'infinito. Tra i casi con $\Lambda > \Lambda_E$ abbiamo il cosiddetto modello di **Lemaitre**, in cui, se $\Lambda = \Lambda_E(1 + \epsilon)$ con $\epsilon \ll 1$ possiamo avere un'epoca quasi stazionaria arbitrariamente lunga. Tale modello fu invocato nel 1967 per spiegare un eccesso di quasar a $z \sim 2$ (l'evoluzione dei quasar oggi viene interpretata in modo diverso). In questo modello viene anche a cadere il limite $T_H \equiv 1/H > t_0$. Se $0 < \Lambda < \Lambda_E$, a seconda della condizione iniziale, si può avere una fase di contrazione, seguita da una espansione con $a(t)$ sempre > 0 (*bouncing universe*, universo "rimbalzante"), oppure ancora un modello che ricollassa, come quelli con $\Lambda < 0$.

Queste considerazioni si possono esprimere sinteticamente con i due grafici qualitativi sopra riportati, che hanno in ascissa il fattore di scala e in ordinata Λ . Il grafico seguente mostra invece, in modo sintetico, tutta la casistica discussa.

	$\Lambda > 0$			$\Lambda = 0$	$\Lambda < 0$
$k = -1$					
$k = 0$					
$k = 1$					
	$\Lambda > \Lambda_c$	$\Lambda = \Lambda_c$	$0 < \Lambda < \Lambda_c$		

Inizieremo ora a vedere in dettaglio alcuni modelli che sono interessanti per questioni storiche o perchè possono essere utili approssimazioni in alcune fasi evolutive.

Se includiamo la costante cosmologica entro il tensore energia-impulso, come già fatto più sopra, e la pressione efficace \tilde{p} e densità efficace $\tilde{\rho}$ sono espresse da

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = \rho + \rho_\Lambda$$

le (F1) e (F2) diventano;

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} a^2 \quad (F1)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\tilde{\rho} + \frac{3\tilde{p}}{c^2} \right) a \quad (F2)$$

Queste ammettono una soluzione statica con $\ddot{a} = 0$ e $\dot{a} = 0$ se:

$$\tilde{\rho} = -\frac{3\tilde{p}}{c^2} = \frac{3kc^2}{8\pi G a^2}$$

Per un universo come quello attuale con $p \simeq 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} -\frac{3\tilde{p}}{c^2} &= -\frac{3}{c^2} \left(-\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) = \frac{3kc^2}{8\pi G a^2} &\Rightarrow \quad \Lambda &= \frac{k}{a^2} \\ \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} &= \frac{3kc^2}{8\pi G a^2} &\Rightarrow \quad \rho &= \frac{kc^2}{4\pi G a^2} \end{aligned}$$

Poichè $\rho > 0$ ne segue che $k = +1$ e $\Lambda > 0$. Il valore di Λ che rende l'universo statico è

$$\Lambda_E = \frac{k}{a^2} = \frac{4\pi G \rho}{c^2} \quad \text{e} \quad a = a_E = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho}}$$

Questo è il già menzionato modello di **Einstein**, che però è instabile: vi sono due modelli, detti di **Eddington-Lemaitre** con $\Lambda = \Lambda_E$ e $k = +1$, che hanno come asintoto il modello di Einstein. Uno parte da $a = 0$ e tende asintoticamente ad a_E , con $a < a_E$. L'altro invece parte da $a = a_E$ e, dopo un tempo infinitamente lungo, si discosta con lentezza da a_E e diverge. Questo perchè una leggera espansione è sufficiente a far decrescere l'attrazione gravitazionale e accrescere la repulsione dovuta a $\Lambda > 0$. All'opposto, una piccola contrazione da $a = a_E$ accresce l'autogravitazione e porta al collasso.

Un modello particolare è quello di **De Sitter**: esso è vuoto ($p = 0$ e $\rho = 0$) e piatto ($k = 0$). Abbiamo in questo caso: che mi dà esattamente

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} c^2 a^2 \quad \Rightarrow \quad a(t) = A e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct} \quad \text{con} \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c = \text{cost}$$

Vedremo che in questo modello, in cui l'equazione di stato è del tipo $\tilde{p} = -\tilde{\rho} c^2$ ci porterà all'universo inflazionario, una fase iniziale dell'evoluzione cosmica. Osserviamo anche che il modello di De Sitter rappresenta il comportamento asintotico dei modelli con $\Lambda > 0$, come si può vedere esaminando la (F1) e facendo crescere a . Perciò questo modello rappresenta anche il comportamento asintotico del modello cosmologico che attualmente ha maggior credito.

5.12 Il modello di Einstein-de Sitter

In questo modello (**EdS**) si trascura la costante cosmologica e si assume che la dinamica sia dominata da una componente sola (radiazione o materia) e sia $\Omega_{0w} \equiv 1$ (questo, come visto sopra, implica che $\Omega_w(z) \equiv 1$ sempre); cioè $k = 0$. Per la precisione, il modello con $k = 0$ e $w = 0$ è detto di Einstein-de Sitter, ma chiamiamo in generale con questo nome anche i modelli con $w \neq 0$. Sia allora $\Lambda = 0$. Avremo, dalla (F1), nella fase dominata dalla componente w :

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} = H_0^2 (1+z)^{1+3w}$$

cioè

$$a^{\frac{1+3w}{2}} da = C dt \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{3(1+w)}{2}} = C' \cdot t$$

e riferendosi ad a_0 e t_0 :

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

cioè l'universo si espande per sempre. Possiamo anche scrivere l'ultima formula in funzione di z , come:

$$t = t_0 (1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}}$$

Abbiamo anche:

$$\begin{aligned}
H &\equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)t} \quad \rightarrow \quad Ht = cost \quad \rightarrow \quad H = \frac{H_0 t_0}{t} = H_0(1+z)^{\frac{3(1+w)}{2}} \\
q &\equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{2}{3(1+w)} \frac{\dot{a}t - a}{t^2} \frac{a}{\dot{a}^2} = \frac{1+3w}{2} = cost = q_0 \\
t_{0cr,w} &\equiv t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} \quad \text{dalla prima} \\
\rho_w a^{3(1+w)} &= cost \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_w}{\rho_{0w}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} \quad \rightarrow \quad \rho_w(t) = \frac{\rho_{0w} t_0^2}{t^2}
\end{aligned}$$

ma dire che $\Omega_{0w} = \Omega_w = 1$ significa che $\rho = \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$, cioè:

$$\rho_w(t) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left(\frac{2}{3(1+w)H_0}\right)^2 \frac{1}{t^2} = \frac{1}{6\pi G(1+w)^2 t^2}$$

Risulta utile scrivere esplicitamente queste relazioni nei casi:

- $w = 0$ “polvere”, universo dominato dalla materia (=fluido non relativistico)

$$\begin{aligned}
a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} & t &= t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}} & H &= \frac{2}{3t} = H_0(1+z)^{\frac{3}{2}} \\
q_0 &= \frac{1}{2} & t_{0cr,m} &= t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} & \rho_m(t) &= \frac{1}{6\pi G t^2}
\end{aligned}$$

- $w = 1/3$ materia relativistica, universo dominato da radiazione

$$\begin{aligned}
a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} & t &= t_0(1+z)^{-2} & H &= \frac{1}{2t} = H_0(1+z)^2 \\
q_0 &= 1 & t_{0cr,r} &= t_0 = \frac{1}{2H_0} & \rho_r &= \frac{3}{32\pi G t^2}
\end{aligned}$$

Osserviamo che accrescere la pressione (da $w = 0$ a $w = 1/3$) fa crescere il parametro di decelerazione q_0 .

Questo modello è però estensibile anche a casi più generali. Infatti, nelle fasi dominate dalla radiazione o dalla materia, quando il contributo di Ω_Λ è trascurabile, come anche il termine di curvatura, l'evoluzione della $a(t)$ è data dalla

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \Omega_{0w} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w}$$

analoga alla relazione che definisce il modello *EdS*, ma con una costante di Hubble efficace $H_{0,eff}$ pari a

$$H_{0,eff} = H_0 \sqrt{\Omega_{0w}}$$

Quindi a z elevato possiamo usare le stesse relazioni del modello *EdS*, ma con $H_0 \rightarrow H_{0,eff}$, ad esempio:

$$\begin{aligned}
t(z) &= \frac{2}{3(1+w)H_0 \sqrt{\Omega_{0w}}} (1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} \\
H(z) &= H_0 \sqrt{\Omega_{0w}} (1+z)^{\frac{3(1+w)}{2}}
\end{aligned}$$

Rimangono invariate le relazioni che esprimono $\rho_w(t)$ (in cui il termine con H_0 e quello con Ω_{0w} si semplificano) e q (che non dipende da H_0).

Queste relazioni sono utili per avere delle *stime approssimate* dei valori corretti. Vedo quindi che, a z elevato, il modello di *EdS* rappresenta un'ottima approssimazione del modello reale di Universo, quale che sia la sua curvatura.

5.13 Modelli con radiazione e materia

Se curvatura e costante cosmologica sono trascurabili è possibile trovare una soluzione analitica esatta. L'equazione

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[\Omega_R \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right) \right]$$

può essere integrata. Se ne facciamo la radice quadrata e separiamo le variabili otteniamo

$$H_0 dt = \frac{d(a/a_0)}{\left[\Omega_R \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right) \right]^{1/2}}$$

Posto $a/a_0 = x$ ed integrando abbiamo

$$\int_0^t H_0 dt' = \int_0^{a/a_0} \frac{dx}{\left[\frac{\Omega_M}{x} + \frac{\Omega_R}{x^2} \right]^{1/2}} = \int_0^{a/a_0} \frac{dx}{\left[\frac{\Omega_M x + \Omega_R}{x^2} \right]^{1/2}} = \int_0^{a/a_0} \frac{x dx}{[\Omega_M x + \Omega_R]^{1/2}}$$

Questo integrale fornisce¹⁷ il risultato cercato:

$$H_0 t = \frac{2}{3\Omega_M^2} \left[\left(\Omega_R + \frac{a}{a_0} \Omega_M \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{a_0} \Omega_M - 2\Omega_R \right) + 2\Omega_R^{\frac{3}{2}} \right]$$

Da questa, ricordando che $1 + z_{eq} \simeq 2.4 \cdot 10^4 \Omega_M h^2$, otteniamo l'età dell'Universo all'epoca dell'equivalenza:

$$t_{eq} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3H_0 \sqrt{\Omega_M} (1 + z_{eq})^{\frac{3}{2}}} \simeq 1.032 \cdot 10^3 (\Omega_M h^2)^{-2} \text{ anni}$$

corrispondente, per $\Omega_M \simeq 0.3$ e $h \simeq 0.7$, a $t_{eq} \simeq 5 \cdot 10^4$ anni ($t_{eq} = 5.66 \cdot 10^4$ anni se $\Omega_M h^2 = 0.135$, come ricavato dai dati di *WMAP* sul *CMB*). Se faccio un confronto con la penultima formula del paragrafo precedente, che è un'approssimazione, vedo che la stima più precisa di t_{eq} differisce per il semplice fattore $2 - \sqrt{2} \simeq 0.59$.

5.14 Modelli dominati da materia

Come abbiamo appena visto, l'epoca dell'equivalenza corrisponde ad un'età dell'Universo di soli 50–60000 anni, molto minori dei circa 13.5 miliardi di anni (vedi oltre) di vita del cosmo in cui viviamo. Se trascuro questo “piccolo” lasso di tempo rispetto alla durata totale, e suppongo che la costante cosmologica sia nulla o comunque trascurabile, ottengo i classici modelli cosmologici riportati in tutti i testi, divulgativi e non, di qualche decina di anni fa. Vediamo quindi in dettaglio questi modelli, ricordando che il modello di *EdS* dominato da materia è già uno di questi casi, quello con $\Omega \equiv \Omega_M = 1$.

L'equazione (F1) diventa, in questo caso,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 \simeq H_0^2 \left[\Omega_M \frac{a_0}{a} + 1 - \Omega_M \right]$$

Se prendiamo la radice positiva, corrispondente ad un modello in espansione, avremo:

$$\frac{da}{dt} = a_0 H_0 \left[\Omega_M \frac{a_0}{a} + 1 - \Omega_M \right]^{1/2} = a_0 H_0 \Omega_M^{1/2} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \frac{a}{a_0} \right]^{1/2}$$

da cui:

$$\int_0^{a/a_0} \frac{d\left(\frac{a}{a_0}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}}{\sqrt{1 + \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \left(\frac{a}{a_0}\right)}} = H_0 \Omega_M^{1/2} \int_0^t dt$$

Vediamo separatamente i due casi $\Omega_M > 1$ e $\Omega_M < 1$:

¹⁷ $\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b^2} \left[\frac{(a+bx)^{3/2}}{3} - a(a+bx)^{1/2} \right]$

- $\Omega_M > 1$: Osserviamo subito che, essendo $1 - \Omega_M < 0$, mentre $\Omega_M(a_0/a)$ decresce al crescere di a , ci sarà un valore del fattore di scala che rende nullo \dot{a} , e valori maggiori di a renderebbero immaginario \dot{a} . Esiste quindi un valore massimo del fattore di scala a_m al tempo $t = t_m$, dato da

$$a(t_m) = a_m = a_0 \frac{\Omega_M}{\Omega_M - 1}$$

Per trovare la soluzione poniamo $(\frac{a}{a_0}) \cdot \frac{2(\Omega_M-1)}{\Omega_M} \equiv 1 - \cos \theta$ con θ angolo di sviluppo, un parametro ausiliario. Allora

$$\begin{aligned} \Omega_M^{1/2} H_0 t &= \int_0^{a/a_0} \frac{d(\frac{a}{a_0})(\frac{a}{a_0})^{1/2}}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_M-1}{\Omega_M}(\frac{a}{a_0})}} & \left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{(1 - \cos \theta)\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} \\ &= \int_0^\theta \frac{(1 - \cos \theta)^{1/2} \Omega_M^{1/2} \Omega_M \sin \theta d\theta \cdot \sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{2}(\Omega_M - 1)^{1/2} 2(\Omega_M - 1) \sqrt{1 - \frac{1 - \cos \theta}{2}} \sqrt{1 - \cos \theta}} & d\left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\Omega_M^{3/2} \sqrt{2}}{2^{3/2}(\Omega_M - 1)^{3/2}} \int_0^\theta \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \end{aligned}$$

da cui alla fine:

$$H_0 t = \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta) \quad a(t) = a_0 \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} (1 - \cos \theta)$$

Questa è l'equazione parametrica di una cicloide. Il massimo si ha per $\theta_m = \pi$ per cui, come già visto,:

$$a(t_m) = a_m = a_0 \frac{\Omega_M}{\Omega_M - 1} \quad H_0 t_m = \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}} (\theta_m - \sin \theta_m) = \frac{\Omega_M \pi}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}}$$

Per $t = 2t_m$ ($\theta = 2\pi$) abbiamo un Big Crunch. Possiamo anche ottenere un'espressione per t_0 ponendo $a(t_0) = a_0$:

$$1 - \cos \theta_0 \equiv \frac{2(\Omega_M - 1)}{\Omega_M} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_0 = \frac{2 - \Omega_M}{\Omega_M} = \left(\frac{2}{\Omega_M} - 1\right)$$

sostituendo nell'altra equazione si ha:

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}} \left[\arccos \left(\frac{2}{\Omega_M} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_M} \sqrt{\Omega_M - 1} \right] < \frac{2}{3}$$

- $\Omega_M < 1$: poniamo in questo caso $(\frac{a}{a_0}) \cdot \frac{2(1-\Omega_M)}{\Omega_M} \equiv \cosh \psi - 1$

$$\begin{aligned} \Omega_M^{1/2} H_0 t &= \int_0^{a/a_0} \frac{d(\frac{a}{a_0})(\frac{a}{a_0})^{1/2}}{\sqrt{1 + \frac{1-\Omega_M}{\Omega_M}(\frac{a}{a_0})}} & \left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{(\cosh \psi - 1)\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} \\ &= \int_0^\psi \frac{\Omega_M^{1/2} \sqrt{\cosh \psi - 1} \Omega_M \sinh \psi d\psi}{\sqrt{2}(1 - \Omega_M)^{1/2} 2(1 - \Omega_M) \sqrt{1 + \frac{\cosh \psi - 1}{2}}} & d\left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{\Omega_M}{2(1 - \Omega_M)} \sinh \psi d\psi \end{aligned}$$

da cui, in modo analogo al caso precedente, si ha

$$H_0 t = \frac{\Omega_M}{2(1 - \Omega_M)^{3/2}} (\sinh \psi - \psi) \quad a(t) = a_0 \frac{2(1 - \Omega_M)}{\Omega_M} (\cosh \psi - 1)$$

Ancora, in modo analogo al caso $\Omega_M > 1$, abbiamo

$$\cosh \psi_0 = 1 + \frac{2(1 - \Omega_M)}{\Omega_M} = \frac{2}{\Omega_M} - 1 \quad \text{e} \quad H_0 t_0 = \frac{\Omega_M}{2(1 - \Omega_M)^{3/2}} \left[\frac{2}{\Omega_M} \sqrt{1 - \Omega_M} - \arccos \left(\frac{2}{\Omega_M} - 1 \right) \right] > \frac{2}{3}$$

Usando la relazione $\arccos(x) = \ln[x + \sqrt{x^2 - 1}]$ e sviluppando per $\Omega_M \rightarrow 0$ si ottiene

$$H_0 t_0 \simeq 1 + \frac{\Omega_M \ln \Omega_M}{2} \rightarrow 1 \quad \text{se} \quad \Omega_M \rightarrow 0$$

precisa al 99% per $\Omega_M < 0.3$.

Perchè studiare modelli che sono palesemente non rappresentativi del modello cosmologico attualmente accettato? Per quanto riguarda il modello con $\Omega_M > 1$, esso può rappresentare l'evoluzione (semplificata) di una fluttuazione di densità in eccesso rispetto alla densità media: se supponiamo che una regione sferica dell'Universo abbia una densità maggiore della densità media e maggiore anche di quella critica, quella regione sferica evolve (il suo raggio evolve) come il fattore di scala di un Universo con $\Omega_{M,locale} > 1$, raggiungendo un massimo e poi ricollassando, mentre il resto dell'Universo continua ad espandersi. Il modello con $\Omega_M < 1$ ci fa vedere come, al tendere della densità a zero per effetto dell'espansione, ci si ritrova con un andamento, e con un k , che riproducono quelli del modello di Milne, con $a \propto t$, $H = 1/t$, $k = -1$.

5.15 Modelli con $\Lambda \neq 0$

Abbiamo già visto una classificazione qualitativa di questi modelli. Cerchiamo ora di essere un po' più quantitativi. Abbiamo anche visto che i modelli che iniziano con un Big Bang ricollassano o si espandono all'infinito. Questo ultimo fatto diviene tanto più probabile al calare della densità di materia e di radiazione ed al crescere del contributo dovuto alla costante cosmologica. Ma in altri casi l'universo non ha mai avuto un Big Bang: nel passato l'universo collassava, ma l'effetto repulsivo di una $\Lambda > 0$ ne ha rallentato il collasso fino a trasformarlo in espansione.

Per vedere in dettaglio i vari casi occorre integrare numericamente le equazioni di Friedmann; nel caso in cui ignoriamo la radiazione, si può procedere anche analiticamente. L'equazione di Friedmann, con $\Omega_R = 0$, diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right) + \Omega_\Lambda \left(\frac{a_0}{a}\right)^{-2} + 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda \right]$$

Ponendo $a/a_0 = R$ e $\tau = H_0 \cdot t$ si ottiene:

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = 1 + \Omega_M \left(\frac{1}{R} - 1\right) + \Omega_\Lambda (R^2 - 1)$$

L'epoca attuale corrisponde a $R = 1$ e la pendenza della curva, sempre all'epoca attuale, è uguale a 1.

Vediamo quale futuro (e quale passato) possono avere i modelli cosmologici in funzione degli attuali valori dei parametri di densità.

Abbiamo già visto che se $\Lambda < 0$ ($\Omega_\Lambda < 0$) l'universo ricollassa in ogni caso.

Abbiamo anche visto che, se $k \leq 0$ e $\Lambda > 0$ ($\Omega_\Lambda > 0$), si ha alla fine in ogni caso un'espansione come nel modello de Sitter.

Più vario è il caso in cui $k = +1$ e $\Lambda > 0$ ($\Omega_\Lambda > 0$), come abbiamo visto. Un valore $\Omega_\Lambda > 0$ tende a far espandere l'universo a meno che Ω_M non sia così elevato da forzare il ricollasso prima che il termine di costante cosmologica riesca a dominare la dinamica. In questo caso, per un $R > 1$, cioè nel futuro, $R(\tau)$ avrà un massimo con derivata nulla, fornendo un'equazione cubica per R . Si avrà espansione e non ricollasso se:

$$\Omega_\Lambda > 4\Omega_M \left\{ \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] \right\}^3$$

Per valori grandi e positivi di Ω_Λ l'universo ha invece un punto di inversione nel passato, un rimbalzo, che separa una fase di collasso da quella attuale di espansione (*bouncing model*). Questo accade se

$$\Omega_\Lambda > 4\Omega_M \left\{ \text{coss} \left[\frac{1}{3} \text{coss}^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \right) \right] \right\}^3 \quad (*)$$

dove

$$\text{coss} = \begin{cases} \cosh & \Omega_M < 1/2 \\ \cos & \Omega_M \geq 1/2 \end{cases}$$

Il "rimbalzo" avviene ad un redshift z_B e, ricordando che $a_0/a = 1 + z$, vediamo che ad un minimo di a nel passato corrisponde ad un massimo di $z = z_B$ con

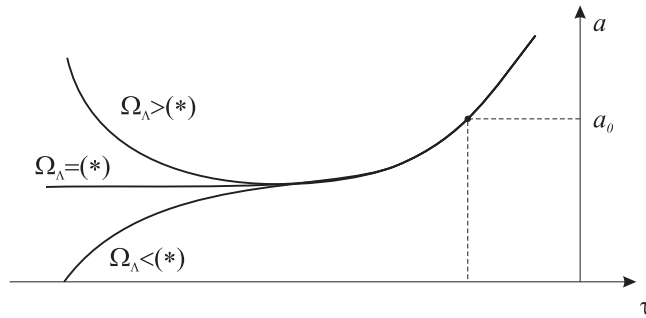
$$z_B = 2 \text{coss} \left[\frac{1}{3} \text{coss}^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \right) \right] - 1 \quad (**)$$

La tabella seguente mostra alcuni risultati:

Ω_M	z_B
0.01	5
0.1	2
0.01	1.25

Vediamo subito che, per valori di Ω_M ragionevoli, ottengo valori implausibili di z_B . Se $\Omega_M \sim 0.1$ l'esistenza di QSO a $z \gtrsim 5$ esclude questi modelli con rimbalzo.

In questi modelli, comunque, non c'è una fase di Big Bang, di elevatissima densità della materia, e sono esclusi anche dall'esistenza del fondo a microonde.

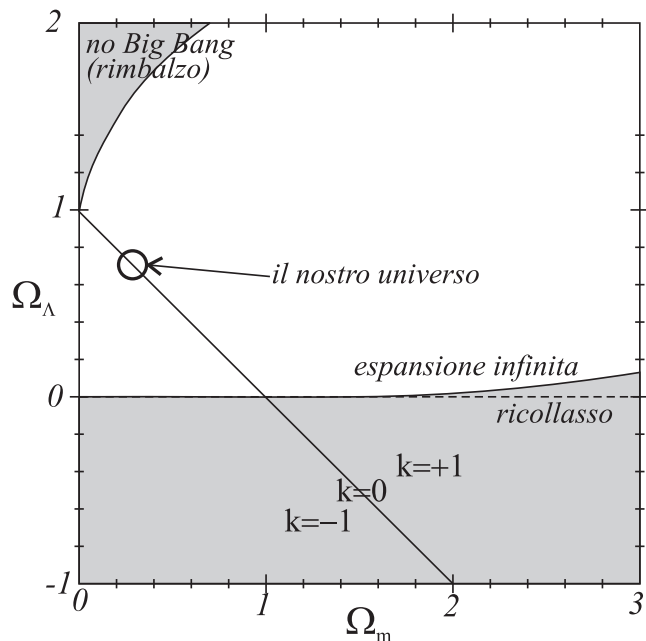


Se l'Universo si trova esattamente sulla linea critica definita dalla (*), il "rimbalzo" si ha a $t = -\infty$. I modelli al di sotto della linea critica, ma molto prossimi ad essa, sono noti come modelli "esitanti" (*loitering models*), poichè hanno una lunga fase quasi-statica, con un fattore di scala quasi costante (e quindi con un redshift costante $z = z_L$), e corrispondono ai modelli di Lemaitre di cui abbiamo già detto sopra.

La (***) dà il valore di z_L corrispondente a questa fase quasi-statica, che è tanto più lunga quanto più siamo prossimi alla curva (*). Una durata infinita corrisponde al modello di Eddington-Lemaitre, con $\Lambda \sim \Lambda_E$ all'epoca della quasi-staticità. Questo modello ha (ricordandoci che $\Lambda_E = \frac{4\pi G \rho}{c^2}$ e che $\rho = \rho_{0M}(1+z)^3$, $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda_E c^2}{8\pi G}$)

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2} \rho_{0M}(1+z_L)^3 \quad \text{e dividendo per } \rho_{0cr} \quad \Rightarrow \quad \Omega_\Lambda = \frac{1}{2} \Omega_M(1+z_L)^3$$

come risulta anche dalle (*) e (**). Questa relazione ci fornisce z_L in funzione dei valori odierni di Ω_M e Ω_Λ se siamo in un modello *loitering* (è anche il valore di z per cui $q(z) = 0!$). Vediamo che una fase quasi-statica ad alto redshift richiederebbe valori esageratamente bassi di Ω_M se $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$. Il grafico sotto mostra una sintesi di quanto detto. Ricordiamo che recenti osservazioni suggeriscono i valori $\Omega_M \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$.



5.16 Il nostro Universo?

Come abbiamo visto, il nostro universo, dopo l'equivalenza, è stato dominato prima dalla materia e poi dal vuoto. Esiste una soluzione analitica per un universo con *materia + costante cosmologica* e piatto ($\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$).

Dalla (F1) scritta, in questo caso, nella forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right) + \Omega_\Lambda \left(\frac{a_0}{a}\right)^{-2} \right]$$

si ha, ponendo $R \equiv a/a_0$,

$$\frac{dR}{dt} = H_0 \left[\frac{\Omega_M}{R} + \Omega_\Lambda R^2 \right]^{1/2} \rightarrow H_0 dt = \frac{dR}{\sqrt{\Omega_M/R + \Omega_\Lambda R^2}}$$

$$H_0 t = \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{\Omega_M/x + \Omega_\Lambda x^2}} = \int_0^R \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda x^3}}$$

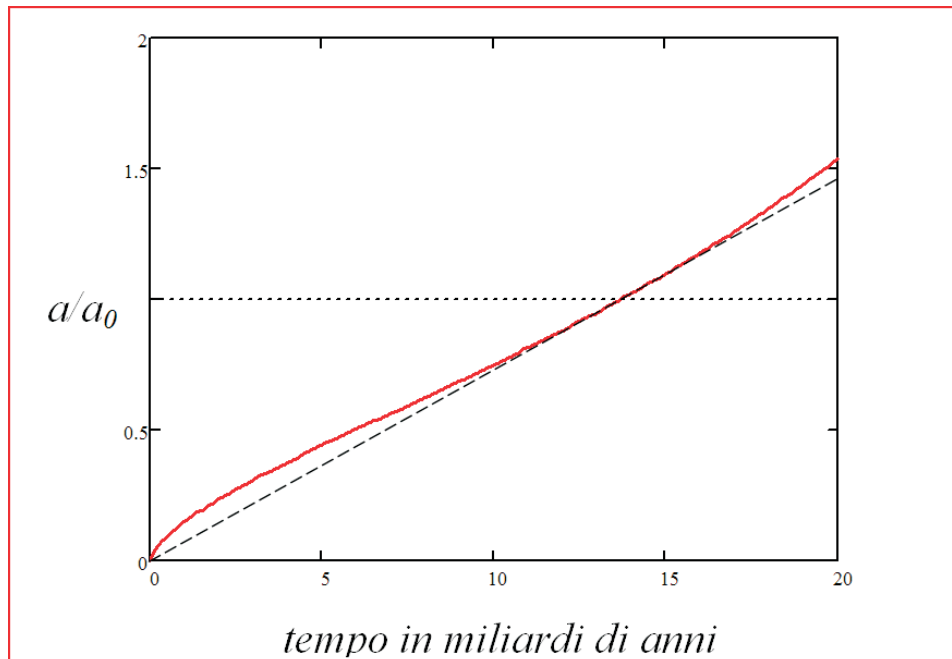
Ponendo $x^3 \equiv u^2$ si ottiene

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^{R^{3/2}} \frac{du}{\sqrt{\Omega_M/\Omega_\Lambda + u^2}}$$

che, risolto¹⁸, fornisce

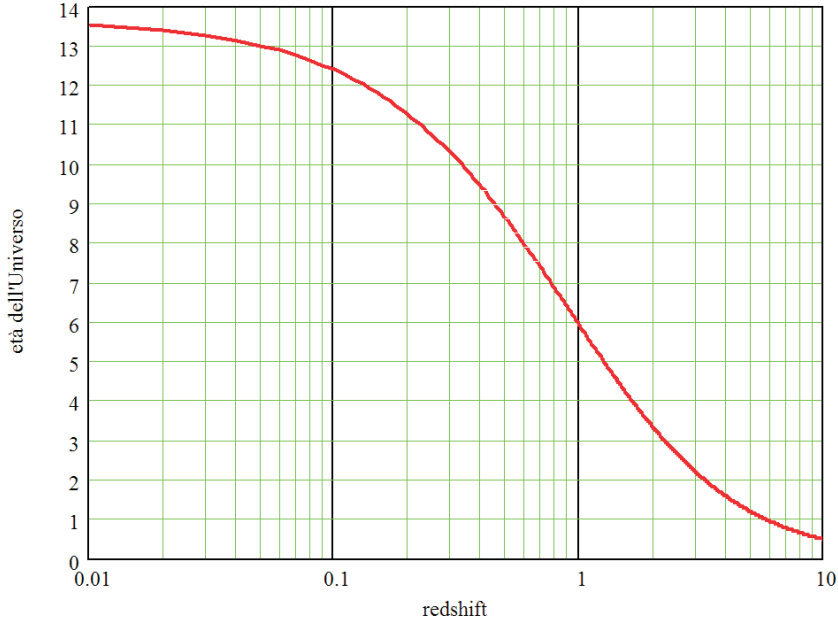
$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1} \left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right]$$

Posto $a/a_0 = (1+z)^{-1}$, questa relazione mi fornisce, per questo modello, l'età dell'Universo in funzione del redshift. Nel grafico seguente è riportato l'andamento del fattore di scala in funzione del tempo per il nostro modello di Universo ($\Omega_M = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ e $h = 0.71$, come dalle osservazioni di *WMAP*). Si noti come la linea tratteggiata, tangente alla curva al tempo attuale, passi con ottima approssimazione per l'origine: con questi parametri cosmologici il tempo di Hubble coincide praticamente con l'età attuale dell'Universo!



Nel grafico seguente vediamo sempre, con gli stessi parametri cosmologici, il legame tra età dell'Universo (in miliardi di anni) ed il redshift.

¹⁸Ricordiamo che, posto $q \equiv \sqrt{x^2 + a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + q)$ e $\ln\left(\frac{x+q}{a}\right) = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$



5.17 L'età dell'Universo

Abbiamo finora visto l'età dell'Universo in funzione del redshift per alcuni modelli particolari. Vediamo ora una formulazione generale. Dalla stessa definizione del parametro di Hubble abbiamo:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad \Longrightarrow \quad dt = \frac{da}{a \cdot H} = \frac{d(a/a_0)}{(a/a_0) \cdot H(a)}$$

da cui, posto $a/a_0 = u$,

$$t(a/a_0) = \int_0^{a/a_0} \frac{du}{u \cdot H(u)}$$

integrabile data la dipendenza di H da a/a_0 e dai parametri cosmologici (vedi paragrafo 5.6). Più pratico è usare il redshift, ricordando che $a/a_0 = 1/(1+z)$ e che quindi

$$da = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz \quad \Longrightarrow \quad dt = -\frac{a_0}{(1+z)^2 a H} dz = -\frac{dz}{(1+z) H(z)}$$

dove si è inserito $a_0/a = 1+z$. Si ottiene quindi la formula generale

$$t(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z') H(z')}$$

dove

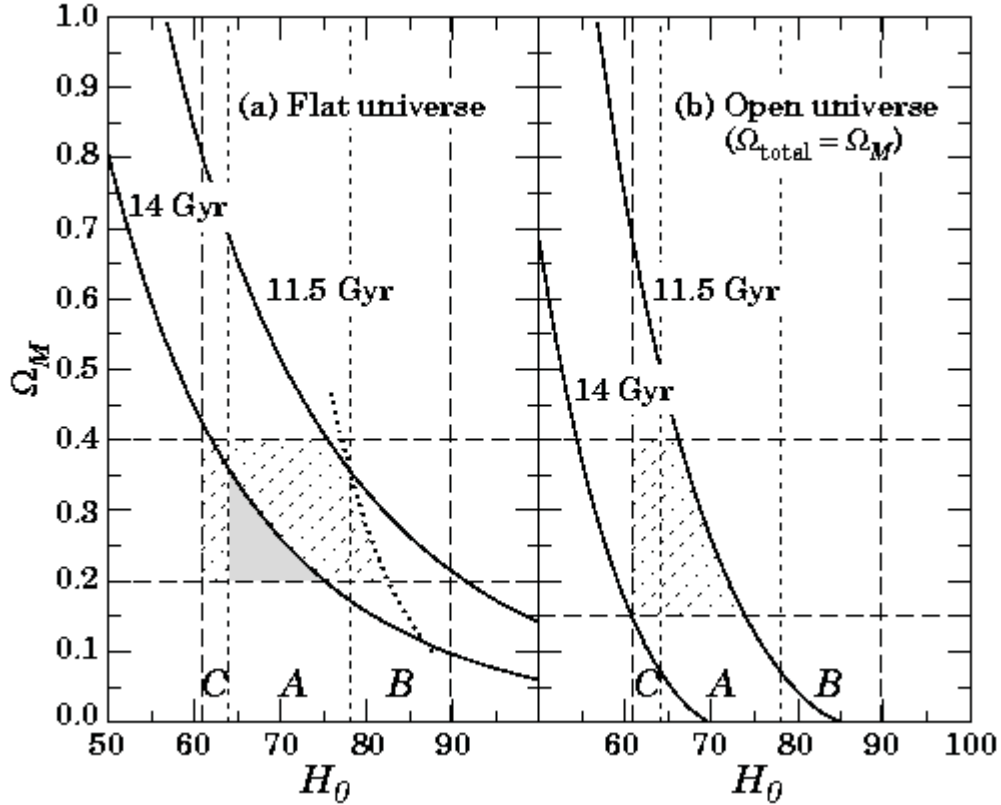
$$H(z) = H_0(1+z) [\Omega_R(1+z)^2 + \Omega_M(1+z) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_0]^{1/2}$$

con $\Omega_0 \equiv \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda$. Un'approssimazione utile per l'età attuale t_0 dell'Universo, esatta se $\Omega_0 = 1$, è la seguente (valida nel caso *vuoto* più *materia*), buona entro qualche percento se $0 < \Omega_M \leq 1$, $0 < \Omega_0 \leq 1$:

$$H_0 t_0 \simeq \frac{2}{3} \frac{\arcsenn \left[\sqrt{|1 - \Omega_a|/\Omega_a} \right]}{\sqrt{|1 - \Omega_a|}}$$

dove $\Omega_a \equiv \Omega_M - 0.3\Omega_0 + 0.3$ e "*arcsenn*" è definito come *arcsenh* se $\Omega_a \leq 1$ (il caso usuale) e *arcsen* se $\Omega_a > 1$. Se, ad esempio, $\Omega_M = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ e $h = 0.71$ (come dalle osservazioni di *WMAP*), si ottiene $t_0 = 13.7 \times 10^9$ anni.

Il grafico seguente illustra l'effetto della costante cosmologica sull'età dell'Universo, confrontando, in funzione di Ω_M il caso "piatto" ($\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$) con il caso "aperto" ($\Omega_0 = \Omega_M$). Si noti come la costante cosmologica allunghi l'età dell'Universo, portandola in accordo con le stime sull'età degli ammassi globulari.



Un parametro cosmologico utilizzato è anche il cosiddetto *loop-back time*, $t_{lb} = t_0 - t(z)$, cioè il tempo trascorso tra il redshift z e oggi. Ad esempio, nel caso di un modello EdS sarà:

$$t_{lb} = t_0 - t_0(1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} = t_0[1 - (1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}}]$$

Esempio: sia $w = 0$, e supponiamo che $H_0 = 50 \text{ km/s Mpc}$.

$$H_0 = \frac{1}{6 \cdot 10^{17} \text{ s}} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{2}{3H_0} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 10^{17} \text{ s} = 4 \cdot 10^{17} \text{ s} = 13.9 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

Consideriamo un quasar con $z = 2$, quanto tempo fa è stata emessa la luce che osserviamo oggi? Avremo

$$t_{lb} = t_0[1 - (1+z)^{-3/2}] = 0.8075 t_0 = 10.8 \cdot 10^9 \text{ anni fa}$$

5.18 Ancora orizzonti

Vediamo di calcolare l'orizzonte delle particelle in un modello di Einstein-de Sitter:

$$\begin{aligned} d_H(t) &= a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = a(t) \int_0^{t/t_0} t_0 \frac{cd(\frac{t'}{t_0})}{a_0(\frac{t'}{t_0})^{\frac{2}{3(1+w)}}} = \frac{a(t)}{a_0} \cdot ct_0 \int_0^{t/t_0} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3(1+w)}}} = \\ &= \frac{a(t)}{a_0} ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1+3w}{3(1+w)}} = \frac{3(1+w)}{1+3w} ct \\ &= \frac{3(1+w)}{1+3w} ct_0 \left(\frac{t}{t_0}\right) = \frac{2c}{H_0(1+3w)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3(1+w)}{2}} \quad \text{dato che } t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} \end{aligned}$$

Vedo che $d_H(t) \propto ct$; se $w = 0$ $d_H(t) = 3ct$; se $w = 1/3$ $d_H(t) = 2ct$.

Sempre nel medesimo modello consideriamo invece il raggio di Hubble R_H , definito come la distanza propria alla quale la velocità di recessione è pari alla velocità della luce. Dalla legge di Hubble si ha:

$$c = \dot{a} R_H(t) \quad \Rightarrow \quad R_H(t) \equiv \frac{c}{H(t)} = \frac{c \cdot 3(1+w)t}{2} = \frac{1+3w}{2} d_H(t)$$

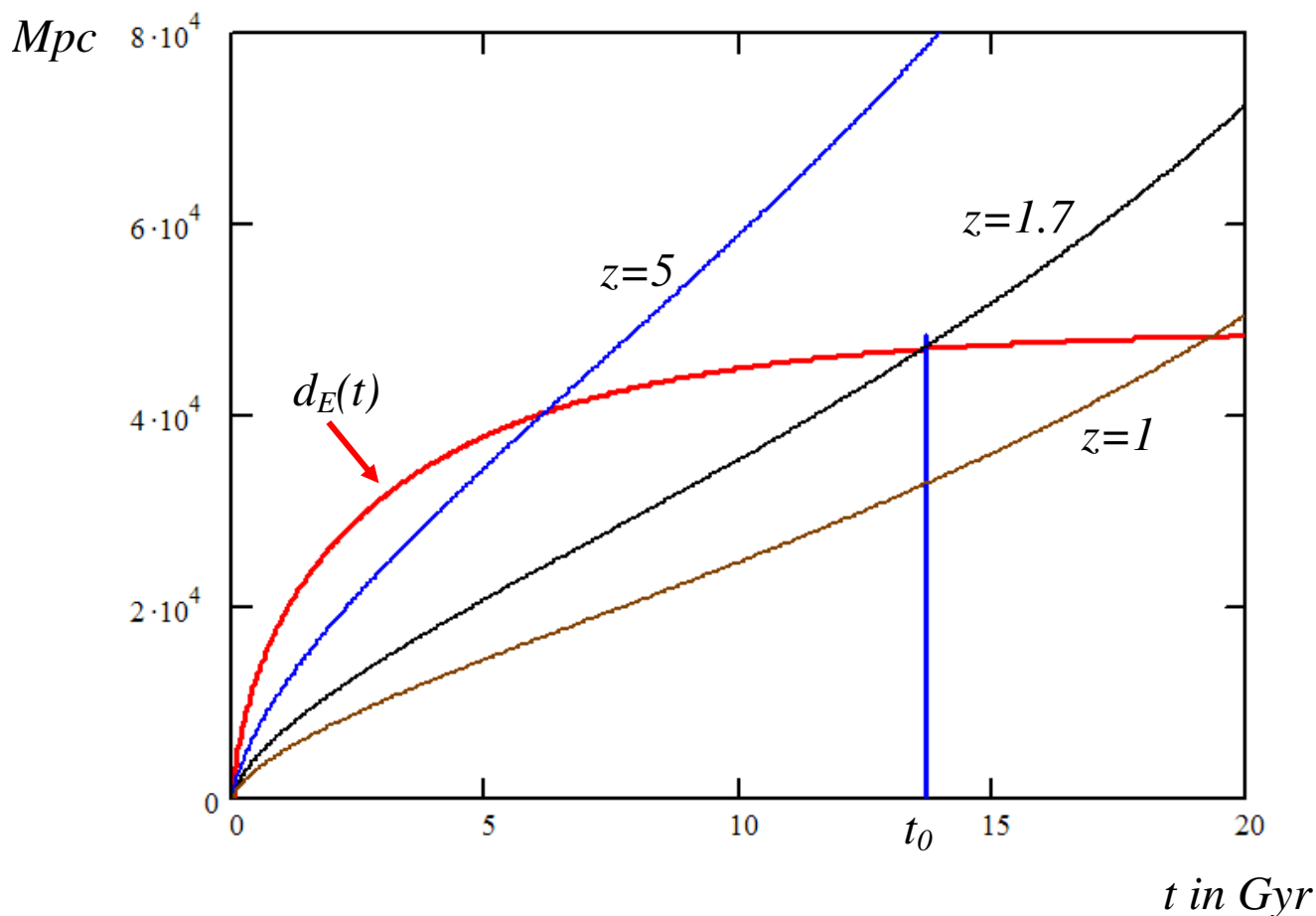
Anche se R_H e d_H appaiono, nel modello EdS, confrontabili, in realtà sono di natura due cose molto diverse: $R_H(t)$ è una quantità istantanea, dipendente dal valore istantaneo di H , mentre $d_H(t)$ è una quantità integrale, dipendente da tutta la storia passata dall'universo. Per questo motivo, se un oggetto è entrato nell'orizzonte vi resterà per sempre, mentre può succedere che in fasi successive un oggetto sia, ad esempio, prima dentro, poi fuori, poi nuovamente dentro il raggio di Hubble. Se $H = cost$ (come nel modello di de Sitter), $R = cost = c/H$.

Nei modelli con una fase inflattiva d_H risulta in realtà molto maggiore di R_H .

Il modello di Milne, con $a(t)=ct$, non ha orizzonte delle particelle ($d_H \rightarrow \infty$).

Abbiamo già visto che il modello in espansione esponenziale (con $H=cost$) di *de Sitter* ha un **orizzonte degli eventi** $d_E=c/H=R_H=cost$. Cosa accade nel modello che pare rappresentare il nostro universo ($\Omega_M + \Omega_A = 1$)? Se vediamo l'andamento di $d_E(t)$, esso tende asintoticamente ad un valore costante (l'universo tende ad un modello di *de Sitter*).

Orizzonte degli eventi e distanze proprie



Se si traccia poi l'andamento della distanza propria $d_{pr}(t)$ per oggetti che oggi presentano un redshift z , trovo che oggetti che oggi hanno $z \approx 1.7$ stanno uscendo da d_E , per cui non conosceremo mai che ne sarà di loro! Come detto più sopra, li vedremo sempre, con redshift crescente, ma i fotoni che partono oggi da loro non ci raggiungeranno mai. Oggetti che oggi hanno $z=5$ sono usciti da d_E a $t \approx 6.2 \text{ Gyr}$; il *CMB*, oggi a $z \approx 1100$, è uscito da d_E a $t \approx 0.6 \text{ Gyr}$. Vediamo quindi che la presenza di una costante cosmologica fa sentire i suoi effetti anche su eventi lontani nel passato, non solo su quelli recenti e futuri.

Caveat: Il raggio di Hubble rappresenta la zona di spazio entro la quale è possibile scambiare informazioni; è una scala molto importante per l'evoluzione delle perturbazioni che hanno dato origine alle strutture oggi presenti nell'universo. Poichè gli studi teorici che spiegano queste strutture sono iniziati quando ancora non si parlava dell'inflazione, e nei modelli di *EdS* raggio di Hubble ed orizzonte (delle particelle) in pratica coincidono, è invalso l'uso improprio del termine orizzonte per indicare R_H . Prima dell'inflazione questo non cambiava molto le cose, ma nei modelli con fase inflattiva la differenza è notevolissima! Ciononostante si tende spesso ad usare ancora il termine *orizzonte* per indicare il raggio di Hubble.

Equazione del moto di un fotone che viaggia verso di noi:

$$a \, dr / \sqrt{1 - kr^2} = -c \, dt = -c \frac{da}{a} = -c \frac{d\tau}{aH}$$

$$\frac{a \, dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = - \frac{c \, da}{aH}$$

$$da = - \frac{a}{(1+z)^2} dz$$

$$a = a_0 / (1+z)$$

$$\frac{a_0}{1+z} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = + \frac{c (1+z)}{a_0 H} \cdot \left(+ \frac{a_0}{(1+z)^2} \right) dz$$

da cui

$$\boxed{\frac{a_0 \, dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{c}{H(z)} \, dz}$$

$r(z)$

Una grandezza fondamentale, come vedremo, per il confronto tra modelli cosmologici ed osservazioni è la coordinata co-movente radiale r . In particolare, è essenziale la sua dipendenza dal redshift z .

Abbiamo visto la relazione

$$\frac{a_0 dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{c}{H(z)} dz$$

con $H(z) \equiv H_0 E(z)$,

$$E(z) = \left[\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_0)(1+z)^2 \right]^{1/2}$$

come anche:

$$f_k(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = \begin{cases} \arcsin(r) & (k=+1) \\ r & (k=0) \\ \operatorname{arcsinh}(r) & (k=-1) \end{cases}$$

Se ricordiamo che

$$\frac{kc^2}{a_0^2} = H_0^2 (\Omega_0 - 1)$$

si ottiene, definendo la funzione $\operatorname{sinn}(x)$, la seguente relazione per $a_0 r(z)$:

$$a_0 r(z) = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_0 - 1|}} \operatorname{sinn} \left[\sqrt{|\Omega_0 - 1|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]$$

dove $\operatorname{sinn}(x) = \sin(x)$ per $\Omega_0 > 1 (k = +1)$ e $\operatorname{sinn}(x) = \sinh(x)$ per $\Omega_0 < 1 (k = -1)$, mentre, nel caso $\Omega_0 = 1 (k = 0)$ si ha più semplicemente,

$$a_0 r(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

Per $z < z_{eq}$ possiamo trascurare il contributo di Ω_R e

$$E(z) = \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_M z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{1/2}$$

mentre se $\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$,

$$E(z) = \left[1 - \Omega_M + \Omega_M (1+z)^3 \right]^{1/2}$$

Non ci sono espressioni analitiche per $a_0 r(z)$ nel caso generale. Nei modelli dominati da materia ($\Omega_\Lambda = 0$) si ottiene invece la seguente *formula di Mattig*:

$$a_0 r(z) = \frac{2c}{H_0} \frac{\Omega_M z + (\Omega_M - 2) \left[(1 + \Omega_M z)^{1/2} - 1 \right]}{\Omega_M^2 (1+z)}$$

che vale sia per $\Omega_M > 1$ che per $\Omega_M < 1$.

Questa relazione, per $z \rightarrow \infty$, fornisce ($\Omega_\Lambda = 0$):

$$a_0 r(z) \cong \frac{2c}{H_0 \Omega_M}$$

Nel caso, invece, in cui sia $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ si ha:

$$a_0 r(z) \cong \frac{2c}{H_0 \Omega_M^{0.4}}$$

Per valori piccoli di z si può usare lo sviluppo in serie

$$a_0 r(z) \approx \frac{c}{H_0} \left(z - \frac{1+q_0}{2} z^2 + \dots \right)$$

DISTANZA DI LUMINOSITA'

Il **flusso bolometric** (integrale) F_{bol} che ci arriva da una sorgente di luminosità L , ad un redshift z , con coordinata radiale r ,

$$F_{bol} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 r^2}$$

dove il termine $4\pi a_0^2 r^2$ rappresenta l'area della sfera centrata sulla sorgente e sulla quale noi ci troviamo, mentre il fattore $(1+z)^2$ deriva dal redshift subito dai fotoni e dal loro tasso di arrivo.

Se vogliamo usare una relazione analoga a quella euclidea, definiamo la **distanza di luminosità d_L**

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F_{bol}} \right)^{1/2} = a_0 r (1+z)$$

VELOCITA' DI RECESSIONE

$$\beta = v/c$$

$$\beta_{\text{rel}}(z) := \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \quad \leftarrow \text{Effetto Doppler relativistico} \rightarrow \quad 1+z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Parametri cosmologici:

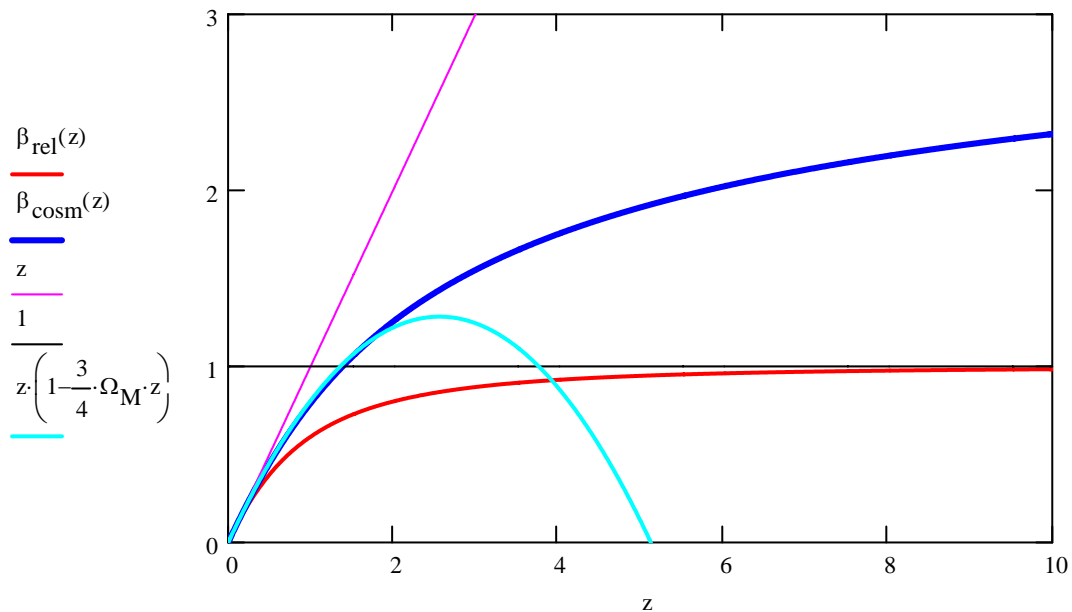
$$\Omega_M := 0.26 \quad \Omega_\Lambda := 0.74 \quad h := 0.7 \quad \Omega_0 := \Omega_M + \Omega_\Lambda \quad \Omega_0 = 1$$

$$v = H_0 d_{\text{pr}} = H_0 a_0 f_k(r) = H_0 \int_0^{r(z)} \frac{a_0}{\sqrt{1 - kr^2}} dr = H_0 \int_0^z \frac{c}{H(z)} dz = c \int_0^z \frac{1}{E(x)} dx$$

$$H(z) = H_0 E(z)$$

$$\beta_{\text{cosm}}(z) := \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M \cdot (1+x)^3 + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_0) \cdot (1+x)^2}} dx \quad \beta_{\text{cosm}}(1.39) = 1$$

Universo piatto



$$\frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_M + \Omega_M \cdot (1+x)^3}} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{-3}{2} \cdot \Omega_M \cdot x + \left(\frac{-3}{2} \cdot \Omega_M + \frac{27}{8} \cdot \Omega_M^2 \right) \cdot x^2 + O(x^3)$$

$$\int_0^z 1 + \frac{-3}{2} \cdot \Omega_M \cdot x + \left(\frac{-3}{2} \cdot \Omega_M + \frac{27}{8} \cdot \Omega_M^2 \right) \cdot x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \beta_{\text{cosm}}(z) \sim z \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \Omega_M \cdot z + \dots \right)$$

Test osservativi dei modelli cosmologici

(0552)

Abbiamo definito $q_0 \equiv - \frac{\ddot{a}(t_0) a_0}{\dot{a}(t_0)^2}$ e, usando $H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a_0}$

abbiamo visto che $a(t)$ si può esprimere, per t vicino a t_0 , come

$$a(t) \approx a_0 \left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right]$$

usando il redshift z vale che $1+z = \frac{a_0}{a(t)}$ sarà

$$1+z = \left[1 + \dots \right]^{-1}$$

$$(1+x)^{-1} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots$$

$$\approx 1 - H_0(t-t_0) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots + \frac{-1(-1-1)}{2} \left[H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right]$$

da cui

$$z \approx H_0(t_0-t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0-t)^2 + \dots$$

(t_0-t) è il look-back time

→ (0552 bis)

questa può essere invertita fornendo

$$t_0-t \approx \frac{z}{H_0} - \frac{\left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2}{H_0^3} z^2 \approx \frac{z}{H_0} \left[1 - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z + \dots \right]$$

Per trovare r in funzione di z , usiamo la relazione

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \approx r + \frac{k}{6} r^3 + \dots$$

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} \frac{a_0}{a_0} = \frac{c}{a_0} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')/a_0} \approx \frac{c}{a_0} \int_t^{t_0} \left\{ 1 - H_0(t'-t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t'-t_0)^2 + \dots \right\} dt'$$

$$\approx \frac{c}{a_0} \left[(t_0-t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0-t)^2 + \dots \right]$$

per cui [trascurando i termini $O(r^3)$]

$$r \approx \frac{c}{a_0} \left[(t_0-t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0-t)^2 + \dots \right]$$

INVERSIONE DI SERIE

DSS 4 bs

dato: $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$

cerco $x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots + A_m y^m + \dots$

Sostituisco la seconda nella prima:

$$y = a_1 (A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots) + a_2 (A_1^2 y^2 + 2A_1 A_2 y^3 + A_2^2 y^4 + A_3 y^6 + \dots) + a_3 (A_1^3 y^3 + \dots$$

i coefficienti delle varie potenze di y danno:

$$a_1 A_1 = 1 \rightarrow \boxed{A_1 = 1/a_1}$$

$$a_1 A_2 + a_2 A_1^2 = 0 \rightarrow \boxed{A_2 = -\frac{a_2}{a_1} A_1^2 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{1}{a_1^2} = -\frac{a_2}{a_1^3}}$$

$$a_1 A_3 + 2a_2 A_1 A_2 + a_3 A_1^3 = 0$$

$$\rightarrow A_3 = -\frac{2a_2}{a_1} A_1 A_2 - \frac{a_3}{a_1} A_1^3 = +\frac{2a_2}{a_1} \frac{1}{a_1} \left(-\frac{a_2}{a_1^3}\right) - \frac{a_3}{a_1} \frac{1}{a_1^3} =$$

$$\boxed{A_3 = \frac{2a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4} = \frac{1}{a_1^5} [2a_2^2 - a_3 a_1]}$$

...

$$\boxed{x(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \frac{1}{a_1^5} [2a_2^2 - a_3 a_1] y^3 + \dots}$$

Sostituendo l'espressione già trovata per $t_0 + t$ (ossia $\cos 2$) in funzione di r si ha

$$r \approx \frac{c}{a_0} \left[\frac{z}{H_0} - \frac{z^2}{H_0} \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) + \dots + \frac{1}{2} \frac{z^2}{H_0^2} \left(1 + \dots\right)^2 \dots \right]$$

ossia

$$\bullet \left| r \approx \frac{c}{a_0 H_0} \left[\frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} \left(\frac{2+q_0-1}{(1+q_0)} \right) + \dots \right] \right| \quad \begin{matrix} -\frac{z^2}{H_0} \left(1 + \frac{q_0}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ +1 + \frac{q_0}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{2-1+q_0}{2} \end{matrix}$$

È interessante anche vedere come varia il volume entro una certa distanza propria d .

Dalla metrica RW, l'elemento di volume dV risulta essere

$$dV = a^3 \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$$

e quindi

$$V = a^3 \int_0^r \frac{r' dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 4\pi a^3 \int_0^r \frac{r'^2 dr'}{\sqrt{1-kr'^2}}$$

Se $r' \ll 1$, $(1-kr'^2)^{-1/2} \sim 1 + \frac{1}{2} kr'^2 + O(r'^4)$

$$V \approx 4\pi a^3 \int_0^r r'^2 \left(1 + \frac{1}{2} kr'^2 + \dots\right) dr' =$$

$$\approx 4\pi a^3 \left[\frac{r^3}{3} + \frac{1}{2} k \frac{r^5}{5} + O(r^7) \right]$$

ossia

$$\left| V(r) \approx \frac{4\pi}{3} r^3 a^3 \left[1 + \frac{3}{10} kr^2 + O(r^4) \right] \right|$$

per passare da r a d osservando che $d = a \cdot f(r)$

$$\frac{d}{a} \approx r + \frac{k}{6} r^3 + \dots \quad \text{invertendo la serie si ha}$$

$$r \approx \frac{d}{a} - \frac{k}{6} \left(\frac{d}{a}\right)^3 + \dots$$

$$r^3 \approx \left(\frac{d}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left[-\frac{k}{6}\left(\frac{d}{2}\right)^3\right] + 3\left(\frac{d}{2}\right) \left[\frac{k^2}{6^2}\left(\frac{d}{2}\right)^6\right] + \dots \quad \text{OSS 3}$$

$$r^3 \approx \left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \dots$$

$$V \approx \frac{4}{3}\pi d^3 \left[\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \dots \right] \left[1 + \frac{3}{10}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \dots \right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi d^3 \left[\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{k}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \frac{3}{10}k\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \dots \right] = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{k}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^4 + \dots$$

$$k \cdot \frac{3-5}{10} = -\frac{1}{5}k$$

Cioè

$$V(d) \approx \frac{4}{3}\pi d^3 \left[1 - \frac{1}{5}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

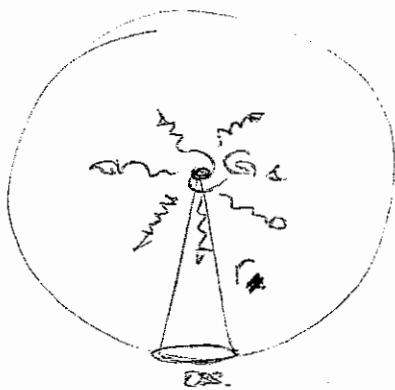
- Vedo che, se $k=+1$ il volume è più piccolo che nel caso euclideo, e il contrario nel caso $k=-1$.
- ▣ Abbiamo visto la definizione di distanza propria; questo però non è direttamente misurabile: quello che noi ricaviamo è l'informazione che viaggia lungo il cono luce della sorgente a noi. Si possono però definire altre tipi di distanza che sono, almeno in principio, misurabili direttamente. Vedremo, in particolare, la distanza di luminosità d_L e la distanza di diametro angolare d_A .
- Supponiamo che L sia l'energia totale emessa nell'intervallo di tempo (cioè la luminosità bolometrica) dalla galassia G_1 all'epoca t_1 , quando la luce fu emessa per giungere a noi in t_0 . Per tener conto del fatto che la luce emessa ha una lunghezza d'onda λ , esprimiamo l'energia emessa da G_1 per unità di tempo tra λ e $\lambda+d\lambda$ come

$$dL = L \cdot \varphi(\lambda) d\lambda$$

- con $\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = 1$. Ricordiamoci che se usiamo l'oss4
 la frequenza ν , essendo $\lambda \nu = c \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow |d\nu| = \left| \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \right|$
 delle $\varphi(\lambda) d\lambda = \tilde{\varphi}(\nu) d\nu = \tilde{\varphi}(\nu) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$ segue

$$\tilde{\varphi}(\nu) = \frac{\lambda^2}{c} \varphi(\lambda).$$

- Nel caso di emissione isotropa da G_1 , nel tempo che
 la luce impiega a raggiungere, la radiazione emessa
 sarà distribuita uniformemente su una sfera con la
 coordinata radiale r e centrata su G_1 . L'elemento di
 superficie di questa sfera, essendo
 $t = \frac{r}{c}$ e $r = ct = c \cos \theta$ (dalla me-
 trica RN sfera)



$$ds^2 = - r_0^2 d\Omega^2 = - r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

e l'elemento di superficie sarà
 $r_0^2 d\Omega = r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi = dA$

$$dA = r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

e quindi $A = r_0^2 \int \sin \theta d\theta \int d\varphi = 4\pi r_0^2$

- Vogliamo conoscere quanta energia arriva nell'unità di
 tempo, perpendicolarmente alle linee di vista, sull'unità di
 superficie e nella banda $d\lambda_0$ a λ_0 . Questo è
 il flusso $F(\lambda_0)$ per l'ampiezza delle bande: $d\lambda_0$.

$$F(\lambda_0) = d\lambda_0$$

- A causa del redshift, la luce che arriva nel range
 $[\lambda_0, \lambda_0 + d\lambda_0]$ proviene, lasciata da G_1 , dal range

$$\left[\frac{\lambda_0}{1+z}, \frac{\lambda_0 + d\lambda_0}{1+z} \right]$$

- l'energia emessa da G_1 tra t_1 e $t_1 + dt_1$ in
 questo intervallo spettrale è

$$L \varphi\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot \frac{d\lambda_0}{1+z} \cdot dt_1$$

- Quanti fotoni possiedono questa energia? Se $d\lambda_0$ è piccola, possiamo assumere che tutti i fotoni avranno, alla emissione l.o.d. $\lambda_0/(1+z)$, frequenza $\frac{c}{\lambda_0(1+z)}$ e quindi una energia $\frac{hc(1+z)}{\lambda_0}$; il n° di fotoni dN è quindi:

$$\begin{aligned} dN &= L \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot \frac{d\lambda_0}{1+z} \cdot dt_1 \cdot \frac{d\lambda_0}{hc(1+z)} = \\ &= \frac{L d\lambda_0}{c h} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot d\lambda_0 \cdot dt_1 \end{aligned}$$

- Alla ricezione ($t=t_0$) questi fotoni sono distribuiti nella area $4\pi r_1^2 \lambda_0^2$ e sono ricevuti tra t_0 e $t_0 + dt_0$; il n° di fotoni ricevuti per unità di area \perp alla linea di vista e per unità di tempo sarà quindi:

$$\frac{L d\lambda_0}{c h} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot d\lambda_0 \cdot \frac{dt_1}{dt_0} \cdot \frac{1}{4\pi r_1^2 \lambda_0^2}$$

- Ad ogni emettitore ogni fotone, della frequenza $\frac{c}{\lambda_0(1+z)}$ è passato a $\rho(\lambda_0)$ e quindi ha energia hc/λ_0 . Se moltiplichiamo l'espressione del n° di fotoni per questa energia otteniamo il flusso cercato

$$F(\lambda_0) d\lambda_0 = L \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot \frac{dt_1}{dt_0} \cdot \frac{1}{4\pi r_1^2 \lambda_0^2} \cdot d\lambda_0$$

- Così come le frequenze ν_1 e ν_0 risentono dell'espansione, così anche i tempi dt_1 e dt_0 , per cui

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = 1+z = \frac{dt_0}{dt_1}$$

per cui alla fine:

$$F(\lambda_0) = \frac{L \rho\left[\frac{\lambda_0}{1+z}\right]}{(1+z)^3 4\pi r_1^2 \lambda_0^2}$$

- Se vogliamo passare alle frequenze, sarà, arguendo dalla sopra,

$$\tilde{F}(\nu_0) = \frac{d\lambda_0}{c} F(\lambda_0) = (1+z)^2 \frac{1}{c} F(\lambda_0) = \frac{L \cdot \frac{\lambda_0^2}{c} \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right)}{(1+z) 4\pi r_1^2 \lambda_0^2} = \rho\left[\frac{\lambda_0}{1+z}\right]$$

Se integriamo $F(z)$ su tutto il perimetro definito (0556)

$$F_{bol} = \int_0^{\infty} F(z_0) dz_0 = \frac{L}{(1+z)^3 4\pi r_0^2} \int_0^{\infty} q\left(\frac{dz_0}{1+z}\right) \frac{dz_0}{(1+z)} \quad (1+z)$$

$\equiv 1$ per definizione

e quindi

$$F_{bol} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi r_0^2} \quad \text{flusso bolometrico}$$

- Nella sfera euclidea avremmo (d sia la distanza dalla Sorgente)

$$F_{bol} = \frac{L}{4\pi d^2} \rightarrow d = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}$$

Definiamo la distanza di luminosità d_L allo stesso modo, per preservare la forma di questa relazione:

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2} = \frac{r_0 \alpha_0 (1+z)}{2} = \frac{r_0 \alpha_0^2}{2} \quad \text{(cancelato)}$$

• ~~Medesima che $d_L = r_0 \alpha_0 (1+z)$~~

• Dalla relazione tra r e z abbiamo:

$$d_L = \alpha_0 r_0 (1+z) \approx \frac{c}{H_0} \left[z - \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots \right] (1+z) \approx$$

$$\approx \frac{c}{H_0} \left[z - \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots + z^2 + \dots \right]$$

$$d_L \approx \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots \right] \neq \frac{cz}{H_0} \left[1 + \frac{1-q_0}{2} z + \dots \right]$$

• Possiamo esprimere il flusso F_{bol} come

$$F_{bol} = \frac{L}{4\pi d_L^2} \approx \frac{L H_0^2}{4\pi c^2 z^2} \left[1 - (1-q_0) z + \dots \right]$$

• Ricordiamo la formula geometrica che lega la magnitudine apparente m con quella assoluta M

$m - M = 5 \log d - 5$ ($m - M =$ modulo di distanza)
 d espressa in parsec. Se $l =$ approssimazione alla d
 o $l =$ approssimazione

$$m_{bol} - M_{bol} = -5 + 5 \log \left[\frac{Cz}{H_0} \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z + \dots \right) \right] pc$$

$$[\] = \frac{3 \cdot 10^{10} z \cdot 3 \cdot 10^{17} s}{3 \cdot 10^{18} cm} (1 + \dots) = \frac{3 \cdot 10^9}{h} z [1 + \dots] pc$$

da cui finalmente

$$m_{bol} - M_{bol} = \frac{-5 + 5 \log(3 \cdot 10^9)}{42.39} - 5 \log h + 5 \log z + 5 \log \left[1 + \frac{1-q_0}{2} z + \dots \right]$$

da cui:

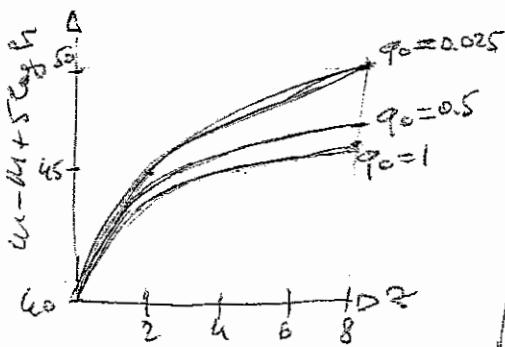
$$\log \left(\frac{1+z}{1} \right) = \log \frac{1+z}{1} = e^{-\ln(1+z)} \approx 1.343 \cdot x \approx 0.4343 \cdot \frac{1-q_0}{2} z$$

$$m_{bol} - M_{bol} = 42.39 - 5 \log h + 5 \log z + 1.086(1-q_0) \cdot z + \dots$$

La formula esatta, per $1 \geq 0$, è

$$m_{bol} - M_{bol} + 5 \log h = 42.39 + 5 \log \left\{ \frac{q_0 z + (q_0 - 1) \left[(1 + 2q_0 z)^{1/2} - 1 \right]}{q_0 z} \right\}$$

l'approssimazione è valida per $z \ll 1/d_L = \frac{c}{H_0} \frac{q_0 z + (q_0 - 1) \left[(1 + 2q_0 z)^{1/2} - 1 \right]}{q_0 z}$

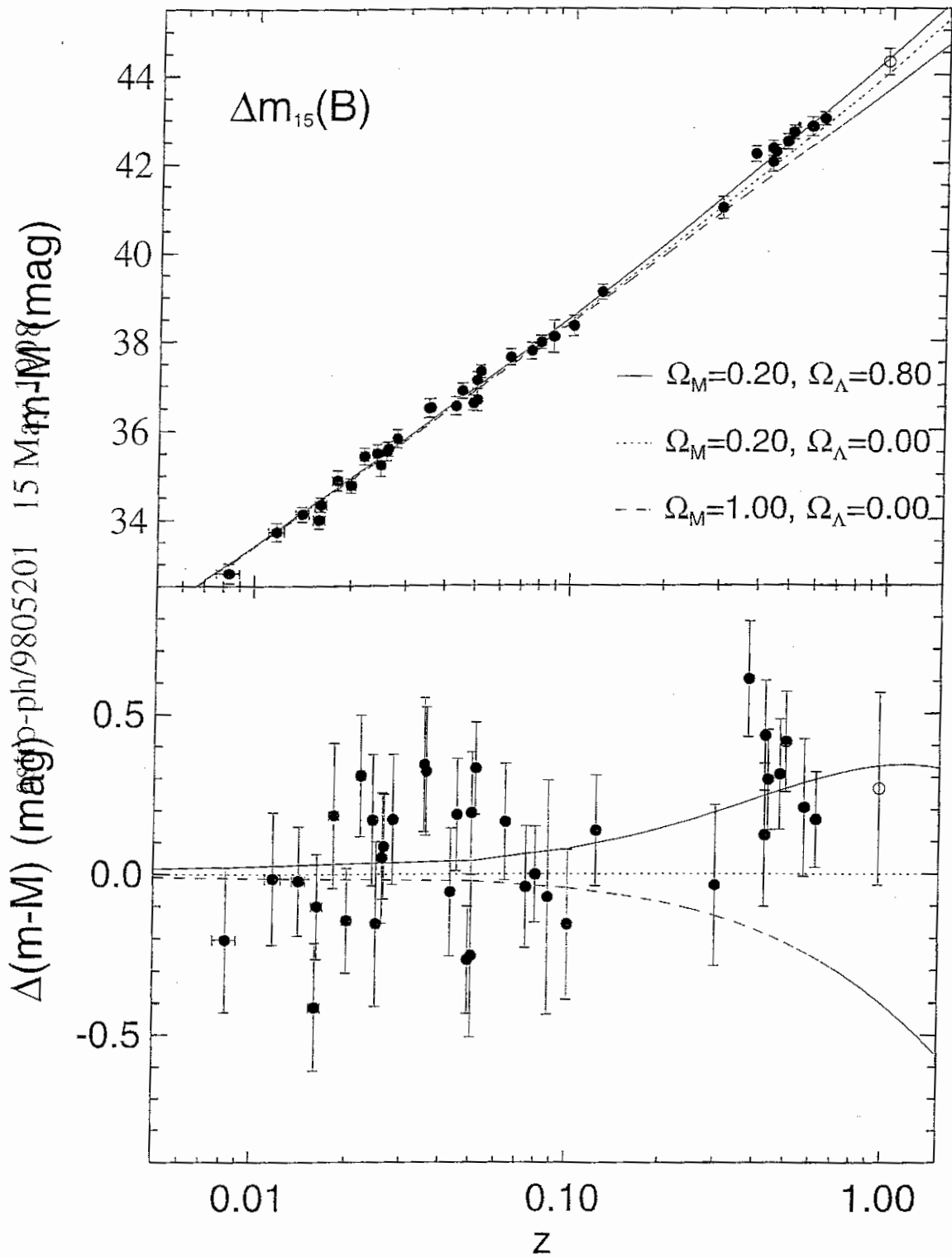


Vediamo che da queste curve sarebbe, in linea di principio, possibile determinare sia H_0 (tramite h) che q_0 , leggendo z (osservato dallo spettro) con un (misurato), purché si conosca M per una classe di

oggetti che possano essere considerati come candele standard (ovvero cioè una minima dispersione nel valore di M). Ad esempio la luminosità di un ammasso di galassie o della galassia più luminosa di un ammasso. Il diagramma $m - z$ è il cosiddetto diagramma di Hubble.

SN Ia

diagramma di Hubble



$L(t) \propto t^{-\frac{\alpha-x}{\alpha-1}}$ che, per $\alpha = 4/5$ fornisce
 $L(t) \propto t^{-(1.3-0.3x)} \approx t^{-1}$ (se $x \approx 1$)

Vedo quindi che, se considero invece $L(t) = \text{cost.}$, sotto-
 stimo la luminosità degli oggetti lontani e l'effetto della
~~redshift~~ ~~simula~~ un valore di q_0 maggiore del reale.

• Correzione K In generale uno non può misurare
 le magnitudini bolometriche delle galassie, ma lavora
 in una ristretta banda spettrale. Allora, poiché il
 redshift distorce, con il fattore $(1+z)$, lo spettro osser-
 vato di una sorgente, accade che quando io osservo nel
 visibile, ad esempio, vedo la radiazione emessa nello
 UV, in una banda spettrale che è $\frac{1}{1+z}$ di quella che sto
 usando io. Dovrò allora usare la

$$F(\lambda_0) = \frac{L \cdot \phi(\lambda_0)}{4\pi d^2} = \frac{\phi(\frac{\lambda_0}{1+z})}{(1+z) \cdot \phi(\lambda_0)}$$

dove $\phi(\lambda)$ è l'energia (frequenza) emessa dalla sorgente
 alle $\lambda = \lambda_0$. (= non a $\lambda/(1+z)$), che posso misurare su
 oggetti vicini. Allora

Se la
 luminosità
 intrinseca
 non varia
 col tempo

$$m(\lambda_0) = -2.5 \log \frac{L \cdot \phi(\lambda_0)}{4\pi d^2} = -2.5 \log \left[\frac{\phi(\frac{\lambda_0}{1+z})}{(1+z) \cdot \phi(\lambda_0)} \right] + \text{cost}$$

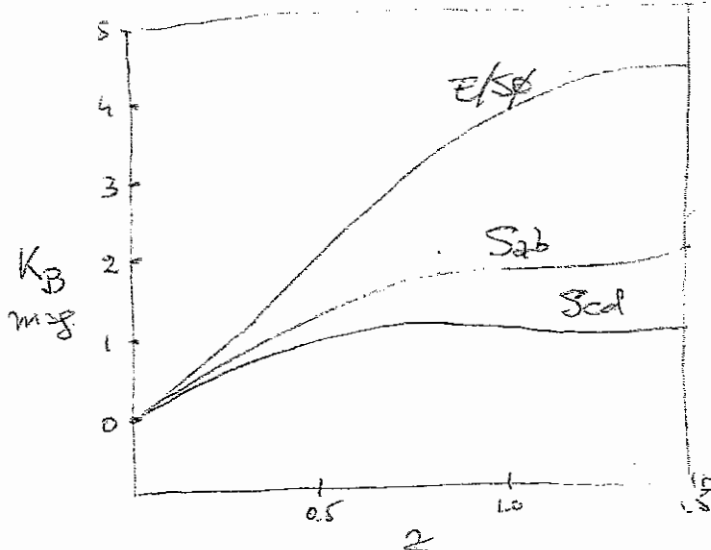
$$M(\lambda_0) = -2.5 \log \frac{L \cdot \phi(\lambda_0)}{4\pi d_L^2} + \text{cost.}$$

per cui $[M(\lambda_0)$ è la mag. assoluta della sorgente non redshiftata]

$$m(\lambda_0) - M(\lambda_0) = -5 + 5 \log d_L(\text{pc}) + K(\lambda_0)$$

per cui erro

$$m(\lambda_0) - M(\lambda_0) + 5 \log d_L - K(\lambda_0) = 42.39 + 5 \log z + 1.086(1-q_0)z + \dots$$



La correzione nella banda B (A vicina) mostra che questa è forte, per z ~ 1, soprattutto per E/SF, anche in queste (4000 Å → 2200 Å) e l'UV è debole rispetto al B per la mancanza di stelle giovani e calde

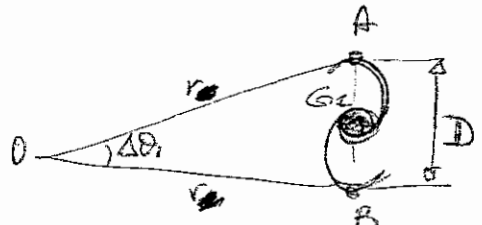
rispetto alle galassie spirali. Nell'IR, dove $\rho(z) \propto z^2$, la correzione è minore:

$$K_{IR} \approx -2.5 \log \frac{1}{Hz} \approx 2.5 \log(Hz) \approx 1.086 \cdot z$$

Inoltre la magnitudine IR è meno sensibile ad ogni tipo di formazione stellare improvvisa (Starburst) che si possono verificare, ad esempio per effetto dell'interazione in un'area tra due galassie.

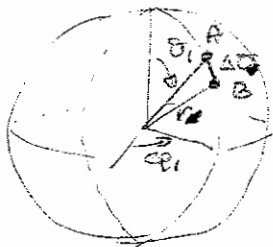
- L'effetto, largamente invariante, dell'erosione in termini di massa, rende il test $(M(z, z_0))$ incoerente. \leftarrow

Diametri angolari (α_A) [Ma SNIa !!]



Una galassia G_1 ha un diametro D . Qual è l'angolo α_A e il test da questa lunghezza vista dalla Terra?

Consideriamo due geodetiche (cioè percorsi dei raggi di luce) nulle che collegano nei casi due punti estremi di D , A e B. Possiamo scegliere A con coordinate θ_1 e φ_1 , mentre B ha coordinate $\theta_1 + \Delta\theta$, φ_1 (questo per l'isotropia dello spazio, per cui possiamo scegliere convenientemente l'asse polare $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$).



Al momento t_1 dell'emissione!
 Secondo la metrica RW, l'elemento (ossia)
 di lunghezza propria tra A e B si ottiene
 ponendo $t_1 = \text{cost}$, $r_1 = \text{cost}$ e $\varphi_1 = \text{cost}$:

$$ds^2 = -r_0^2 \dot{\varphi}_1^2 (d\varphi_1)^2 = -D^2 = -dc^2$$

per cui ~~ds~~ $d\theta = \frac{D}{r_0 \dot{\varphi}_1} = \frac{D(1+z)}{2or} \approx \frac{D}{cA}$

come definizione di distanza di diametro angolare

$\frac{d_A}{c} = \frac{2or}{1+z}$ essendo $d_L = r_0 2\alpha(1+z)$
 ho $d_A = d_L / (1+z)^2$

Riprendendo lo sviluppo in serie di z si ha

$$d_A \approx \frac{cz}{H_0} \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z + \dots \right] \cdot [1+z]^{-1} \approx \frac{cz}{H_0} \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z + \dots - z + \dots \right]$$

$$d_A \approx \frac{cz}{H_0} \left[1 - \frac{3+q_0}{2} z + \dots \right]$$

Troncando all'angolo $d\theta$, si ha ($A \approx 0$)

$$d\theta = \frac{D(1+z)}{2or} = \frac{DH_0}{c} \cdot \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1) [\sqrt{2q_0 z + 1} - 1]}$$

come caso particolare:

$$\begin{aligned} \frac{q_0 \rightarrow 0}{d\theta} &\approx \frac{DH_0}{c} \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1) \left[1 + q_0 z - \frac{1}{2} q_0^2 z^2 + \dots \right]} \\ &\approx \frac{DH_0}{c} \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + q_0 z - q_0 z + \frac{1}{2} q_0^2 z^2 + O(q_0^3)} \\ d\theta &\approx \frac{DH_0 (1+z)}{c (z + z^2/2)} \end{aligned}$$

mentre per $q = 1/2$ si ha

$$d\theta = \frac{Dh_0}{c} \frac{\frac{1}{4}(1+z)^2}{\frac{z}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{1+z}-1)} = \frac{Dh_0}{2c} \frac{(1+z)^2}{z+1-\sqrt{1+z}} =$$

$$= \frac{Dh_0}{2c} \frac{(1+z)^2}{\sqrt{1+z}[\sqrt{1+z}-1]} = \frac{Dh_0}{2c} \frac{(1+z)^{3/2}}{\sqrt{1+z}-1}$$

Per z piccolo

$$d\theta \approx \frac{D(1+z)h_0}{c z [1 - \frac{1+z_0}{2} z + \dots]} \approx \frac{Dh_0}{c z} (1+z) [1 + \frac{1+z_0}{2} z + \dots]$$

$$d\theta \approx \frac{Dh_0}{c z} [1 + \frac{3+z_0}{2} z + \dots]$$

Nel caso "nigunus" (pre relativistico) con opz a $v \ll c$, si ha semplicemente $\frac{a_0 - a_e}{a_e} = z = \frac{v}{c}$ e $v = H_0 d$ dalla espansione, per cui $c z = H_0 d$

$$d\theta = \frac{D}{d} = \frac{Dh_0}{c z} \quad d\theta \propto \frac{1}{z}$$

- Vediamo che l'angolo appare maggiore che nel caso "nigunus"
- Accenniamo molto brevemente ad un modello diverso, proposto per spiegare le redshift cosmologici senza avere però un universo in espansione: il cosiddetto modello della incestanda. In esso si assume che l'arrossamento sia da imputare ad un effetto, non ben definito, di assorbimento di energia proporzionale al cammino percorso dal fotone. In questo caso sarà $h\nu_{oss} = h\nu_{em} \cdot e^{-kd} \rightarrow \nu_{oss} = \nu_{em} e^{-kd} = \nu_{em} / (1+z)$ da cui $1+z = e^{kd}$ che, per d piccolo, sarà $1+z \approx 1+kd$; essendo poi assunto che $c z = H_0 d$,

→ ricerca k

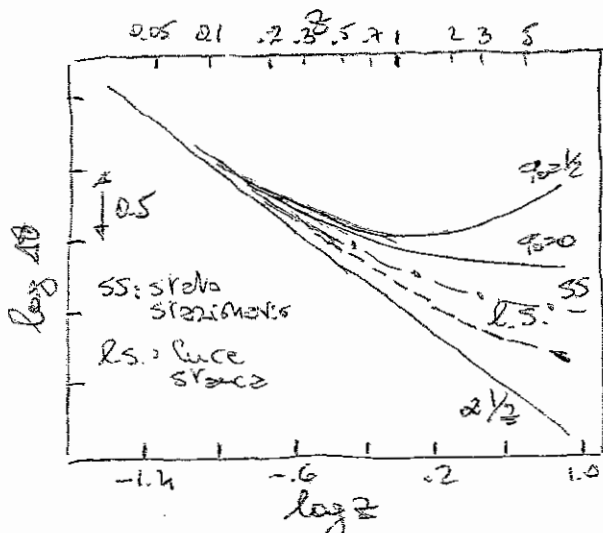
055 14

Segna che $z = \frac{D}{c} = \frac{H_0 d}{c}$ per cui si ha

$1+z = e^{\frac{H_0 d}{c}}$ | Nel caso di spazio euclideo (piatto) allora $d\theta = \frac{D}{d}$

$$\frac{H_0 d}{c} = \ln(1+z) \rightarrow \left| d\theta = \frac{DH_0}{c} = \frac{1}{\ln(1+z)} \right| \approx \frac{DH_0}{cz} \quad (z \ll 1)$$

- $\Delta\theta$ verso z presente, per $q_0 > 0$, un minimo, che per $q_0 = 1/2$ cade a $z = z_m(1/2) = 1.25$ ($q_1 = 0$)



- Il fatto che $\Delta\theta$ ~~è~~ ^{abbia} un minimo e vorrà crescere è dovuto all'espansione dell'universo. Vicini a noi, per $z \ll 1$, il ritardo con cui la luce ci arriva è poco importante ed abbiamo che tutti i modelli seguono la legge "ingenua" $\Delta\theta \sim D H_0 / cz$. Ma per

$z \gg 1$ entra in gioco il ritardo con cui la luce ci giunge dalla sorgente di cui mi surtiamo l'angolo. All'emissione questa era in realtà più vicina e quindi era vista sotto un angolo maggiore di quello sotto cui la vedremo se c fosse infinita. A questo si aggiunge l'effetto della curvatura dell'universo, che fa da luce convergente o divergente, attenuando od esaltando l'effetto.

- Tra i vari modelli riportati vi è anche quello dello Stato stazionario (steady-state), proposto da Hoyle, Bond e Gold, che si fonda sul principio cosmologico forte, secondo il quale l'universo appare sempre lo stesso non solo in diversi punti dello spazio, ma anche ad ogni istante. Questo modello è venuto a cadere con la scoperta del fondo a 3K, che implica l'esistenza di un'epoca specifica nel

passato ed è in accordo con le osservazioni del Big Bang. Così
 Il modello Λ richiede una "nuova fisica". Infatti,
 il principio cosmologico impone che la Λ di Hubble
 sia davvero tale, e non vari nel tempo. Allora

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H = \text{cost} \Rightarrow a(t) \propto e^{Ht} \quad \text{ciò abbiamo crescita esponenziale. Non esiste un Big-Bang.}$$

Ma l'espansione fa allontanare le galassie, quindi la densità media dell'universo tenderebbe a decrescere; per evitare questo si introduce la creazione di materia nello spazio intergalattico, con un tasso tale da lasciare invariato nel tempo la densità media dell'universo. Poiché $H = \text{cost}$, allora sarà

$$\boxed{q_0 = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{H\dot{a}a}{H^2 a^2} = -1} \quad \begin{array}{l} \dot{a} = Ha \\ \ddot{a} = H\dot{a} \end{array}$$

per il modello Λ .

- Il confronto con le osservazioni mostra che, per $z \leq 0.3$, usando come lunghezza e diametro angolare delle galassie θ più brillanti negli ammassi, si ottiene un buon accordo con la relazione $\theta \propto 1/z$. Per determinare i veri modelli occorre però andare a z maggiori. Sono stati usati i diametri degli ammassi di galassie (la media * della separazione angolare tra le 40 galassie più luminose entro 3 Mpc dal centro) e la separazione dei lobi radio delle radio sorgenti. Sorprendentemente, questi testi sembrano indicare un universo in cui $\theta \propto 1/z$ fino a $z \leq 2$, contro ogni logica. Vi sono probabilmente effetti di selezione (ad esempio le sorgenti radio più luminose potrebbero essere più compatte) o di evoluzione, sia per la dinamica degli ammassi che per la separazione dei radio-lobi. Nel 1953, Kellermann, misurando i diametri angolari (definiti come quel diametro al quale la brillantezza è 1/100 di quella centrale) di sorgenti radio compatte, per mezzo di tecniche VLBI, ha

this range, the isophotal diameters (to an isophote of ~ 23 mag arcsec $^{-2}$) range from ~ 250 arcsec to ~ 2 arcsec.

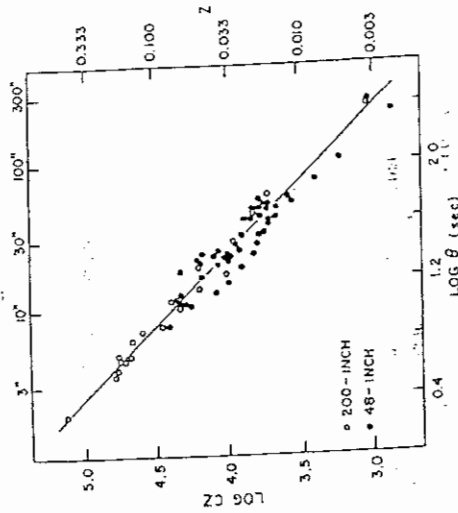


Figure 12 The observed $\theta(z)$ relation for low-redshift, first-ranked E cluster galaxies obtained by eye estimates from a homogeneous set of photographic plates. The line is the $\beta \sim z^{-1}$ Euclidean expectation (from Sandage 1972a).

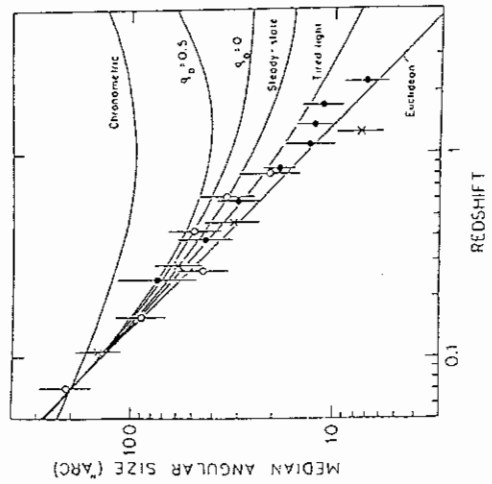


Fig. 4.4. Kapahi's (1987, his Fig. 7) data for the median angular sizes (arcsec) and redshift for his radio-source sample compared with the predictions of the standard model for various q_0 values (without evolution). The Segal "chromometric" model violates the data at all redshifts.

Adams (1979) and of Bruzual & Spirrad (1978) following the brilliant initiative of Hickson (1977a, 1977b) of using the "mean angular separations",

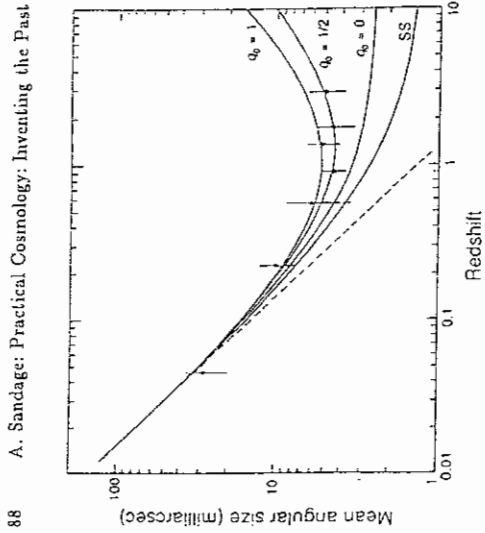


Fig. 4.9 Diagram by Kellermann (1993) of the angular size-redshift relation for compact radio sources.

where the surface brightness is a fixed fraction (1/100) of the central surface brightness. Clearly, this is a metric diameter rather than an isophotal one because of the ratio definition; each surface brightness is decreased by the Tolman $(1+z)^4$, and the ratio is invariant with z .

Figure 4.9 is Kellermann's famous diagram. If evolution of the linear size with epoch, and if the dependence of size on radio power, could both be shown to vanish using some presently unknown argument, either from a well founded theory or by experiment, the conclusion concerning the intrinsic geometry of space would be powerful from the diagram¹⁴. But again evolution and selection effects cloud the conclusion despite the extreme, almost mystical beauty of Fig. 4.9 for cosmologists, hoping for a sign that the standard model of the lens effect of space-time curvature can actually be manifest.

105515 bis

¹⁴Kellermann argues that the diameter, so defined, is very close to the central engine of the embedded radio source. Its linear diameter, referring to such a compact region of the source, is likely to be impervious to any effect of the intergalactic medium which is expected to be nearly vacuum compared to the matter density in the radio source at the positions measured by Kellermann. (The objection to Daly's method based on possible effects caused by the intergalactic medium would not apply here.) From these precepts Kellermann argues that evolutionary effects on the compact diameters, so close to the center, might be negligible.

Orizzonte Sonoro (all'epoca dell'ultimo scattering) (051)

Prima che l'universo diventi quasi neutro (epoca della ricombinazione) la velocità del suono è $c_s \approx c/\sqrt{3}$ perché i barioni sono un unico fluido con i fotoni, cui sono fortemente accoppiati.

L'orizzonte sonoro (d_s), in analogia con l'orizzonte della particella, è la distanza propria dalla quale si è ricavata una informazione di tipo acustico. Le fluttuazioni di densità dell'universo primordiale si comportano come onde sonore per buona parte del tempo fino all'epoca della ricombinazione ($z_{rec} \approx 1100$, $t_{rec} \approx 400.000$ anni). Una concentrazione di materia oscura, fotoni, barioni (e neutrini) presente nell'universo primordiale produce un fronte d'onda acustico attorno a se che produce un aumento di densità sulle scale caratteristiche dell'orizzonte sonoro; questo a sua volta favorisce la formazione di strutture (galassie) separate da una scala d_s . Dopo la ricombinazione c_s si riduce praticamente a zero rispetto al valore precedente, per cui la scala cresce in pratica solo, per effetto dell'espansione, come $1/a(t)$. Rappresenta quindi un "regolo standard" cui si possono applicare test cosmologici. [Corrisponde alle oscillazioni acustiche barioniche - BAO]

Il valore di d_s all'epoca della ricombinazione imprime una segnatura importantissima nel fondo a microonde che si genera appunto alla ricombinazione.

Quindi, in analogia con l'orizzonte delle particelle $d_H(t)$, sarà

$$d_S(t) = a(t) \int_0^t \frac{c_s dt'}{a(t')}$$

Se assumiamo per semplicità che $c_s \sim \frac{c}{\sqrt{3}}$ [questo è esatto per $z \gg 1000$ e $z_{\text{rec}} \sim 1100$ $c_s \sim 0.7 \frac{c}{\sqrt{3}}$] avremo

$$d_S(t) \approx a(t) \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad \text{che differisce da } d_H(t)$$

solo per il fattore $1/\sqrt{3}$.

Se ricordiamo che nel modello Λ CDM

$$d_H(t) = \frac{3(1+w)}{1+3w} c \cdot t$$

alle ricombinazione (in epoca dominata dalla materia)

$$\text{sarà } d_H(t_{\text{rec}}) = 3 c t_{\text{rec}} \rightarrow d_S(t_{\text{rec}}) \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 c t_{\text{rec}} = \frac{1}{\sqrt{3}} d_H(t_{\text{rec}})$$

Se ricordiamo che, sempre alle ricombinazione,

$$R_H(t_{\text{rec}}) \approx \frac{1}{2} d_H(t_{\text{rec}}) \rightarrow d_S(t_{\text{rec}}) \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 R_H(t_{\text{rec}}) \sim 1.15 R_H(t_{\text{rec}})$$

$$\text{Cioè: } \boxed{d_S(t_{\text{rec}}) \sim R_H(t_{\text{rec}})}$$

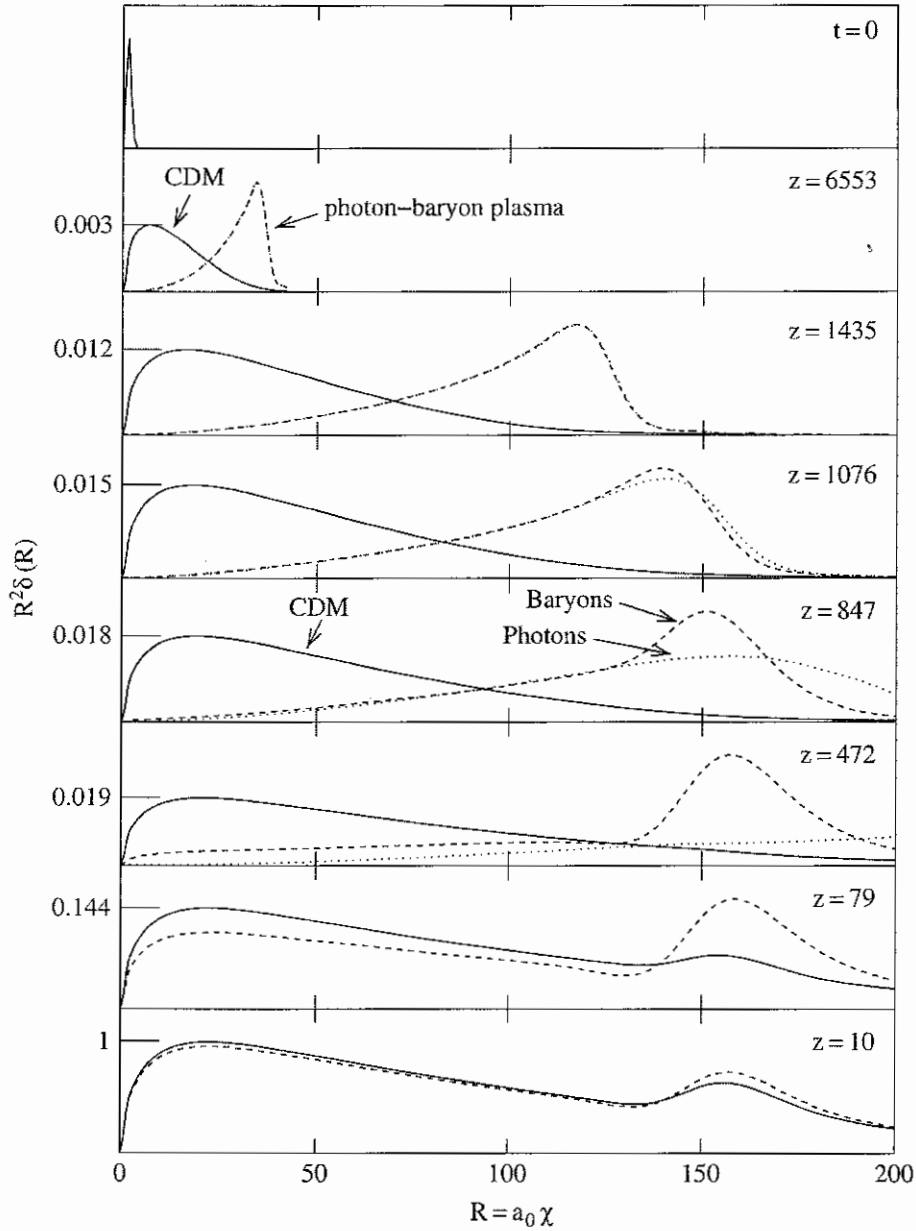
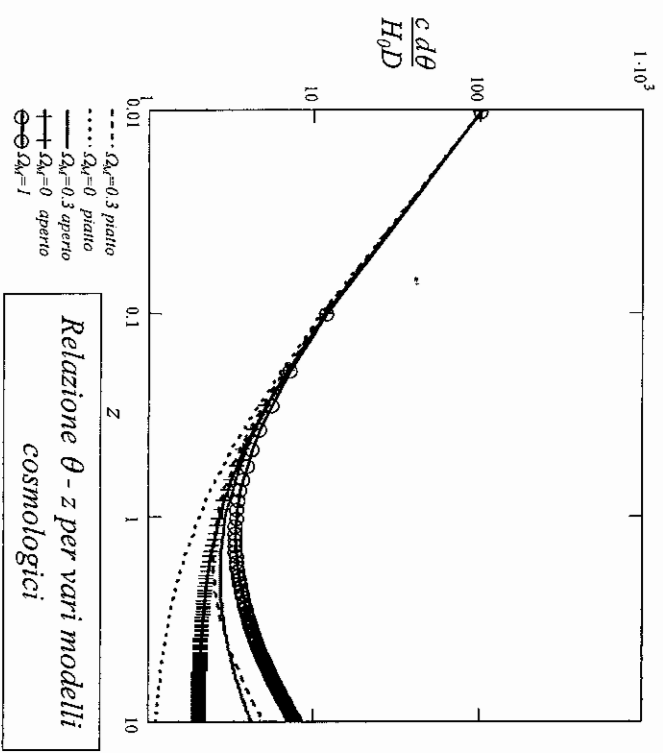


Fig. 5.5 The time development of an initial adiabatic over-density in a universe with CDM, neutrinos, baryons, and photons [152, 123]. At $t = 0$, the over-density of all components are superimposed but the pressure of the baryon-photon plasma causes it to propagate away from the origin at the speed of sound. Light neutrinos (not shown) free stream away with the speed of light. The baryons stop shortly after recombination when the baryons and photons decouple, allowing the photons to free stream away. CDM and baryons from the homogeneous reservoir will then be gravitationally attracted into the potential wells formed by the CDM at the origin and the shell of baryons. This infall of homogeneous matter will generate CDM-baryon over-densities where galaxies will preferentially form. This results in the galaxy-galaxy correlation function seen in Fig. 5.7.



In realtà questo metodo ha dato i suoi frutti applicato al CMB, usando come scala D la dimensione del cosiddetto orizzonte sonoro ($\sim R_H$), all'epoca dello ultimo scattering ($z_{ls} \approx 1100$).

Per $z \rightarrow \infty$ possiamo scrivere ($\alpha = 1$ se $\Omega_M = 0$, $\alpha \approx 0.4$ se $\Omega_M + \Omega_M = 1$) per d_A ed R_H :

$$d_A(z_{ls}) \approx \frac{2c}{H_0 \Omega_M^\alpha (1+z_{ls})}$$

$$R_H(z_{ls}) = \frac{c}{H(z_{ls})} = \frac{c}{H_0 E(z_{ls})} \approx \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z_{ls})^2}}$$

$$E(z) \approx \left[\Omega_M (1+z)^2 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_M + (1-\Omega_M)(1+z)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta_s \approx \frac{2c}{4s \Omega_M^\alpha}$$

$$d_A = \frac{2c R_H(z)}{1+z}$$

$$\theta = \frac{D}{d_A} \approx \frac{R_H(z_{ls})}{d_A(z_{ls})}$$

Otteniamo quindi

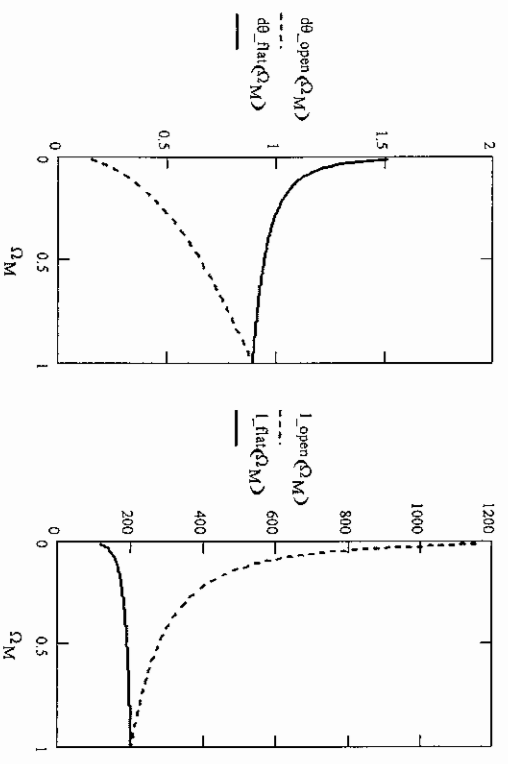
$$\theta_s = \frac{R_H(z_{ls})}{d_A(z_{ls})} \approx \frac{\Omega_M^{\alpha-1/2}}{2(1+z_{ls})^{1/2}} \approx 0.9^\circ \Omega_M^{\alpha-1/2}$$

Se usiamo invece il multipolo l_s usato nella rappresentazione dello spettro di potenza angolare del CMB, otteniamo:

$$l_s \approx \frac{\pi}{\theta_s} \approx \frac{2\pi(1+z_{ls})^{1/2}}{\Omega_M^{\alpha-1/2}} \approx \frac{200}{\Omega_M^{\alpha-1/2}}$$

Dipendenza di θ_s ed l_s da Ω_M

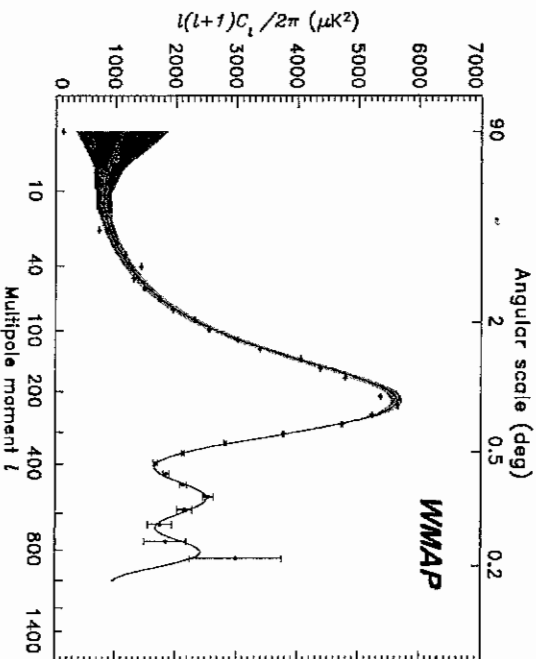
nei modelli aperto ($\Omega_M=0$) e piatto ($\Omega_M+\Omega_M=1$)



Il calcolo esatto della posizione del **first acoustic peak** porta in realtà a risultati molto simili.

la scarsa dipendenza da Ω_m nei modelli piani e come sparisca la dipendenza da H_0 .

Spettro di potenza angolare del CMB (Satellite WMAP): si noti la posizione del primo picco a $l \approx 200$.



Abbiamo visto che l'angolo corrispondente, nel CMB, ad R_H è dell'ordine del grado. Ricordiamo che nei modelli di EdS, che peraltro sono una buona approssimazione a z_{is} , $R_H \approx d_H$. Questo significa che regioni distanti ma loro qualche grado non erano mai entrate prima in contatto causale, come si spiega allora l'omogeneità e l'isotropia del CMB con l'inflazione? Questo è il cosiddetto "problema dell'orizzonte", che viene superato dai modelli inflattivi, per i quali $d_H(z_{is}) \gg R_H(z_{is})$.

CONTEGGI DI SORGENTI

Altri vincoli osservativi vengono dai conteggi di sorgenti. Il numero di sorgenti di densità propria n contenute nell'intervallo $r \rightarrow r+dr$ e nell'angolo solido $d\Omega$ sarà

$$dN = n dV = n a^3 \frac{r^2 d\Omega dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

che si può scrivere nella forma

$$\frac{dN}{d\Omega dz} = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{n(z) [a_0 r(z)]^2}{(1+z)^3 E(z)}$$

Nel caso in cui non ci sia nascita e/o morte di sorgenti, $\frac{dn}{dz} = 0$. Integrando la relazione si ottiene il numero di sorgenti entro un certo redshift, $N(<z)$; per valori piccoli di z si ha (Sempre con $M_0 = \text{cost.}$)

$$N(<z) \approx \frac{n_0 d\Omega c^3 z^3}{3H_0^3} \left[1 - \frac{3}{2}(1+q_0)z + \dots \right]$$

I conteggi effettuati con radiosorgenti e, più recentemente, con galassie, hanno evidenziato l'esistenza di un'evoluzione nelle sorgenti in numero e/o luminosità, più che fornire vincoli cosmologici.

Recentemente, stime sulla densità numerica degli ammassi di galassie hanno invece confermato le indicazioni che $\Omega_M \approx 0.3$.

• Ottenuto un risultato apparentemente bellissimo, (1953) con $q_0 \sim 1/2$, restano comunque i dubbi che anche qui effetti selettivi e/o evolutivi, abbiano forzato questo risultato.

■ Colleghi di Sargenti

• Consideriamo dapprima uno spazio euclideo ed esaminiamo come varia il numero N di oggetti con flusso maggiore di una certa soglia F (in radio-astronomia si usa indicare con S questa grandezza). Se gli oggetti avessero tutti la stessa luminosità L e fossero distribuiti uniformemente con densità m_0 , li vedremmo fino ad una distanza d_e tale che

$$S = \frac{L}{4\pi d_e^2} \rightarrow d_e = \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{1/2}$$

e quindi il loro numero sarebbe

$$N(S) = \frac{4\pi}{3} m_0 d_e^3 = \frac{4\pi}{3} m_0 \frac{L^{3/2}}{(4\pi)^{3/2}} S^{-3/2}$$

cioè

$$\boxed{\log N(S) = -3/2 \log S + \text{cost.}}$$

che la relazione $\log N - \log S$ attesa per uno spazio euclideo. Tradotta in magnitudini (essendo $m = -2.5 \log S + \text{cost.}$)

abbiamo

$$\boxed{\log N(m) = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2.5}\right) \cdot m + \text{cost.} = 0.6 m + \text{cost.}}$$

Questo, ovviamente, se non vi è assorbimento tra gli oggetti e noi.

• Queste considerazioni valgono anche nel caso in cui il tipo di oggetti considerati non abbia una L costante, ma possieda una certa funzione di luminosità (= distribuzione dei valori di L), diversa da una δ di Dirac. Cambia solo la costante, ma non la dipendenza da S e m .

Dell'elemento di volume:

$$dW = m dv = m a^3 \frac{r^2 dr d\Omega}{\sqrt{1-br^2}}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{1-br^2}} = \frac{c}{a_0 H(z)} dz$$

$$dN = m a^3 r^2 \frac{dr}{\sqrt{1-br^2}} \frac{c}{a_0 H(z)} dz$$

$$\frac{dN}{dr dt} = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{m a^3 a^2 r^2}{E(z) a_0 a_0^2} = \frac{c}{H_0} \frac{m(z) [a_0 r(z)]^2}{(1+z)^3 E(z)}$$

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}$$

Es: $m(z) = m_0 (1+z^3)$ ho uscita e ~~è~~ marte

$$\frac{dN}{dr dt} = \frac{c}{H_0} m_0 \frac{\left[\frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dx}{(1-\alpha_m + \alpha_m(1+z)^3)} \right]^2}{\left[(1+z)^3 \alpha_m + 1 - \alpha_m \right]^{1/2}}$$

flat da cui si

$$20 \quad r(z) = \frac{cz}{H_0} \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z + \dots \right)$$

$$\frac{dN}{dz} = \frac{c \, m(z) \, d\Omega \, [r(z)]^2}{H_0 E(z) (1+z)^3}$$

$m(z) = m_0 (1+z)^3$
 (conservazione del numero di serpenti)

$$\frac{dN}{dz} = \frac{c \, m_0 \, d\Omega \, [r(z)]^2}{H_0 E(z)}$$

$$= \frac{c \, m_0 \, d\Omega}{H_0} \cdot \frac{c^2 z^2}{H_0^2} [1 - (1+q_0)z + \dots] \cdot E(z)^{-1}$$

$$E(z)^{-1} = [(1+z)^2 (1 + \Omega_M z) - z(2+z)\Omega_1]^{-1/2}$$

$$\sim [(1+2z+\dots)(1 + \Omega_M z) - 2z\Omega_1]^{-1/2}$$

$$\sim [1 + 2z + \Omega_M z - 2z\Omega_1]^{-1/2}$$

$$\sim 1 - \frac{1}{2} (2z + \Omega_M z - 2z\Omega_1) \sim 1 - z - \frac{\Omega_M}{2} z + z\Omega_1 \sim$$

$$\sim 1 - z \left(1 + \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_1 \right) + \dots \sim \left\{ \begin{array}{l} M_0: q_0 = \frac{1}{2} (\Omega_M + \Omega_1) - \frac{3}{2} \Omega_1 \\ = \frac{\Omega_M}{2} + \frac{\Omega_1}{2} - \frac{3}{2} \Omega_1 = \\ = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_1 \end{array} \right.$$

$$\sim 1 - z(1+q_0) + \dots$$

$$\rightarrow \frac{dN}{dz} \sim \frac{c^3 m_0 d\Omega}{H_0^3} \frac{z^2 [1 - (1+q_0)z + \dots] [1 - (1+q_0)z + \dots]}{z^2 [1 - 2(1+q_0)z + \dots]}$$

$$\sim \frac{c^3 m_0 d\Omega}{H_0^3} [z^2 - 2(1+q_0)z^3 + \dots]$$

$$N(z) = \int_0^z \frac{dN}{dz} \cdot dz \sim \frac{c^3 m_0 d\Omega}{H_0^3} \int_0^z [z^2 - 2(1+q_0)z^3 + \dots] dz$$

$$\sim \frac{c^3 m_0 d\Omega}{H_0^3} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{2(1+q_0)}{4} z^4 + \dots \right]$$

$$\rightarrow \bar{N}(z) \approx \frac{m_0 c^3 d\Omega}{3 H_0^3} z^3 \left[1 - \frac{2}{3} (1+q_0) z + \dots \right] \quad \text{and}$$

$$N(< z) \approx \frac{4\pi n_0 c^3}{3 H_0^3} \frac{c^3 z^3}{2^3 H_0^3} \left[1 - \frac{3}{2} (1+q_0) z + \dots \right] \left[1 + \frac{3z}{10} \frac{c^2 z^2}{2^2 H_0^2} + \dots \right] \quad (19)$$

$$N(< z) \approx \frac{4\pi n_0 c^3}{3 H_0^3} z^3 \left[1 - \frac{3}{2} (1+q_0) z + \dots \right]$$

Posso passare ancora alla d_L che, per un dato z , mi dà un valore minimo di soglia del flusso F .

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2} \approx \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots \right]$$

Invertendo con il solito sistema si ha

$$z \approx \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) - \frac{1-q_0}{2} \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right)^2 + \dots \approx \frac{H_0 d_L}{c} \left[1 - \frac{1-q_0}{2} \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) + \dots \right]$$

Sostituendo nella $N(< z)$ ottengo

$$N(< d_L) \approx \frac{4\pi n_0 c^3}{3 H_0^3} \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right)^3 \left[1 - \frac{3}{2} (1+q_0) \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) + \dots \right] \left[1 - \frac{3}{2} (1+q_0) \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) + \dots \right]$$

$$N(< d_L) \approx \frac{4\pi n_0}{3} d_L^3 \left[1 - \frac{3}{2} (1+q_0) \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) + \dots - \frac{3}{2} (1+q_0) \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) + \dots \right] \left[1 - 3 \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) + \dots \right]$$

Che si può esprimere come:

$$N(> F) \approx \frac{4\pi n_0}{3} \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{3/2} \left[1 - \frac{3 H_0}{c} \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2} + \dots \right]$$

Essendo $\frac{H_0 d_L}{c} \sim z + O(z^2)$, le termine in parentesi:

$$\text{quedra } \sim \left[1 - 3z + O(z^2) \right]$$

Vedo che la relazione $N(> F)$ mi fornisce:

$$\log N(> F) \approx -\frac{3}{2} \log F + \log [1 - 3z] + \text{cost}$$

che non dipende da q_0 al primo ordine in z !
è differenza della $N(< z)$

Dalla $N(>F) \propto \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{3/2} [1-3z]$ vedo che i (53320)
 sorgenti forniscono sempre meno sorgenti che nel
 caso euclideo e senza espansione che avremmo
 considerato inizialmente. Che questo comportamento
 sia dovuto all'espansione dell'universo, e non
 alla curvatura, possiamo vederlo ^{ma con espansione} considerando il
 caso di spazio euclideo, per cui $d_{pr} = z(t) \cdot r$. Dalle
 relazioni viste prima è

$$F = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi d_{pr}^2} \rightarrow d_{pr}^2 = \frac{L}{4\pi F} \cdot (1+z)^{-2}$$

evoluente

ed il numero di oggetti entro d_{pr} sarà

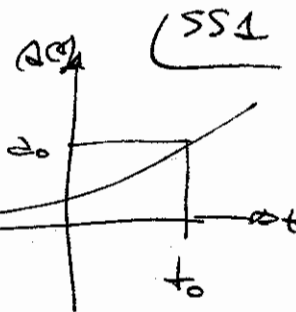
$$N \propto \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{3/2} (1+z)^{-3} \sim \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{3/2} (1-3z)$$

Vedo quindi che è il fatto che i fotoni perdono energia,
 e che il tasso di emissione è più basso (dovuto alla espansione
 dell'universo) che causa la dipendenza prevista
 per la $N(>F)$.

- Mentre la $N(<z)$ dipende da q_0 al 1° ordine in z ,
 e quindi può, in linea di principio, dare informazioni
 su q_0 , la $N(<M)$ non dipende da q_0 al
 1° ordine in z , e quindi non è utile per questo.
- Tuttavia, proprio questa insensibilità al modello cosmo-
 logico della $N(M)$ può fornire informazioni sulle
 assunzioni fatte: che il n° di oggetti si conserva ($m^3 = \text{cost}$)
 e che la luminosità L è costante (non evoluzione in
 luminosità).
- La relazione $\log N - \log S$ è stata usata dai radio-
 astronomi, a partire degli anni '60, per verificare
 i modelli cosmologici usando i dati disponibili
 di sorgenti di radio sorgenti.

Evidenza: evoluzioni in numero e/o
 in luminosità!

Stato Stazionario



$a(t)? \quad H = \text{cost.} \quad \frac{da}{dt} = H \cdot t$

$lu a = Ht + \text{cost}$

$a = A e^{Ht}$

$k = ?$ Scalare di Ricci o curvatura K

$K = \frac{G}{a^2(t)}$

ma K non può dipendere dal tempo in S.S. $\Rightarrow k=0$

$q_0 = -\frac{\ddot{a} a}{\dot{a}^2} = ?$

$\dot{a} = H a$
 $\ddot{a} = H \dot{a}$

$q = -\frac{H \dot{a} \cdot a}{H^2 a^2} = -\frac{H^2 a^2}{H^2 a^2} = -1$

$d_H = ?$ $d_H = \int_{t_i}^t \frac{c dt'}{a(t')} = A e^{Ht} \int_{t_i}^t \frac{c dt'}{A e^{Ht'}} = e^{Ht} \cdot \frac{c}{H} \int_{t_i}^t e^{-Ht'} dt'$

$d_H(t) = \frac{c}{H} e^{Ht} \cdot [e^{-Ht_i} - e^{-Ht}] = \frac{c}{H} [e^{H(t-t_i)} - 1]$

se $t_i \rightarrow -\infty$

$d_H(t) \rightarrow \infty \quad \int d_H$

$\int_{t_i}^t e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{t_i}^t = -e^{-x} + e^{-x_i}$

$d_E = ?$

$d_E(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{c dt'}{a(t')} = A e^{Ht} \int_t^\infty \frac{c dt'}{A e^{Ht'}} = \frac{c}{H} e^{Ht} [e^{-Ht} - 0] = \frac{c}{H}$
finito

$\int d_E$

$r(z) : k=0 \quad H = H_0 E(z) \text{ con } E(z) \geq 1$

$\int_0^z r(z) = \frac{c}{H} \int_0^z dz \rightarrow \int_0^z r(z) = \frac{c z}{H}$

$k=0 \quad \int_0^z r(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}$

- $\underline{dL(t)} = a_0 r(t) = \frac{c z(t)}{H}$

- $\underline{d_A(z)} = \frac{dL}{(1+z)^2} = \frac{c z}{(1+z) H}$

- $\underline{dD} = \frac{D}{d_A} = \frac{D(1+z) H}{c z}$

- $\underline{\frac{dN}{dz}} = \frac{c}{H_0} dL \cdot \frac{n(z) [a_0 r(z)]^2}{(1+z)^3 E(z)}$ $n(z) = \tilde{n}$
costante
 $E(z) = 1$

$$= \frac{c}{H_0} \frac{\tilde{n} dL}{(1+z)^3} \cdot \frac{c^2 z^2}{H_0^2} = \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \frac{\tilde{n} z^2}{(1+z)^3} dL$$

Se non c'è creazione e distruzione di materia

$$\rho a^3 = \text{cost.} = K \rightarrow \rho(t) = \frac{K}{a^3(t)} = K a^{-3}(t)$$

$$\dot{\rho} = -3 a^{-4} \cdot K \dot{a} = -3 \frac{K}{a^3} \cdot \frac{\dot{a}}{a} = -3 H \rho$$

$$\boxed{\dot{\rho} = -3 H \rho}$$

Se c'è creazione: $\dot{\rho} = -3 H \rho + \dot{\rho}_{cr}$

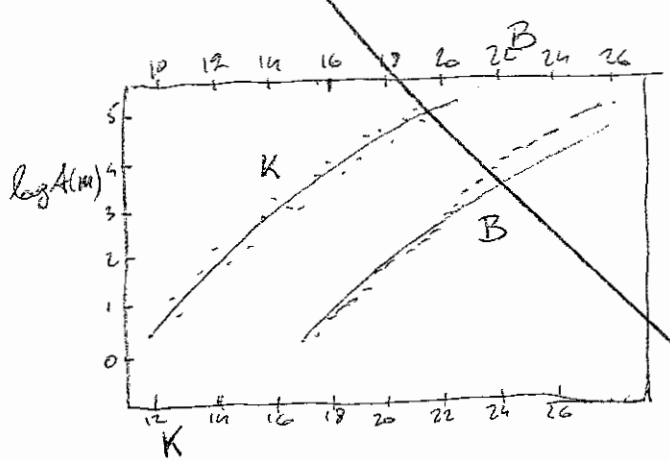
Nello S.S. $\dot{\rho} = 0 \rightarrow \dot{\rho}_{cr} - 3 H \rho = 0 \rightarrow \dot{\rho}_{cr} = 3 H \rho$

$$\dot{\rho}_{cr} = 3 H \rho_{cr} = 3 \cdot \frac{h}{3 \times 10^{17} s} \cdot 2 \times 10^{-25} h^2 g/cm^3 = 2 \times 10^{-46} h^3 g/cm^3 s^{-1}$$

$$m_H = \rho / m_H \quad m_H = 1.6 \times 10^{-24} g$$

$$\sim 4 \cdot h^3 \frac{\text{atomi di H}}{km^3 \text{ anno}} \rightarrow (h=0.7) \sim 1 \frac{\text{atomo di H}}{km^3 \cdot \text{anno}}$$

et $m \leftarrow \frac{dm}{z}$. Mentre nella banda K, nell'IR, i conteggi (OSS 27)



Sono in accordo con modelli cosmologici senza evoluzione, i conteggi nel blu mostrano un eccesso di oggetti deboli. Un confronto con i conteggi in redshift mostra che questi oggetti blu sono in buona parte

$z \leq 0.5$. Potrebbero essere galassie giovani, ricche di stelle e gas, che sono poi state inglobate in galassie più grosse; la loro presenza non sarebbe vista nell'IR, perché la loro emissione è proprio nel B ed V.

Le brillanze superficiali

Abbiamo visto che il flusso radiometrico ricevuto da una sorgente si scrive come

$$F_{bol} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 r^2}$$

mentre l'angolo $d\theta$ sotto il quale vediamo una sorgente di diametro proprio D è

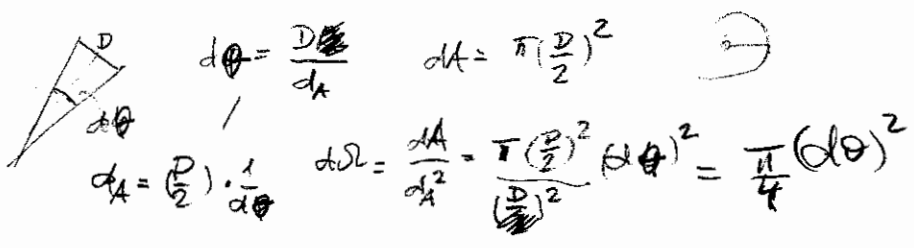
$$d\theta = \frac{D(1+z)}{2a_0 r}$$

che corrisponde ad un angolo solido $d\Omega = \frac{\pi}{4}(d\theta)^2$.

Quindi la brillantezza (intensità specifica) bolometrica della sorgente sarà

$$I_{bol} = \frac{F_{bol}}{d\Omega} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 r^2} \cdot \frac{4}{D^2 (1+z)^2 \pi} = \frac{L}{\pi D^2 (1+z)^4}$$

Vede che la brillantezza non dipende da r , né da a_0 , ma solo da $(1+z)^4$. Ricordiamo che il fattore $(1+z)$ in $d\theta$ dipende dall'espansione dell'universo. Nella formula



di F_{obs} , ricordiamo che un fattore $(1+z)$ deriva dal OSS23 rapporto dt_s/dt_o , anch'esso dovuto all'espansione, mentre un fattore $(1+z)$ viene dalla perdita di energia dei fotoni. Se questa viene ascritta al fenomeno della "linea stanca", ad esempio, e non vi è espansione, allora la I_{bol} verrebbe solo come $I_{bol}(r_s) \propto \frac{1}{1+z}$ invece che come $(1+z)^{-4}$. Quindi

la misura della I_{bol} versus $(1+z)$ può essere vista come un test sull'evoluzione dell'espansione dell'universo.

Sondage, nel 1981, dopo una attenta analisi volta ad eliminare il rischio di effetti di selezione, usando un campione di galassie più brillanti degli ammassi di galassie, ha apparentemente confermato la dipendenza $(1+z)^{-4}$, ~~che~~ ci sostegno dell'idea dell'universo in espansione.

Intensità specifica e red-shift

Riprendiamo la relazione con il flusso monocromatico formata in termini di frequenza

$$F(\nu_o) = \frac{L \varphi[\nu_o(1+z)]}{(1+z) 4\pi r_s^2 \alpha^2}$$

Dividendo per $d\nu_o$ otteniamo la brillantezza monocromatica

$$I(\nu_o) = \frac{F(\nu_o)}{d\nu_o} = \frac{L \varphi[\nu_o(1+z)]}{4\pi r_s^2 \alpha^2 (1+z)} \cdot \frac{4 \pi r_s^2}{\pi D^2 (1+z)^2}$$

$$I(\nu_o) = \frac{L \varphi[\nu_o(1+z)]}{\pi^2 D^2 (1+z)^3} \cdot \frac{1}{\nu_o^3}$$

e osserviamo che

$$\frac{L \varphi[\nu_o(1+z)]}{4\pi \cdot \frac{\pi D^2}{4}}$$

representa l'energia emessa per unità di frequenza, per unità di angolo solido e per unità di area emittente (cioè la brillantezza) dalla sorgente alla

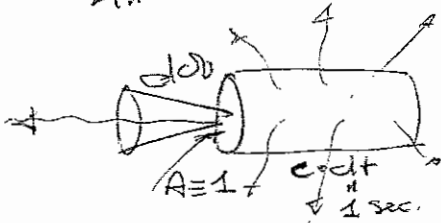
frequente $\nu_0(1+z) = \nu_{emissione}$, all'atto quindi della emissione della radiazione. Quindi ottengo la relazione

$$\frac{I(\nu)}{\nu^3} = \frac{I[\nu_0(1+z)]}{\nu_0^3(1+z)^3} = \frac{I(\nu_{em})}{\nu_{em}^3}$$

cioè $\boxed{I(\nu)/\nu^3 = \text{costante}}$ (in assenza di emissione e/o assorbimento).

• Consideriamo ora che vi sia una sorgente (diffusa) di radiazione che emette in modo isotropico E_ν erg s⁻¹ cm⁻³ Hz⁻¹. Per unità di angolo solido avremo

$$\frac{E_\nu}{4\pi} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1} \text{ in tutte le direzioni}$$



La radiazione che attraversa in $dt=1$ l'area $A=1$ sarà quella che, in quella direzione, e con $d\Omega=1$, è contenuta nel elemento di volume

Magistralmente è l'intensità specifica I_ν di volume $A \cdot c \cdot dt = c \cdot dt$ (l'angolo di vista dovuto alla sorgente).

$$\frac{dI_\nu}{dt} = \frac{c E_\nu}{4\pi} \text{ erg s}^{-2} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$$

Nell'intervallo dt avrò una variazione

$$dI_{\nu_{em}} = \frac{c E_{\nu_{em}} dt}{4\pi}$$

Ricevuta questa radiazione sulla Terra, essa corrisponde ad un

$$dI(\nu_0) = \left(\frac{\nu_0}{\nu_{em}}\right)^3 dI_{\nu_{em}} = \frac{c}{4\pi} \frac{E[\nu_0(1+z)]}{(1+z)^3} dt$$

Se l'emissione avviene tra il tempo t_1 e t_2

$$I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{E[\nu_0(1+z), t]}{(1+z)^3} dt$$

$$\delta E = \frac{E_\nu \cdot \nu}{4\pi} dt dA d\Omega d\nu$$

$$\frac{\delta E}{dA d\Omega d\nu dt} = \frac{c E_\nu}{4\pi} dt = \delta I_\nu$$

Per essere più comodo, conoscendo la $t(z)$,
 esprimere tutto come

$$I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{E[\nu_0(Hz), z]}{(1+z)^3} \left| \frac{dt}{dz} \right| dz$$

Se vogliamo ricavare le relazioni

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 \frac{da}{dz} \left[\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+z)^{1+3\alpha} + 1 - \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} \right]^{1/2}$$

essendo $a = \frac{a_0}{1+z}$ $da = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz$

allora

$$H_0 dt = - \frac{dz}{(1+z)^2 \left[\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+z)^{1+3\alpha} + 1 - \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} \right]^{1/2}}$$

da cui ho dt/dz per un dato modello cosmologico.

Nel caso in cui $\Omega_{\alpha 1}$ sia trascurabile, ed in cui l'universo sia dominato da materia ($\Omega = 0$), si ha

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{1}{H_0 (1+z)^2 \left[\Omega_{\text{m}} (1+z) + 1 - \Omega_{\text{m}} \right]^{1/2}} = \frac{1}{H_0 (1+z)^2 [1 + \Omega_{\text{m}} z]^{1/2}}$$

In questo caso ho: $\Omega_{\alpha 1} = 0$

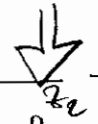
$$I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{E[\nu_0(Hz); z]}{(1+z)^5 [1 + \Omega_{\text{m}} z]^{1/2}} dz$$

caso particolare con $\Omega_{\alpha 1} = 0$

Nota lo spettro all'emissione, e la sua eventuale variazione con z (cioè nel tempo), posso calcolare quindi la brillantezza attesa per il fondo cielo alla frequenza ν_0 .

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(1+z) H_0 E(z)} \quad z < z_q$$

$$E(z) \cong \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_{\text{m}} z) - z(2+z)\Omega_{\text{m}} \right]^{1/2}$$



Se $\Omega_{\alpha 1} = 0$ $E(z) \cong (1+z) \sqrt{1 + \Omega_{\text{m}} z}$



$$I(\nu_0) = \frac{c}{4\pi H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{E[\nu_0(Hz), z]}{(1+z)^4 E(z)} dz$$

formula generale

• Nel caso classico, newtoniano e statico con spazio euclideo avremo sempre

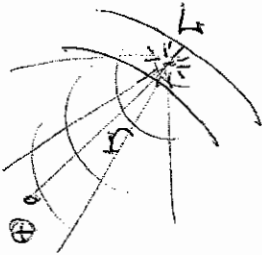
$$dI_{\gamma_0} = \frac{c E_{\gamma_0}}{4\pi} dt$$

Ma se $v_{em} \rightarrow c$ e, se $E_{\gamma_0} = \text{cost}$ nel tempo, avremo

$$I_{\gamma_0} = \frac{c E_{\gamma_0}}{4\pi} \int_{t_i}^{t_o} dt = \frac{c E_{\gamma_0}}{4\pi} (t_o - t_i)$$

Se l'universo, anziché iniziare al tempo t_i , fosse infinito nel tempo ($t_i = -\infty$), risulterebbe assurdo per il numero di fotoni: perché il cielo è nero di notte? Paradosso

Vedere questa affermazione in un altro modo: se suddivido l'universo in gusci sferici centrati sulla Terra, ogni guscio ha un volume $dV = 4\pi r^2 dr$, e gli oggetti nel guscio, di luminosità L , danno sulla Terra un flusso $\propto 1/r^2$. Essendo quindi il numero di oggetti nel guscio \propto volume di questo, vedo



che il contributo di ogni guscio è costante, indipendente dal r. Se ho quindi un universo infinito nello spazio, occupato ovunque da galassie con la stessa densità in numero e con luminosità costante nel tempo, ogni guscio dà un contributo, e la somma di infiniti gusci fa un contributo infinito del cielo. Anche se mi fero ad una brillantezza infinita del cielo. Anche se mi considero che, essendo le stelle estese superficialmente, quelle più vicine finiscono con l'eclissare quelle che stanno dietro di esse, mi aspetterei comunque di avere in ogni direzione la brillantezza tipica di un disco stellare. Questo ovviamente non accade, da qui il paradosso.

In realtà, anche nella cosmologia "classica", il paradosso potrebbe essere risolto se l'universo avesse una vita finita, nel qual caso, come visto sopra, $I_{\gamma_0} = \frac{c E_{\gamma_0}}{4\pi} (t_o - t_i)$, cioè è finita. Ovviamente, un valore finito si ottiene anche se l'universo è finito nello spazio, come pure se consideriamo che le

stelle o le galassie hanno una riserva ~~finita~~ ^{finita} di energia, e quindi brillano per un tempo finito. (DSS 22)

- Per la cosmologia moderna abbiamo sia un tempo effettivo era finita dell'universo, sia il fattore di red-shift, che rende $I(z)$ ancora minore che nel caso statico. Si è discusso se l'effetto principale sia quello dovuto all'espansione o quello dovuto alla finitura nel tempo dell'universo. In realtà, contrariamente a quanto solitamente affermato, è l'era finita delle galassie la causa principale dell'oscurità del cielo notturno; il contributo dell'espansione riduce generalmente di un fattore $2 \div 3$ il fondo cielo rispetto al caso senza espansione.

- Vediamo come fare un calcolo nel caso di I_{bol} .

- Nel caso "classico" avremo, integrando in dz ,

$$I_{bol} = \frac{c}{4\pi} \frac{E_{bol} (t_0 - t_e)}{4\pi} \sim \frac{c E_{bol} t_0}{4\pi} \quad e \Omega_M = 0$$

- Nel caso "moderno", prendendo per semplicità $\Omega_M = 1$, si avrà

$$\int_0^\infty I(z) dz = \frac{c}{4\pi H_0} \int_0^\infty \frac{\int_0^\infty E \left[\frac{z_0(1+z)}{z_0} \right] dz_0(1+z)}{(1+z)^{1/2} (1+z)} dz$$

$$I_{bol}^{mod} \approx \frac{c E_{bol}}{4\pi H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{3/2}} = \frac{2}{11} \cdot \frac{c E_{bol}}{4\pi H_0}$$

Ma, per $\Omega_M = 1$, abbiamo $(E ds)$

$$H_0 \int_0^\infty dt = - \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{3/2}} \rightarrow \begin{cases} H_0 t_0 = 2/3 \\ \frac{1}{H_0} = \frac{3 t_0}{2} \end{cases}$$

e, sostituendo:

$$\boxed{I_{bol}^{mod} \approx \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{2} \frac{c E_{bol} t_0}{4\pi} \sim 0.3 I_{bol}^{cl}} \quad c.v.d.$$

L'analisi matematica conferma questo risultato [Vedi, ad es., Wesson ~~1988~~ Astrophys. Journal 367, 395 (1991)]

• Quanto vale $I_{bol} \stackrel{max}{=} I_{bol}$?

(552)

$$I_{bol} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{c E_{bol}}{4\pi}$$

ma se l'energia luminosa viene dalle stelle, significa che, nelle vite dell'universo, l'energia totale emessa sarà circa pari alla frazione di materia bariónica processata da $H \rightarrow He$ entro le stelle: essa è circa $0.1 \cdot c^2 \epsilon_m$ con $\epsilon_m = 0.007$ (e 0.1 viene dal fatto che sulla sequenza principale una stella usa $\sim 10\%$ della sua massa totale).

Allora

$$I_{bol} \sim \frac{1}{3} \frac{c \cdot 0.1 c^2 \cdot 0.007}{4\pi} = \frac{P_{bol}}{4\pi r^2} \cdot \text{pari}$$

$\frac{P_{bol}}{4\pi r^2} \sim 2 \times 10^{-4} \frac{erg}{cm^2 s}$

$$I_{bol} \sim 2 \times 10^{-4} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ sterad}^{-1}$$

Perché $1 \text{ W/m}^2 = 10^3 \text{ erg/s cm}^2$ questo corrisponde a circa $2 \times 10^{-7} \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1}$, dell'ordine dell'energia contenuta nel fondo cosmico di radiazione ~~...~~

■ Assorbimento di radiazione

La grandezza usata abitualmente per caratterizzare l'entità di assorbimento della radiazione è la profondità ottica τ_{ν} : se σ_{ν} è la sezione d'urto di assorbimento, n la densità numerica di assorbitori, allora $\tau_{\nu} \approx n \sigma_{\nu} \cdot l$ per un cammino di lunghezza l [trascurando gli effetti cosmologici]. Per tenere conto di questi effetti, ricordiamo che un fotone ricevuto con freq. ν_0 ha al redshift z una freq. $\nu_0(1+z)$. Durante l'intervallo t a $t+dt$, corrispondente a z a $z+dz$, la profondità ottica cresce di $d\tau_{\nu_0} = \sigma[\nu_0(1+z)] n(z) c dt = \sigma[\nu_0(1+z)] n(z) c \frac{dt}{dz} dz$. Integrando, trova la profondità ottica dovuta alle materie nel range di redshift tra 0 e z :

$$\tau_{\nu_0}(z) = \int_0^z \sigma[\nu_0(1+z')] \cdot n(z') c \frac{dt}{dz'} dz'$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(1+z) H_0 E(z)}$$

$$\tau_{\nu_0}(z) = \int_0^z \sigma[\nu_0(1+z')] \cdot n(z') \cdot c \cdot \frac{dz'}{(1+z') H_0 E(z')}$$

$$E(z) = (1+z)(1+z^2)^{1/2}$$

EdS \uparrow

$$e \psi_A = 0$$

Se consideriamo un universo dominato da materia: (05/29)

$$\tau_{\nu_0}(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{\sigma[\nu_0(1+z)] n(z)}{(1+z)^2 (1+\Omega_M z)^{1/2}} dz$$

- Applichiamo questa relazione all'assorbimento da parte di idrogeno neutro nella riga Ly- α (1216 Å) alla $\nu_\alpha \approx 2.46 \times 10^{15}$ Hz. Per questo

$$\sigma_\nu \approx \frac{\pi e^2}{m_e c} f \delta(\nu - \nu_\alpha)$$

dove $f \approx 0.416$ è la forza dell'assorbimento e si è assunto che la probabilità intrinseca della riga Ly- α si adatti bene e assimilabile ad una δ di Dirac. Allora sarà

$$\begin{aligned} \tau_{\nu_0}(z) &= \frac{c}{H_0} \cdot \frac{\pi e^2}{m_e c} f \int_0^z \frac{\delta[\nu_0(1+z) - \nu_\alpha] n(z)}{(1+z)^2 (1+\Omega_M z)^{1/2}} dz \\ &= \frac{\pi e^2 f}{H_0 m_e} \int_{\nu_0}^{\nu_0(1+z)} \frac{\delta[\nu_0(1+z) - \nu_\alpha] n(z)}{(1+z)(1+\Omega_M z)^{1/2}} \frac{d[(1+z)\nu_0]}{\nu_0(1+z)} \end{aligned}$$

detto $\nu_0(1+z) = \nu_\alpha$, si ha

al variare di ν_0 esplorare n_H a vari z

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{\nu_\alpha}{1+z}\right) &= \frac{\pi e^2 f}{H_0 m_e \nu_\alpha} \cdot \frac{n_H(z)}{(1+z)(1+\Omega_M z)^{1/2}} \\ &\approx 4 \times 10^{10} h^{-1} \frac{n_H(z)}{(1+z)(1+\Omega_M z)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$[n_H \text{ in } \text{cm}^{-3}]$$

Delle osservazioni $\tau \lesssim 0.05$ frequencies su $z \approx 2.6$, da cui abbiamo

$$n_H(2.6) \lesssim 8.5 \times 10^{-12} h \text{ cm}^{-3}$$

corrisp a $z = z_{Ly\alpha}(1+2.6) \approx 4400 \text{ \AA}$
B

Questo è il cosiddetto limite di Gunn-Peterson. Se considero che il numero di barioni ($z \approx 2.6$) per cm^3 è

$$n_b(2.6) \approx \frac{\Omega_b H^2 (1+z)^3}{\sim 0.02 \cdot h^{-2}} \frac{2 \times 10^{-25} \text{ g/cm}^3}{1.6 \times 10^{-24} \text{ g}} \approx 1.2 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-3}$$

da cui che $n_H/n_b(z=2.6) \approx 7 \times 10^{-7} h^{-1} \text{ cm}^{-6} \cdot h$

$$\rho_b^{(z)} = \underbrace{\Omega_b}_{\rho_{ob}} \cdot \rho_{cr} (1+z)^3$$

$$m_b = \frac{\rho_b}{m_H}$$

Questo significa che o nello spazio intergalattico (OSS 30) vi sono pochissimi atomi liberi (la maggior parte è finita in stelle e galassie), o questi sono quasi totalmente ionizzati. Perché è improbabile (e alcuni calcoli lo confermano) che la formazione di stelle e galassie sia efficiente in pratica al 100% nel far collassare il gas di H_2 , e più credibile l'ipotesi della elevatissima ionizzazione.

La scala di tempo

Per un dato modello cosmologico, con $H_0, \Omega_{DM}, \Omega_{DE}, \Omega_{M}, \Omega_{R}$, k [ricordiamo che questi sono legati: $\frac{k}{a_0} = H_0^2 (\Omega_0 + \Omega_M - 1)$]
abbiamo visto che $\Omega_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Omega_{M1}$

$$H_0 dt = \frac{dz}{(1+z)^2 \left[\int_{\alpha}^z \Omega_{DM}(1+z)^{1+3\omega_{DM}} + 1 - \int_{\alpha}^z \Omega_{DE} dz \right]^{1/2}}$$

Se consideriamo, realisticamente, che $\Omega_{DE} \ll 1$, e trascuriamo, come breve rispetto al totale, la durata della fase dell'universo dominata dalle radiazioni, possiamo scrivere

$$H_0 \int_{t_1}^{t_0} dt = - \int_{z_1}^0 \frac{dz}{(1+z)^2 \left[\Omega_{DM}(1+z) + \Omega_{M1}(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_{DM} - \Omega_{M1} \right]^{1/2}}$$

da cui

$$H_0(t_0 - t_1) = \int_0^{z_1} \frac{dz}{(1+z) \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_{DM} z) - \Omega_{M1} z(z+2) \right]^{1/2}}$$

$(t_0 - t_1)$ è il look-back time (t_{LB}). Se poniamo $t_1 = 0$ e $z_1 = \infty$, abbiamo una relazione del tipo

$$H_0 t_0 = f(\Omega_{DM}, \Omega_{M1})$$

La presenza dell' ω costante cosmologica ha l'effetto, per un dato Ω_{DM} , di aumentare (se $\omega > 0$) o di diminuire (se $\omega < 0$) il valore di t_0 , come pure, in senso algebrico, il valore della derivata $\frac{df}{d\omega}$.

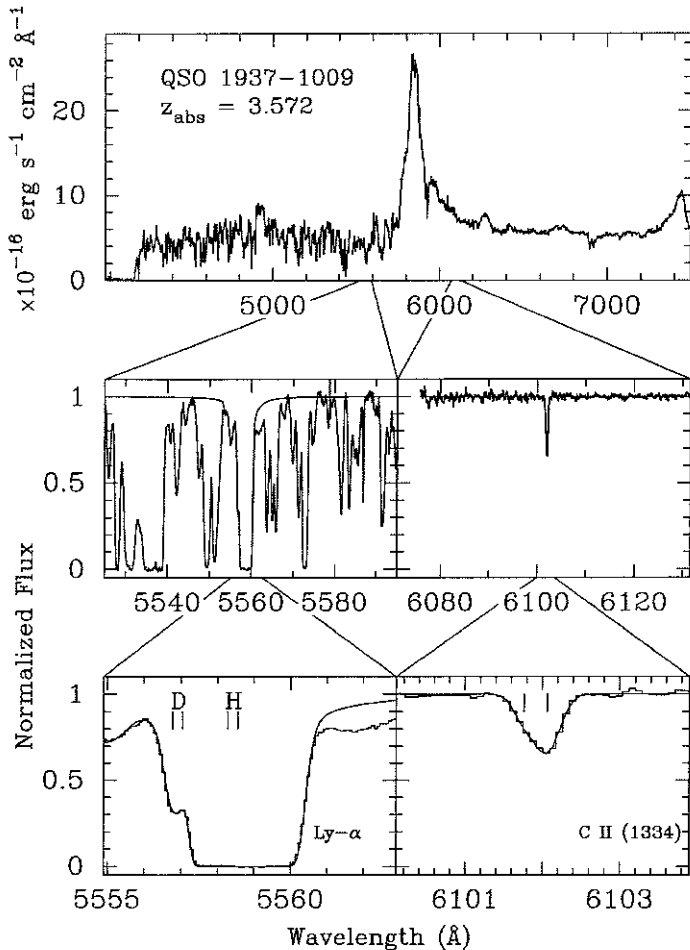


Fig. 6.8 The spectrum of a quasar at $z \sim 3.79$ showing Ly- α emission at 580 nm and, blueward of this line, the “forest” of Ly- α absorption lines by intervening atomic hydrogen [133]. The zoom on the left shows Ly- α hydrogen and deuterium absorption by a cloud at $z = 3.572$. The deuterium line is shifted with respect to the hydrogen line because the atomic energy levels are proportional to the reduced electron–nucleus mass. The ratio between the hydrogen and deuterium absorption can be used to determine the two abundances within the cloud. Courtesy of D. Tytler

$z = 5.73$

Reionization Epoch

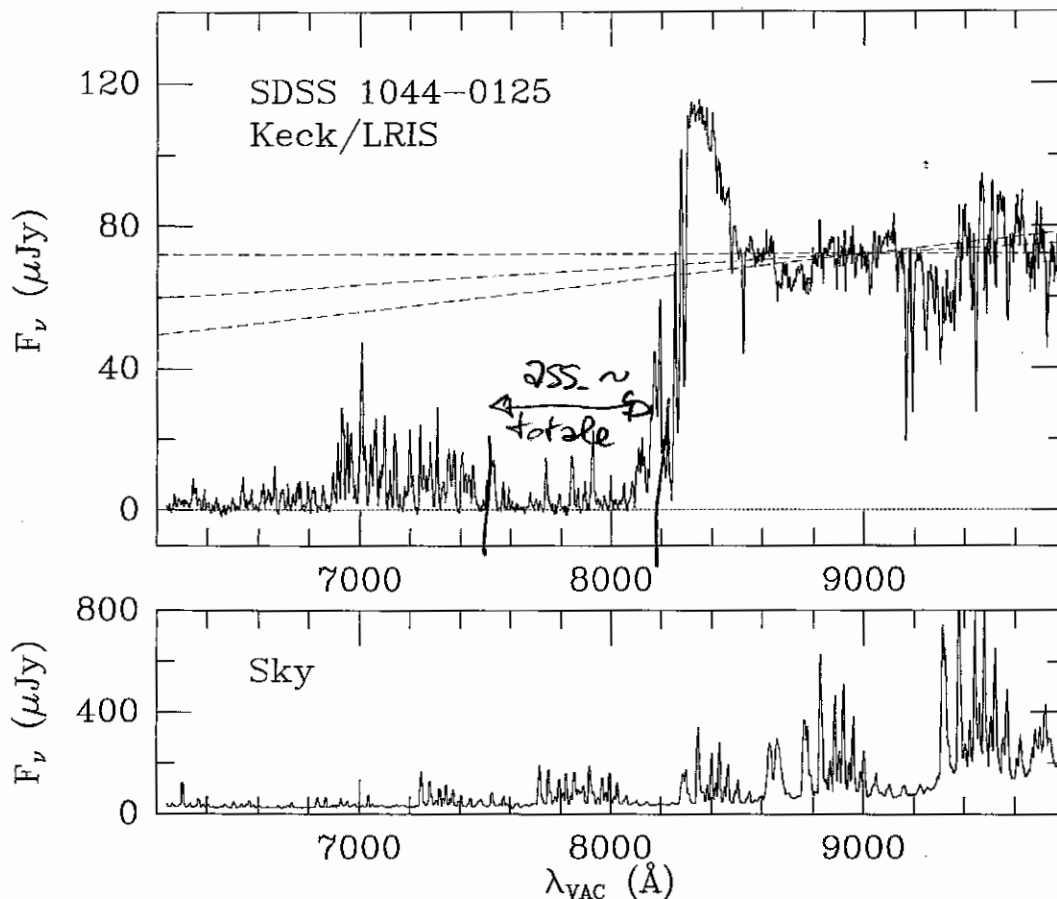


FIG. 1.-- Spectrum of SDSS 1044-0125 obtained with LRIS (top), and the corresponding night sky (bottom). The three dashed lines represent a plausible range of the unabsorbed quasar power-law continua.

Steidel, C., Adelberger, K., Giavalisco, M., Dickinson, M., & Pettini, M. 1999, ApJ, 519, 1
 Stern, D. & Spinrad, H. 1999, PASP, 111, 1475
 Stern, D., Spinrad, H., Eisenhardt, P., Bunker, A., Dawson, S., Stanford, A., & Elston, R. 2000, ApJ, 533, L75

Zheng, W., et al. (the SDSS Collaboration) 2000, AJ, 120, 1607
 Umemura, M., Nakamoto, T., & Susa, H. 2001, preprint (astro-ph/0108176)

$7500 \text{ \AA} = (1+z) \cdot 1216 \text{ \AA} \rightarrow z \sim 5.2$
 ↑
 Ly α

Qualcosa succede a $z \sim 5.5-6$

A $z \sim 6$ fase finale della reionizzazione

How the Discovery Was Made

The Normal Hydrogen
Absorbers Forest
(Reionization Complete)

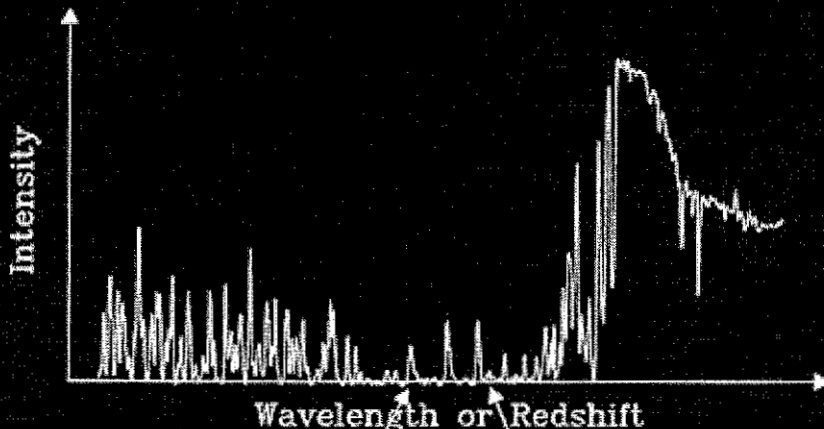
Ionized Bubbles in a
Still Largely Neutral
Universe

Opaque Neutral Gas
in the Earlier Universe
(Before the Reionization)

Line of Sight
to the Quasar

The Quasar

The
Observed
Spectrum:



Isolated Transmission Spikes
Correspond to the Ionized
Bubbles Along the Line of Sight

Dark Regions Correspond to
the Still Opaque, Neutral Gas
Along the Line of Sight

HBBI

Capitolo 1

LO STANDARD HOT BIG BANG

1.1 Introduzione

Big Bang Caldo - BBC (HOT BIG BANG) è il nome dato al modello cosmologico standard: omogeneo e isotropo, governato dalle equazioni di Friedmann (con $\Lambda = 0$), formato da un fluido di materia e radiazione, e le cui proprietà cinematiche (ad es. H_0) corrispondono ai dati osservativi. Si assume anche che la componente di radiazione della densità di energia sia di origine cosmologica (da cui il nome "caldo").

Le basi su cui il *BBC* si poggia sono essenzialmente tre:

- l'espansione dell'universo;
- la radiazione termica di fondo a $3K$, che rivela l'esistenza di una fase di vita dell'universo in equilibrio termodinamico;
- la previsione delle abbondanze degli elementi leggeri (D , 3He , 4He , 7Li), in particolare l'elio; questa nucleosintesi cosmologica richiede inoltre che vi sia stata un'epoca della vita dell'universo in cui $T \approx 10^9 K$.

A questi fatti si può aggiungere che l'età predetta per l'universo è confrontabile all'età stimata direttamente di alcuni tipi di oggetti contenuti nell'universo, e che è possibile dare una spiegazione teorica ragionevole per la formazione di strutture cosmiche attraverso il collasso gravitazionale, a partire dalle perturbazioni rivelate nel fondo a microonde dal satellite COBE e WMAP.

Particelle

Secondo il modello standard della fisica LHB (3) delle particelle, l'universo è composto da un insieme di fermioni (spin $\frac{1}{2}$) fondamentali (puntiformi), i leptoni ed i quark, che si possono dividere in 3 generazioni o famiglie:

	I gen.	II gen.	III gen.
leptoni	$e^- \nu_e$	$\mu^- \nu_\mu$	$\tau^- \nu_\tau$
quark	d, u	s, c	b, t

Ogni generazione contiene due "sapori" (flavor) di quark, che risentono delle interazioni forti, e 2 leptoni, che non risentono. Tutte le particelle risentono invece delle interazioni deboli.

I leptoni portano un numero leptonic $L = +1$ ed un numero barionico $B = 0$, mentre i quark hanno $L = 0$ e $B = +\frac{1}{3}$. Ogni particella ha una sua antiparticella di pari massa e di numeri quantici opposti (es: e^+ ha $L = -1$, e l'antiquark \bar{t} ha $B = -\frac{1}{3}$). Il numero leptonic totale e quello barionico totale, come la carica elettrica, si conservano in tutte le interazioni.

I leptoni si raggruppano in famiglie perché in tutti i processi si conserva il numero totale di particelle di ciascuna generazione: es:

$$L_e \equiv N(e^-) + N(\nu_e) - N(e^+) - N(\bar{\nu}_e)$$

si conserva, come gli analoghi L_μ ed L_τ .

Ogni quark può ~~essere~~ esistere in 3 forme distinte del "colore", da cui dipende l'interazione forte, che può assumere i valori rosso (red, R), verde (green) e blu (blue, B). Gli antiquark hanno i colori complementari \bar{R} (cyan), \bar{B} (yellow) e \bar{G} (magenta) (es magenta = rosso + blu).

Leptoni

Leptone	simbolo	carica (e)	massa (GeV/c ²)
elettrone	e ⁻	-1	~ 5.11 x 10 ⁻⁴
neutrino el.	ν_e	0	< 1.8 x 10 ⁻⁸
Muone	μ^-	-1	~ 0.106
neutrino muone	ν_μ	0	~ 2.5 x 10 ⁻⁴
tau	τ^-	-1	~ 1.784
neutrino tau	ν_τ	0	< 3.5 x 10 ⁻²

Quark

Seppre	simbolo	carica (e)	massa (GeV/c ²)
down	d	-1/3	0.008
up	u	2/3	0.004
strange	s	-1/3	0.15
charm	c	2/3	1.2
bottom	b	-1/3	4.7
top	t	2/3	~ 180 (175)

$$1 \text{ GeV}/c^2 \approx 1.7827 \times 10^{-24} \text{ g} \approx \text{massa protone}$$

Mentre le interazioni deboli mescolano tra loro i quark in tutti i modi consistenti con la conservazione di carica, non ci sono interazioni forti che mescolino i quark con i leptoni, cosicché il numero barione di quark (cioè il n° di quark meno il n° di anti-quark $N(q) - N(\bar{q})$) si conserva. Questo fatto si esprime anche come conservazione del numero bariónico poiché

$$B = 3 [N(q) - N(\bar{q})]$$

Ci sono in realtà delle ragioni per ritenere che questa regola ~~deba~~ possa essere violata, dando al protone una vita finita (vedi più avanti).

Forze

14005

Le forze sono mediate da particelle (bosoni, spin
interi), una misura della probabilità di questo scamb-
bio, e quindi dell'intensità della forza, è data
dalle costolette costanti di accoppiamento (che,
come vedremo non sono affatto costanti) e che sono
~~Atti~~ ~~di~~ grandezze adimensionali. Ai quattro
tipi noti di interazione di gauge (gravitazionale, elet-
tromagnetismo, interazioni deboli e forti) va aggiunto,
nel modello standard, quella mediata dal bosone
di Higgs (vedi avanti).

① Gravitazione Una misura adimensionale della
intensità dell'accoppiamento è data

da $\alpha_G = \frac{G m^2}{\hbar c}$ che, se $m = m_p$ (protoni), è
pari a circa $\alpha_G \sim 6 \times 10^{-39}$.

La piccolezza di questo numero, rispetto a quella per le
altre forze, fa sì che la gravità sia trascurabile nelle
fisica delle particelle (ma... vedi dopo). Ma la pre-
sente si occupa con la massa-energia $E = mc^2$, $m = E/c^2$
($p = pc$)

equindi $\alpha_G = \frac{G E^2}{\hbar c^5} \quad (*)$ se $E = E_{pe} \sim \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} \sim M_{pe} c^2$

con $E_{pe} \sim 2 \times 10^{16}$ erg $\sim 1.2 \times 10^{28}$ eV $\sim 1.2 \times 10^{19}$ GeV

$M_{pe} \sim 1.2 \times 10^{19}$ GeV/c $\sim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \sim 2 \times 10^{-5}$ g

Dalla $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$, $\Delta t \sim \hbar/c$, queste energie corri-
spondono ad una scala

$l_{pe} \sim \frac{\hbar c}{E_{pe}} \sim \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \sim 1.6 \times 10^{-33}$ cm

(*) già qui vedo
che in realtà α_G
non è costante, ma
dipende dalla scala
di E !

con un tempo $t_{pe} \sim \frac{E_{pe}}{c} \sim \left(\frac{h\nu}{c}\right)^{1/2} \sim 5 \times 10^{-15} s$

(HBB) 6

Vedo quindi che è solo ad energie (temperature) dello ordine di E_{pe} che le gravità diventa rilevante.

Poiché le onde gravitazionali sono tenoriali di rango 2, lo spin del gravitone ^(G) è 2 e la sua massa nulla, essendo il suo range infinito [$l \sim \frac{h}{mc}$, $l = \infty \Rightarrow m = 0$].

• **Elettromagnetismo**

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

$$e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$$

L'accoppiamento è un derivato della costante di struttura fine α :

Essendo a range infinito anche il fotone (γ), esso ha massa nulla e spin 1 poiché è legato al potenziale vettore A^μ (tensore di rango 1).

La simmetria di questo potenziale vettore è di tipo $U(1)_{em}$, che corrisponde alla conservazione della carica elettrica.

Il valore di α non è fissato costante, ma dipende dall'energia E coinvolta (o dalla scala comparsa $l \sim h/c/E$) a causa della polimerizzazione del vuoto.



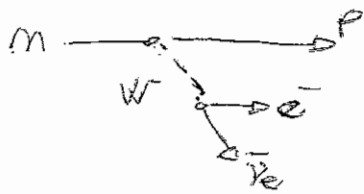
Per la creazione di coppie virtuali e^+e^- per un tempo $\Delta t \sim \hbar/(2mc^2)$, si crea un effetto di

schermatura che è tanto più forte al crescere della distanza, per cui $\alpha = \alpha(r)$ calza con r e tende a $1/137$ se $r \rightarrow \infty$ secondo una relazione

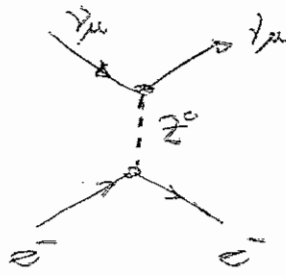
$$\alpha(r) \sim \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(1 + \frac{\hbar}{m_e c \cdot r}\right)}$$

$$\alpha(r) \rightarrow \alpha_0 \text{ se } r \gg \frac{\hbar}{m_e c} \text{ (l.d.o. Compton e oltre)}$$

⇒ Interazioni deboli causano ad esempio il decadimento β . #BB/7



decadimento β
del neutrone
mediato da uno scambio
di un W^- virtuale



Scattering $\nu_e e^-$
mediato dallo
scambio di un
 Z^0 virtuale.

Secondo la teoria di Weinberg-Salam l'interazione debole è mediata dai bosoni vettoriali (spin 1) W^+ , W^- e Z^0 . Tutti i quark e leptoni hanno la stessa forza di accoppiamento. L'accoppiamento adimensionale, usando la costante di accoppiamento debole di Fermi G_F , per una particella avente una massa tipica di un adrone (m_p , $m_p \approx 0.94 \text{ GeV}/c^2 \approx m_n$) è dato da

$$\frac{G_F (m_p c^2)^2}{(\hbar c)^3} \sim 10^{-5} \quad \left[\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \sim 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \right]$$

Certamente "debole" rispetto ad α_{em} . In realtà, secondo la teoria di W.S., la debolezza apparente non è dovuta alla debolezza dell'accoppiamento, ma all'improbabilità dell'emissione dei W^+ e Z^0 virtuali che sono molto massicci ($M_W \sim 80 \text{ GeV}/c^2$, $M_Z \sim 90 \text{ GeV}/c^2$). In particolare, si ha che

$$\alpha_W \approx \alpha_{em} / \sin^2 \theta_W \quad \alpha_W \sim 1/30$$

dove $\sin^2 \theta_W \sim 0.23$ e θ_W è il cosiddetto Weinberg weak mixing angle tra elettromagnetismo ed interazioni deboli. Il legame con G_F è dato dalla relazione

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_W}{M_W^2 c^4}$$

Dato le grandi masse di W^\pm e Z^0 , il range l_W dell'interazione debole è ~~molto piccolo~~ $l_W \sim \frac{\hbar c}{M_W c^2} \sim 2.5 \times 10^{-16}$ cm. (ABB 8)

Le interazioni deboli non conservano la parità P perché i bosoni W si accoppiano solamente alla proiezione chirale sinistra (left-handed, L) dei leptoni e quark. Questo significa che i W si accoppiano a particelle relativistiche ($E \gg mc^2$) dove il loro spin è opposto alla direzione del moto. Per questo i neutrini sono left handed (L.H.),

mentre non si conoscono, esisterrebbero difficoltà da individuare, neutrini $\frac{1}{2}$ Right handed. ~~Non sono stati osservati~~ Si

conserva invece generalmente la combinazione CP ($C =$ coniugato di carica), a parte una debole violazione ad esempio nel decadimento del mesone K^0 .

L'affinità tra elettromagnetismo ed interazione debole è stata formalizzata nel modello elettrodebole di Glashow-Weinberg-Salam. Secondo questa teoria (verificata sperimentalmente fin con la scoperta dei W^\pm e Z^0), ad ~~alte~~ energie inferiori a $E_{EW} \sim M_W c^2 \sim 100$ GeV, si ha una rottura spontanea della simmetria $SU(2) \times U(1)$ dell'interazione elettrodebole ottenuta aggiungendo un bosone scalare (dottor di Higgs) ~~o un campo scalare~~ che possiede un valore di aspettativa del vuoto diverso da zero (si trova cioè in uno stato iniziale di "falso vuoto" che decade per un vuoto di energia minore e più stabile). Su questo meccanismo diremo di più parlando dell'inflazione, che è legata ad un fenomeno analogo. Questa rottura di simmetria porta da $SU(2) \times U(1)$ dell'interazione elettrodebole ad una simmetria $U(1)$ che è quella dell'elettromagnetismo. Osserviamo che con l'aggiunta del bosone di Higgs si è potuta fare la esistenza di una ulteriore interazione (oltre alle A già note) che viene mediata dal bosone H . La sua massa

è incerta, non è stato rivelato, anche perché è (ABB13) difficile, per le sue proprietà, da rivelare, dovrebbe comunque essere $M_H \sim M_Z \sim 100 \text{ GeV}/c^2$. La rottura di simmetria permette anche ai W e Z^0 , come pure ai leptoni e quark, di acquisire una massa diversa da zero.

• Interazioni forti Legano i quark tra loro per formare gli adroni, e gli adroni tra loro per formare i nuclei atomici. L'interazione è associata, come abbiamo già accennato, all'accoppiamento del colore (R, G, B). L'int. forte è invariante per trasformazioni tra questi tre colori e possiede una simmetria $SU(3)$. I quark, privi di massa ~~relativa~~ della quantocromodinamica (QCD), sono detti gluoni; ve ne sono 8 e, poiché portano anche loro colore, interagiscono tra loro (è differenza dei fotoni); hanno $Spin = 1$. Anche la "costante" d'accoppiamento delle interazioni forti varia con l'energia E o la scala $r = \hbar/c/E$, secondo un andamento

$$\alpha_s \sim \frac{0.73}{\ln(E/\Lambda_{QCD})} \quad (2 \leq E \leq 100) \text{ GeV}$$

$$\alpha_s(E = M_Z c^2) \approx 0.12$$

dove Λ_{QCD} è una scala di energia caratterizzante la QCD ed è $\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$. A differenza di ~~dei fotoni~~, α_s decresce al crescere dell'energia (ed al diminuire della scala r), e $\alpha_s \rightarrow 0$ se $r \rightarrow 0$ o $E \rightarrow \infty$. Questo fatto è noto come "libertà asintotica" (asymptotic freedom). D'altro canto, se $E \rightarrow \Lambda_{QCD}$ [cioè $r \rightarrow R_{QCD} = \frac{\hbar c}{\Lambda_{QCD}} \approx 10^{-13} \text{ cm}$], dimensione tipica dei nuclei atomici] α_s apparente-

mente diverge e ci si aspetta che fra tra quark diverge molto grande. Come risultato i quark ed i gluoni sono "confinati" entro gli adroni, con dimensioni $\sim R_{\text{had}}$. (ABB) 10

I Bosoni fondamentali

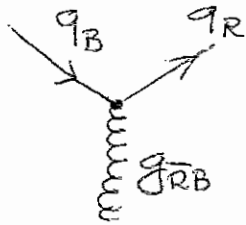
Nome	Simbolo	Spin (h)	Massa (GeV/c ²)	Carica (e)
gravitone	G	2	0	0
fotone	γ	1	0	0
bosone debole carico	W^{\pm}	1	80.3	± 1
bosone debole neutro	Z^0	1	91.2	0
gluoni	$g_1 \dots g_8$	1	0	0
Higgs	H	0	($\sim M_Z$?)	0

Nel modello standard della fisica delle particelle per spiegare tutte le interazioni note, servono il gravitone (Spin 2) ed i 12 bosoni di spin 1 elencati sopra. Il suddetto modello standard comprende quindi, la gravitazione con interazioni forti ed elettrodeboli a simmetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Dopo la rottura della simmetria (ad EEW \sim keV GeV) resta la simmetria $SU(3) \times U(1)_{\text{em}}$, con i gluoni ed il fotone come particelle senza massa, più il bosone Higgs.

Solo combinazioni di quark con colore "neutro" possono presentarsi come particelle libere. Avremo quindi i barioni che sono una mescolanza di 3 quark con i tre colori RGB (es: il protone è uud, con spin $\frac{1}{2}$) ed i mesoni, formati da un quark ed un antiquark con il colore complementare [barioni $B=1$, mesoni $B=0$] [barioni spin semintero, mesoni spin intero]

Il protone è il solo barione stabile, mentre il [488]11 neutrone, se non è in un nucleo atomico, decade con una vita media ~ 15 minuti ^(887 ± 2 sec). Un adrone è formato, oltre che dai suoi quark di "valenza", anche da un "mare" ^("nube") costituito da coppie virtuali $q\bar{q}$ e gluoni.

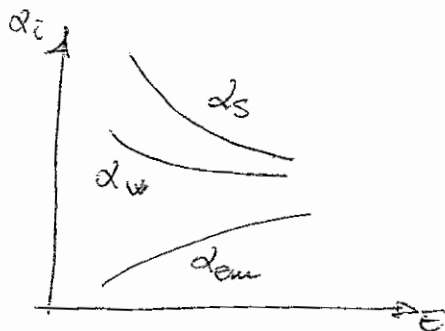
Il fatto che $\alpha_s \rightarrow 0$ se $r \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) è dovuto al



fatto che i gluoni portano colore. Consideriamo un quark nell'origine. Può accadere una dissociazione come in figura, con $q_B \rightarrow q_R + g_{RB}$. Allora, una sonda non vedrebbe più il quark blu nell'origine, ma vedrebbe invece la "carica" di colore blu sul gluone sposta-

to nella nube di gluoni, e quindi non concentrata nell'origine. Questo effetto di anti schermatura è dovuto al fatto che il gluone può portarsi dietro la carica di colore. Al crescere dell'energia la probabilità di irraggiamento del gluone cresce, così che sempre meno carica di colore è concentrata sul quark originale, ed esso si comporta sempre più come una particella libera!

Abbiamo visto il comportamento di α_{em} (che cresce) e di α_s (che decresce) al crescere dell'energia. Il comportamento di α_w è simile a quello di α_s , ma con una variazione più debole.



Quella qui sintetizzata è la fisica prevista e abbastanza ben testata del modello standard $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ della fisica delle particelle, che arriva ad energie dell'ordine dei 100 GeV. Oltre il modello standard vi sono due estensioni fondamentali: l'unificazione in grande (GUT) e la supersimmetria.

o Assioni

Al di là dei suoi successi, la QCD presenta un problema serio: il cosiddetto strong-CP problem. Il problema sorge dal fatto che nella QCD lo stato di vuoto è degenero e corrisponde ad una sovrapposizione di stati. Questo porta ad introdurre nella teoria QCD (nella Lagrangiana che la esprime) un nuovo parametro θ che però introduce una violazione di CP, T e P e ~~fa~~ fa prevedere un momento di dipolo elettrico per il neutrone tale che $d_n/e \approx 5 \times 10^{-16} \cdot \theta$ cm. Il limite osservato è $d_n/e \leq 10^{-25}$ cm, per cui $\theta \leq 10^{-10}$. Perché θ è così piccolo? questo è lo strong-CP problem. Nel 1977 Peccei e Quinn hanno mostrato che è possibile porre $\theta = 0$ introducendo una ulteriore simmetria, detta $U(1)_{PQ}$. Questo risolve allora lo strong-CP problem. Succede però che quando si rompe spontaneamente questa simmetria assieme a quella elettrodebole viene prodotto un ulteriore bosone, l'assione (axion), che finisce con l'acquisire una massa dell'ordine

$$m_a \approx \frac{1}{f_{PQ}} \sim 100 \text{ eV}$$

~~La massa del protone è circa 1 GeV, mentre quella del neutrone è circa 1 GeV. La massa dell'assione è molto più piccola, dell'ordine di 100 eV.~~

da σ , il valore di aspettativa del vuoto della transizione di fase EW ($\sigma \sim 250 \text{ GeV}$). Un'assione con questa massa è stato escluso da esperimenti di laboratorio, ma si possono pensare rotture della simmetria PQ ad energie ~~più~~ più elevate [la f_{PQ} potrebbe essere tra 100 GeV e 10^{13} GeV]. limiti su m_a vengono anche dall'astrofisica, in particolare dall'evoluzione stellare. L'effetto degli assioni sarebbe quello di raffreddare il core delle stelle (portando facilmente energia all'esterno, dato lo loro grande probabilità di interazione con la materia).

[dove f_{PQ} è l'energia a cui si "rompe" $U(1)_{PQ}$; f_{PQ} è circa uguale a σ , il...

The cosmic mass density in this homogeneous field mode is [67]

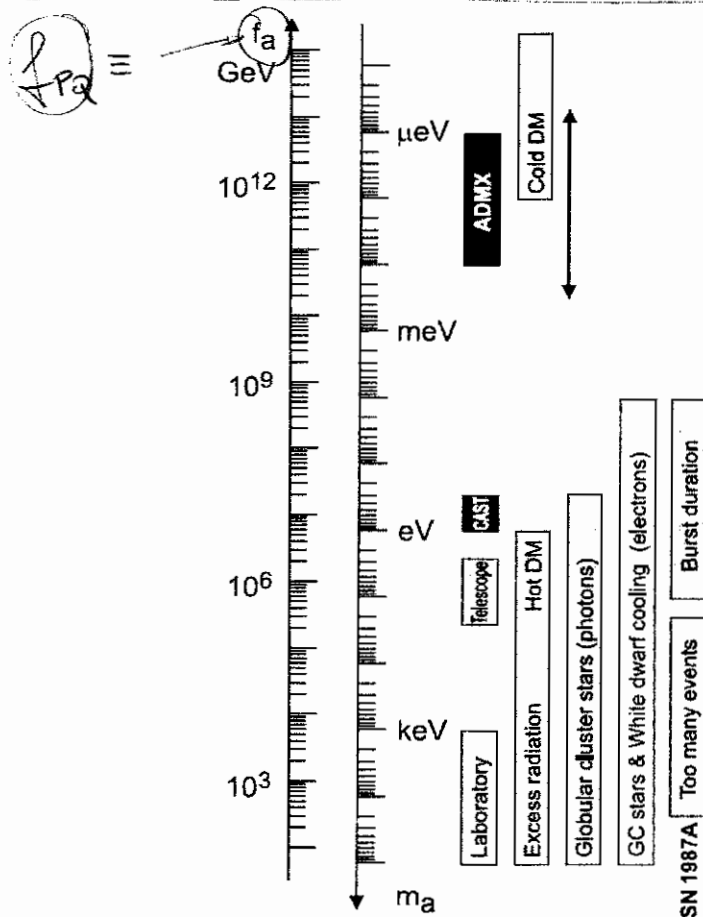
$$\Omega_A h^2 \approx 0.7 \left(\frac{f_A}{10^{12} \text{ GeV}} \right)^{7/6} \left(\frac{\bar{\Theta}_i}{\pi} \right)^2, \quad (17)$$

where h is the present-day Hubble expansion parameter in units of $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, and $-\pi \leq \bar{\Theta}_i \leq \pi$ is the initial "misalignment angle" relative to the CP -conserving position. If the PQ symmetry breakdown takes place after inflation, $\bar{\Theta}_i$ will take on different values in different patches of the universe.

The average contribution is [67]

$$\Omega_A h^2 \approx 0.3 \left(\frac{f_A}{10^{12} \text{ GeV}} \right)^{7/6}. \quad (18)$$

Comparing with the measured CDM density of $\Omega_{\text{CDM}} h^2 \approx 0.13$ implies that axions with $m_A \approx 10 \mu\text{eV}$ provide the dark matter, whereas smaller masses are excluded (Figure 2).



$$m_a \approx \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{f_{\text{PQ}}} \sim \frac{(2 \times 10^2 \times 10^6 \text{ eV})^2}{10^{12} - 10^9 \text{ eV}} \sim 4 \times 10^{-5} \text{ eV} \sim 40 \mu\text{eV}$$

$$\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$$

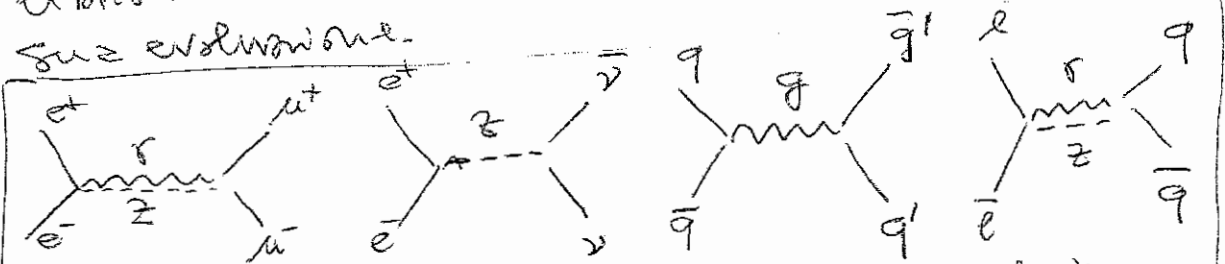
In particolare, le stelle potrebbero essere co-HBB/11-ter
 strette a contrarsi, aumentando la temperatura centrale, ed
 a bruciare quindi più rapidamente il loro combustibile per resta-
 re in equilibrio idrostatico. Potrebbe anche essere impletito
 il ~~modello~~ flash nelle giganti rosse. Verrebbe anche influenzato
 l'intervallo di tempo Δt , durante il quale venivano emessi
 neutrini da una SN II in galassie ($\Delta t \sim 1-2$ secondi, su
 100 neutrini rivelati dalla SN 1987A). Tutto questo porta a
 porre $m_a \lesssim 10^{-3}$ eV (combinando i limiti astrofisici con i
 dati di laboratorio). Questo porrebbe limiti su f_{PQ} :
 $f_{\text{PQ}} \gtrsim 4 \times 10^{16}$ GeV, confrontabile con la scala di rot-
 ton spontanea di alcune teorie supersimmetriche.

$\rightarrow m_a \sim (10^{-6} - 10^{-4} \text{ eV})$ intervallo di interesse cosmologico

Le attuali ricerche sperimentali di assioni, basate
 sulla conversione di assioni in fotoni a microonde
 in presenza di un forte campo magnetico, stanno
 cominciando ad avere una sensibilità tale da entrare
 nel range di valori di massa interessante dal punto
 di vista cosmologico.

Sezioni d'urto

Come vedremo tra breve, è utile avere una stima delle sezioni d'urto di interazione ~~(tra)~~ tra particelle che contribuiscono a mantenere in equilibrio termodinamico l'universo in certe fasi della sua evoluzione.



possibili interazioni formano leptoni e quark in equilibrio, oltre alle reazioni di annichitazione e creazione $A + \bar{A} \rightleftharpoons e^+ + e^-$, $3\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^- \rightleftharpoons e\gamma$
 $A + \bar{A} \rightleftharpoons \gamma + \gamma$.

Consideriamo 2 tipi di interazioni:

- ① interazioni mediate da un bosone senza massa (es fotone)
- ② interazioni mediate da un bosone massiccio (es W^\pm, Z ed i loro della scala $E_{EW} \sim 100 \text{ GeV}$).

Nel caso ①, per particelle relativistiche, $[E \sim kT]$

$$\sigma \sim \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2}{(kT)^2}$$

con α cost. d'accoppiamento delle interazione e $kT \sim E$ dall'equipartizione dell'energia;

questa relazione vale anche per $kT \gg m_x c^2$, con m_x massa ($\neq 0$) del bosone.

Nel caso ②, per $kT \ll m_x c^2$, si ha

$$\sigma \sim \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{(kT)^2}{(m_x c^2)^4} \sim \frac{2}{\pi^2} \frac{G_F^2}{(\hbar c)^4} (kT)^2 \quad (\text{se } \hbar c \text{ int. deboli})$$

Posso combinare i casi ① e ② scrivendo

$$\sigma \sim \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{(kT)^2}{[(kT)^2 + (m_x c^2)^2]^2}$$

GUT / Grand Unified Theories

(HBB/13)

Nonostante i suoi successi, il modello Standard em è una vera teoria unificata, poiché vi sono 3 costanti di accoppiamento diverse.

L'idea essenziale delle unificazioni in grande (GUTs) è quella di cercare di includere $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ in qualche gruppo G con un'unica costante di accoppiamento e supporre che ad alte energie, al di sopra di una certa scala di unificazione $E_{GUT} \sim M_{Pl}^2$, tutti i fenomeni soddisfano alle simmetrie intrinseche in G . Gli accoppiamenti diversi ($\alpha_{em}, \alpha_w, \alpha_s$) osservati a bassa energia scaturirebbero da una rottura spontanea della simmetria G , prima alla scala E_{GUT} e poi a quella E_{EW} .

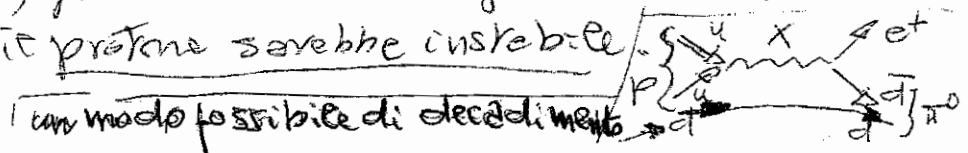
$$G \longrightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}$$



Oppure il processo potrebbe comportare diversi stadi, con varie ed differenti scale E_{GUT} .

Se l'ipotesi delle GUTs è vera, vi sono alcuni risultati notevoli, anche da un punto di vista cosmologico.

- In una GUT devono esistere, oltre ai bosoni che già conosciamo, dei bosoni X che legano tra loro quark e leptoni, e che mediano delle nuove interazioni che violano il numero bariónico e quello leptonico poiché leptoni possono mutarsi in quark e viceversa. Queste interazioni devono essere molto deboli, con una probabilità molto piccola, per non essere state finora rivelate. In particolare, il protone sarebbe instabile.



Proviamo a dare una stima all'ordine di grandezza HBB/14 della densità di questo fenomeno ricordando che se

$\Gamma = n \sigma v$ ($n = \text{part. per cm}^3$, σ area d'urto, v velocità) è il numero di ~~collo~~ collisioni per unità di tempo, il tempo di decadimento (vita media) è $\tau = 1/n\sigma v$. Poiché

oggi siamo a basse energie rispetto ad E_{GUT} , posso prendere per σ il caso ② di pag. (HBB/12). ~~Il tempo di vita media è~~
~~il tempo di vita media è~~ Entro il protone i quark hanno un'energia $\sim m_{\text{pc}}^2$ (che corrisponde all'equazione di Fermi μ) e la loro densità numerica è dell'ordine $\frac{1}{(\lambda_{\text{q}} \text{ del protone})^3} \sim \frac{1}{(\hbar/m_{\text{pc}})^3}$, per cui (NVC)

$$\tau_p \approx \frac{1}{\frac{1}{(\hbar/m_{\text{pc}})^3} \cdot \alpha_x^2 (\hbar c)^2 (m_{\text{pc}}^2)^2 \cdot c} \approx \frac{1}{\alpha_x^2} \cdot \frac{\hbar}{c^2} \frac{M_x^4}{m_p^5}$$

Se prendiamo $\alpha_x \sim 1/40$ (vedi oltre), essendo $\tau_p \geq 10^{31}$ anni, ho un limite inferiore su $M_x c^2 \approx E_{\text{GUT}}$

$$M_x \geq 10^{15} \cdot \left(\frac{\tau}{10^{31} \text{ anni}}\right)^{1/4} \left(\frac{\alpha_x}{1/40}\right)^{1/2} \text{ GeV}/c^2$$

Quindi, se esiste la GUT, il livello E_{GUT} esisteva e molto grande $\sim 10^{15}$ GeV (comunque ancora molto minore dei 10^{19} GeV dell'epoca di Planck, e la gravità può essere ancora trascurata).

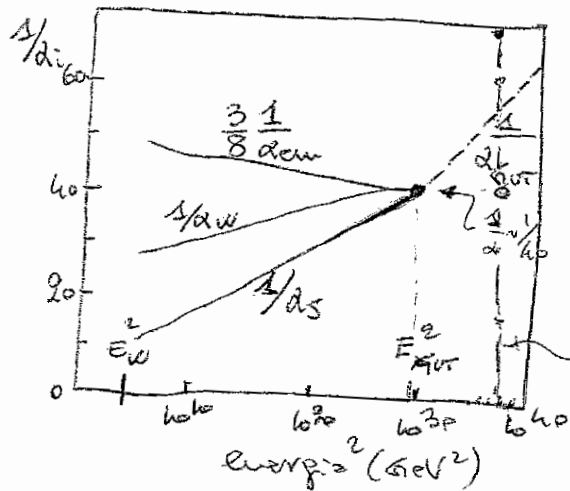
- Le GUTs spiegano anche la quantizzazione delle cariche elettriche (non spiegata dal modello standard)
- Se voglio unificazione, dovrà essere, ad $E \sim E_{\text{GUT}}$

$$\alpha_s = \alpha_w = \frac{g_{\text{un}}^2}{4\pi}$$

e le GUT prevedono che $g_{\text{un}}^2 = 3/8$ all'energia E_{GUT} .

Chiaramente i valori degli accoppiamenti, a bassa ener.

ghe, non soddisfa queste relazioni (e anche $[HBB]15$ $\frac{31}{8} \alpha_{EW} = 0.23 \neq 3/8 = 0.375$). Se tuttavia ricercato che gli accoppiamenti dipendano dall'energia, trova che questi si incontrano ad una scala che può essere in accordo con quella richiesta dai limiti sul decadimento del protone. Nel modello minimale di GUT, detto $SU(5)$, ho un valore $E_{GUT} \sim 10^{14} - 10^{15}$ GeV, $\alpha_i(E_{GUT}) \sim 1/40$.



detto $SU(5)$, ho un valore $E_{GUT} \sim 10^{14} - 10^{15}$ GeV, $\alpha_i(E_{GUT}) \sim 1/40$.

Abbiamo indicato anche

$$\frac{1}{\alpha_i} = \frac{(\hbar c)^5}{4\pi E^2}$$

$\alpha_i \sim 1/40 \rightarrow E^2 \sim 3.8 \times 10^{36} \text{ GeV}^2$
 $\text{ossia } E^2 \sim 3 \times 10^{36} \text{ GeV}^2$

In $SU(5)$ vi sono 12 nuovi bosoni ($X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ e le loro antiparticelle \bar{X}_i, \bar{Y}_i). Sono violate le conservazioni di B ed L, ma non di B-L. Si assume che, nella regione di energie tra E_{GUT} ed E_{EW} (detta "il deserto") non succede nulla di nuovo. In realtà, pare che il modello $SU(5)$ non funzioni perché in disaccordo con il tempo di decadimento del protone ($\tau_p \geq 10^{32}$ anni), tuttavia vi sono altre candidate (es $SU(10)$) per la GUT.

• GUTS e masse dei neutrini

In molte GUTS è possibile avere masse dei neutrini diverse da zero, secondo un meccanismo detto "see-saw". Le masse dei neutrini della famiglia i-esima sarebbero

$$m_{\nu_i} \approx \frac{m_{e_i}^2 \text{ oppure } m_{q_i}^2}{M_i}$$

dove m_{e_i} ed m_{q_i} sono le masse dei leptoni (e, μ, τ) e quark (u, c, t)

ed M_i (dette masse di Majorana) è un parametro di massa pesante che dovrebbe stare nel range

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 M_X \leq M \leq M_{pe}$$

Il meccanismo prevede che $m_{\nu_e} \ll m_{\nu_\mu} \ll m_{\nu_\tau}$, per cui è il ν_e che può essere di interesse cosmologico. Se si suppone che $M_i \sim$ la stessa per ogni famiglia, ed $M_i \sim 10^{12}$ GeV, con $m_d = m_{top} \sim 180$ GeV/c², si ha

$$m_{\nu_e} \sim 30 \text{ eV} \quad [O(10 \text{ eV})]$$

[$M_i \sim 10^{12}$ GeV è in accordo con il range sopra indicato, es-
sendo $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 M_X \sim \left(\frac{1}{50 \cdot \pi}\right)^2 10^{16} \text{ GeV}^2 \sim 4 \times 10^8 \text{ GeV}^2$]

Un valore del genere può essere in accordo con le interpretazioni delle osservazioni del flusso dei neutrini solari, secondo cui una stima di m_{ν_e} e m_{ν_μ} potrebbe essere: $m_{\nu_e} \sim 4 \times 10^{-6} \text{ eV}$, $m_{\nu_\mu} \sim 3 \times 10^{-3} \text{ eV}$.

Questi valori derivano dall'assunzione che il deficit osservato di ν_e sia imputabile ad oscillazioni dei neutrini da un tipo ad un altro se la loro massa è diversa da zero.

Se si assume che $\frac{m_{\nu_e}}{m_{\nu_\mu}} \sim \left(\frac{m_{top}}{m_{charm}}\right)^2 \sim 10^4$ (come in meccanica quantistica)

si ha $m_{\nu_e} \sim 70 \text{ eV}$ [O(10 eV)]

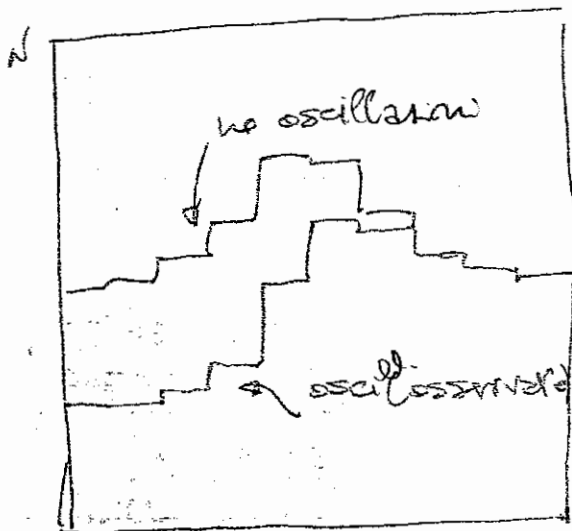
come vedremo, quest'ordine di grandezza per m_{ν_e} può contribuire in modo significativo al valore di Ω_b .

- In conclusione, le GUTs consentono l'unificazione delle forze (anche se non ancora la gravità), spiegano la quantizzazione della carica elettrica e la violazione (ma da) della conservazione di B, (che in cosmologia ma le decadi del protone non è stata osservata!). Le GUTs prevedono anche l'esistenza di (supermassicci) monopoli magnetici (di rilevanza cosmologica) e richiedono inoltre un grado elevato di "fine tuning" tra le scale E_{GUT} ed E_{EW} .

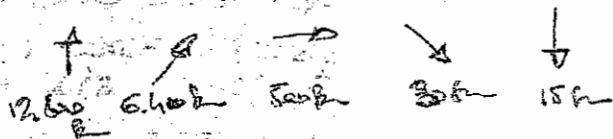
Masse neutrini

Migliori evidenze per una massa $\neq 0$ vengono dalla studio dei neutrini atmosferici e solari.

- Super KamioKANDE: dal decadimento dei fissili prodotti dai reattori: nell'atmosfera sono prodotti: ν_μ (e ν_e). Il deficit di ν_μ osservato in direzione che attraversano la



terre, compreso un cammino + lungo fino al rivelatore, sopravvive
 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ con $\Delta m_{23}^2 \sim 3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$
 per cui, se uno dei ν ha $m=0$
 allora $\sqrt{\Delta m_{23}^2} \sim 0.05 \text{ eV}$



Massa minima di $\nu + \mu + \tau$

- Neutrino solari, deficit ($\sim 1/2$) di ν_e emessi nelle reazioni di fusione nucleare

~~$\Delta m_{12}^2 \sim 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$~~ $\Delta m_{12}^2 \sim 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$

Limite cosmologico dell'osservazione delle strutture a grande scala $\sum m_\nu \lesssim 0.7 \text{ eV}$

Supersimmetria (SUSY)

(HBB/17)

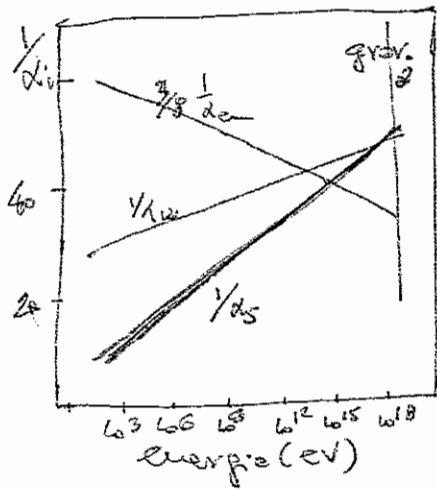
Il problema della gerarchia ("hierarchy problem"), che richiede un "fine tuning" tra le tre scale di energia molto diverse tra loro $E_{EW} (\sim 100 \text{ GeV})$, $E_{GUT} (\sim 10^{16} \text{ GeV})$, $E_{Pl} (\sim 10^{19} \text{ GeV})$, viene risolto dalle teorie Supersimmetriche. Inoltre, una forma di supersimmetria, nota come Supergravità (SUGRA) apre una via per l'unificazione della fisica delle particelle con la gravitazione. SUSY è una simmetria che trasforma fermioni in bosoni e viceversa, associando in generale tutti i numeri quantici eccetto lo spin. Nella SUSY ogni quark, leptone e bosone ha un partner supersimmetrico identico in tutto, tranne che nello spin. I partner supersimmetrici sono indicati con una tilde ($\tilde{}$) e sono denominati aggiungendo un suffisso "-ino" al nome dei bosoni ed un prefisso "s-" (= scalare) al nome dei fermioni.

Particella	Spin	Partner	Spin
quark (q)	1/2	Squark (\tilde{q})	0
leptone (l)	1/2	Sleptone (\tilde{l})	0
gluone (g)	1	Gluino (\tilde{g})	1/2
W	1	Wino (\tilde{W})	1/2
Z	1	Zino (\tilde{Z})	1/2
Higgs (H)	0	Higgsino (\tilde{H})	1/2
gluone (g)	1	gluino (\tilde{g})	1/2

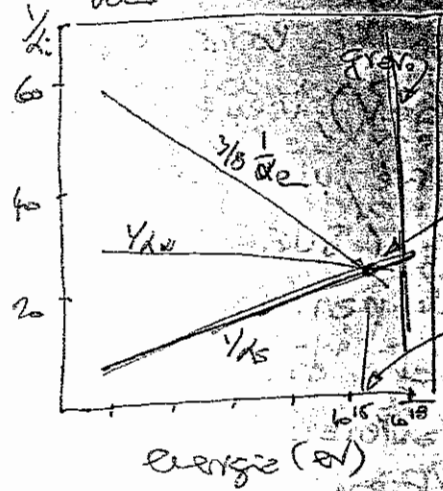
Se l'universo ed i fermioni fosse supersimmetrici ogni sparticella avrebbe la stessa massa della particella; avremmo un superetere di H con un \tilde{e} legato al protone, ulteriori interazioni deboli mediate da \tilde{W} e \tilde{Z} , ecc. Quindi

la SUSY deve essere "rotta" a basse energie. L'estensione minimale supersimmetrica del Modello Standard (MSSM) contiene anche la conservazione B-L. Questa implica l'esistenza di un ulteriore invariante della cosiddetta R-parità [le particelle dello SM hanno $R = +1$ e le sparticelle $R = -1$]. La conservazione della R-parità nei processi di scattering e decadimento ha interessanti conseguenze. Se si perde da

Modello Standard



Mod. St. + SUSY



$\frac{1}{12} \frac{1}{2e}$
 $\frac{3}{8} \frac{1}{2e}$
 $\frac{1}{15}$
 L^{15}
 L^{18}
 $2e$
 $4e$
 $6e$

L'uno stato invariante che coinvolge solo particelle ordinarie, le particelle devono essere prodotte in coppie. In generale queste particelle sono instabili e decadono rapidamente in particelle più leggere. Tuttavia la particella più leggera (lightest supersymmetric particle, LSP) non può decadere ed è quindi stabile. Per consistenza con le osservazioni cosmologiche la LSP stabile deve quasi certamente essere elettricamente neutra e neutra anche come "colore" e quindi interagisce solo debolmente con la materia, comportandosi come un neutrino stabile e massivo. È quindi un ottimo candidato per formare la "materia oscura". Al momento attuale non ci sono evidenze osservative dell'esistenza di particelle e ci hanno limiti inferiori alla loro massa che sono dell'ordine di MW .

- La scala di energia E_{SUSY} alla quale avviene la rottura della ^{SUSY} simmetria è incerta e dipende dai modelli. Si va da una E_{SUSY} leggermente superiore ad E_{EW} [caso di la rottura di SUSY potrebbe indurre anche quella EW], a valori dello ordine di $1 TeV$ [per le GUT supersimmetriche, SUGRA], o valori $E_{SUSY} \sim \sqrt{E_{EW} \cdot E_{Pl}} \sim 10^{11} GeV$ [per i modelli SUGRA].
- L'introduzione della SUSY nelle GUTs, in particolare in $SU(5)$, fa salire $E_{GUT} \approx \sim 10^{16} GeV$, risolvendo il problema del decadimento del protone, si ha anche $\alpha_i(E_{GUT}) \sim 1/25$ e le previsioni di $\sin^2 \theta_w$ sono in buon accordo con i dati sperimentali.
- Vi sono molti modelli di SUSY, oltre MSSM, tra questi vi sono quelli con violazione della R-parità (R-parity violation, RPV), in cui questa deve avvenire in condizioni opportune per evitare che processi di non conservazione di B facciano decadere il protone in tempi di molti ordini di grandezza più veloci di quelli imposti dai limiti osservativi.
- Un aspetto interessante della SUSY è che, finché non si "rischi", l'energia di punto zero ($m \hbar \omega / 2$) del vuoto, combinata di bosoni e fermioni, è identicamente nulla $[\Rightarrow P_1 = 0]$.

L'era di Planck 1

[#BB/19]

In tutti questi abbinamenti (Standard Model, SUSY, GUTs) la gravitazione è stata trascurata, e comunque trattata in modo "classico". Per esserci ancora però una teoria soddisfacente della gravità quantistica (Quantum Gravity), le nostre speculazioni sull'universo primordiale si devono formare alle soglie dell'energia $E_{pe} \equiv \left(\frac{\hbar^5}{G}\right)^{1/2} \sim 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$, quando l'universo ha un'età $t_{\text{tpe}} \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} \approx 5 \times 10^{-44} \text{ secondi}$.

L'orizzonte delle particelle ha una dimensione pari a circa l_{pe}

$$l_{pe} \equiv c t_{pe} \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm},$$

la densità è dell'ordine di

$$\rho_{pe} \sim \frac{1}{G t_{pe}^2} \sim \frac{c^5}{G^2 \hbar} \sim 5 \times 10^{93} \text{ g/cm}^3$$

e la massa entro l'orizzonte sarà

$$M_H \sim \rho_{pe} \cdot l_{pe}^3 \sim m_{pe} \equiv \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \sim 2 \times 10^{-5} \text{ g}$$

Per questo è suo tempo del BH avvenire visto che questi possono evap. emettendo particelle con massa

$$m_{ev} \sim \frac{\hbar c}{G M_{BH}}$$

Se $M_{BH} \sim m_{pe}$, vedo che $m_{ev} \sim m_{pe}$: la particella emessa si porta dietro tutta la massa del BH, e questo avviene in una sola particella di massa m_{pe} . Il tempo di evaporazione è

$$t_{ev} \sim \frac{G^2 m^3}{\hbar c^4} \quad \text{e, se } m = m_{pe}, \quad t_{ev} \sim t_{pe}$$

Dalla relazione $\rho_{pe} \sim \frac{1}{G t_{pe}^2}$, ricordando che il

1963

Buchi navi

(KBB 15 bis)

- Emissione di particelle (eff. Hawking)

$$\Delta E \sim \Delta t \sim \hbar$$

$$\Delta t \sim \frac{R_S}{c} \quad R_S = \frac{2GM_{BH}}{c^2}$$

$$\Delta E \sim \hbar T_H$$

$$\hbar T_H \cdot \frac{2GM_{BH}}{c^3} \sim \hbar \Rightarrow T_H \sim \frac{\hbar c^3}{2GkM_{BH}(\times 4\pi)}$$

corretta entro fattore numerico

- $\Delta E \sim m_{ev} \cdot c^2$ massa che evapora

$$m_{ev} c^2 \cdot \frac{2GM_{BH}}{c^3} \sim \hbar \Rightarrow m_{ev} \sim \frac{\hbar c}{GM_{BH}}$$

$$L = 4\pi R_S^2 \sigma T_H^4$$

$$t_{ev} = \frac{M_{BH} c^2}{4\pi R_S^2 \sigma T_H^4} \sim \frac{M_{BH} \cdot c^2 \cdot c^4 \cdot 8^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} G^{\frac{4}{3}} M_{BH}^{\frac{4}{3}}}{4\pi 4 G^2 M_{BH}^2 \sigma \hbar^4 c^{12}}$$

$$t_{ev} \sim \frac{G^2 M_{BH}^3}{\hbar c^4} \sim 1.5 \times 10^{66} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \text{ yrs}$$

$$M_{BH} \sim 10^{14} - 10^{15} \text{ g}$$
$$L \sim t_{ev} \sim t_0 \sim 10^{16} \text{ yr}$$

$$t_{\text{collasso gravitazionale}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$$

tempo di estensione gravitazionale è $t_g \sim \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{AB}{g} \right)^{1/2}$
Trovare che, sempre su scala t_{pe} , la materia è entrato lo
sfrondate collassa in un BH.

Posso quindi immaginarmi l'universo come un in-
sieme di BH di massa M_{pe} che evaporano e ri-
collassano continuamente, su scala t_{pe} . Questa
rappresentazione "ingenua" dell'epoca di Planck ci
mostra comunque come l'universo, a questi sta-
di di evoluzione, si comporti ben diversamente da
un fluido perfetto, e che quindi le deduzioni del-
le eq. di Friedmann che su questa ipotesi si basa-
no, potrebbero essere errate. ~~Questo è il caso~~

Quindi, in una trattazione quantistica della gra-
vitazione, la singolarità iniziale potrebbe essere
evitata.

Termodinamica dell'universo primordiale

Abbiamo già accennato che, risalendo nel tempo,
temperatura e densità crescono. Ci si aspetta quindi
che tutte le particelle raggiungano l'equilibrio termico
dinamico attraverso rapide interazioni, facilitate
dalla densità crescente. Come vedremo meglio tra
poco, il rate di interazione $\Gamma = n\sigma v$ cresce più rapi-
damente, con la temperatura, del rate di espan-
sione H , per cui $\Gamma \gg H$ a T elevate. Questo significa
che l'espansione non influenza le interazioni; attra-
verso scattering elastici si stabilisce l'equilibrio cine-
tico, e la creazione e distribuzione di particelle porta al-
l'equilibrio chimico. La materia soddisfa alle condi-
zioni di equilibrio termodinamico e di gas ideale.

Occorre che le particelle interagiscano, ma $\left[\frac{HBB}{2} \right]$
 anche che si muovano per le più liberamente.
 Come vedremo, se $T \gg H$, c'è tempo per raggiungere
 l'eq. termodinamica, ed allo stesso tempo il cam-
 mino libero medio è \gg della distanza media tra
 particelle, per cui il tempo speso in interazioni è piccolo
 rispetto al tempo totale.

- L'ipotesi di equilibrio termodinamico permette una
 trattazione molto semplice delle funzioni di distri-
 buzione delle particelle durante la fase dominante
 della radiazione ($t < t_{\text{equivalenza}}$). Le funzioni di
 distribuzione dipendono solamente dalla p di moto p
 e dalla temperatura T (non dalla posizione, per l'es-
 sima omogeneità dell'universo).
- Anche l'assunzione che le particelle fondamentali siano
 puntiformi (finora supportata dai fatti) evita un
 problema di causalità: poiché $d_{\#} = 2ct$, se l è la
 dimensione di una particella, se $t \geq l/2c$ la particella
 andrebbe considerata come un'entità causalmente non
 connessa.
- In condizioni di eq. termodinamica, la densità
 numerica di particelle ^(di una certa specie) g di moto tra p e
 $p+dp$ è data da (simmetria sferica in p , per l'isotropia)

$$d n = \frac{g}{2\pi^2 h^3} \frac{p^2 dp}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1}$$

dove $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ è l'energia², g è il numero di
 stati di spin per la specie e μ è il potenziale chimico.
 Valori di g sono: $g=1$ se $m=0$, spin=0; $g=2$ se $m=0$,
 spin $\neq 0$; $g=2s+1$ se $m_i \neq 0$, spin = s . Così $g_{\gamma} = 2$,
 $g_{e^-} = 2$, ma $g_{\nu} = 1$ perché esistono solo neutrini L e \bar{L} .
 (o antineutrini right handed)

Potenziale chimico

(HBB) 2165

Per un sistema omogeneo il I Principio della Termodinamica si scrive

$$dU = dQ - dW = dQ - PdV$$

Per un sistema eterogeneo all'equilibrio termodinamico, composto da diverse fasi, ognuna con N_i particelle, l'energia interna U può cambiare anche a cause di scambi di materia tra le fasi e il relativo dU sarà proporzionale ai dN_i , per cui riscriviamo, seguendo Gibbs,

$$dU = \underbrace{dQ}_{TdS} - PdV + \sum_i \mu_i dN_i$$

per cui le grandezze μ_i , i potenziali chimici, sono definiti come

$$\mu_i \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, V, N_{j \neq i}}$$

Posso esprimere l'entropia S della relazione di sopra:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} - \frac{\sum \mu_i dN_i}{T}$$

- Il segno $+$ e $-$ corrispondono, rispettivamente [HBB] 22
le, ai fermioni ed ai bosoni.
- In condizioni di equilibrio termodinamico ~~le~~ den-
sità in numero n_i e la densità di energia $\rho_i c^2$
della particelle di tipo "i" saranno date da:

$$n_i = \int_0^\infty \frac{dn}{dp} dp = \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\frac{E-pc}{kT}} \pm 1} \quad [E = p^2 c^2 + m^2 c^4]$$

$$\rho_i c^2 = \int_0^\infty E \frac{dn}{dp} dp = \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{E \cdot p^2 dp}{e^{\frac{E-pc}{kT}} \pm 1}$$

Per quanto riguarda la pressione P , ricordiamo
che $P = \int_0^\infty \frac{1}{3} (\bar{p} \cdot \bar{v}) \frac{dn}{dp} dp$, da $\left[P = \frac{n}{3} \langle \bar{p} \cdot \bar{v} \rangle \right]$

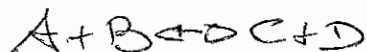
cui

$$P_i = \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{1}{3} \frac{p^2 c^2}{E} \frac{p^2 dp}{e^{\frac{E-pc}{kT}} \pm 1} =$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \gamma m \bar{v} \\ \bar{p} \cdot \bar{v} &= \bar{p} \cdot \bar{p} = \\ &= \frac{p^2 c^2 \gamma^m}{\gamma m c^2} = \frac{p^2 c^2}{E} \end{aligned}$$

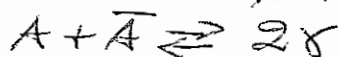
$$P_i = \frac{g_i c^2}{6\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{E (e^{\frac{E-pc}{kT}} \pm 1)}$$

- I potenziali chimici sono parametri a priori sconosciuti. In equilibrio chimico essi si conservano, nel senso che se ho una reazione del tipo



serà $\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D$ (della termodinamica chimica).

~~Reazioni del tipo~~ Reazioni del tipo



dove A e \bar{A} sono particelle e anti-particelle (4BB/23) generiche, e reazioni come

$$3\gamma \rightleftharpoons e^+ + e^- \rightleftharpoons 2\gamma$$

danno

$$\mu_A + \mu_{\bar{A}} = 2\mu_\gamma = 3\mu_\gamma = \mu_{e^+} + \mu_{e^-} \rightarrow \mu_\gamma = \phi$$

fotoni hanno distr. di Planck

e $\mu_A = -\mu_{\bar{A}}$ in generale. Quindi μ è zero per i fotoni e gli Z^0 , che possono essere associati ad energie in qualsiasi numero. Se μ_A è diverso da zero (essendo $\mu_{\bar{A}} = -\mu_A$) allora in generale

$$n_A - n_{\bar{A}} = f(\mu_A/kT) \neq 0 \text{ se } \mu_A \neq 0 \text{ e } \left(\frac{\text{funzione di ripartizione}}{\text{di } \mu_A} \right)$$

corrisponde quindi ad un valore non nullo per un numero quantico associato ad A (come la carica, il u^c per neutrino, ecc.). Empiricamente la carica elettrica dell'universo è consistente con lo zero, e u^c di barioni è estremamente minore di quello dei fotoni $(n_B - n_{\bar{B}})/n_\gamma \leq 10^{-9}$ e possiamo in prima approssimazione, nell'universo primordiale, considerare che $n_B = n_{\bar{B}}$; presunta l'emergenza (ad esempio se $B-L$ si conserva) il numero di leptoni è confrontabile con quello dei barioni. In base a queste considerazioni (Vedi ad es. Weinberg (1972) pag 530 e segg. per un discorso in esteso, o Cas e Ludwig § 8.2) si usa per le reazioni $\mu = \phi$. Questa approssimazione semplifica lo sviluppo della teoria. [Vale dire assumere che le particelle non sono distinguibili]

Ad ogni istante dell'universo c'è una distribuzione di fotoni con distribuzione Planckiana (di corpo nero) con una certa temperatura caratteristica $T_\gamma(t)$. Se una particella di un certo tipo si accoppia direttamente e indirettamente ai fotoni, e se il rateo di queste interazioni $A-\gamma$ è sufficientemente elevato (cioè se $T_A \gg T_\gamma$), allora queste particelle avranno la stessa temperatura dei fotoni: $T_A \approx T_\gamma$. Quando succede (e spesso succede) questo, allora una A si relasse a T_γ chiamando semplicemente "temperatura"

⊗ e che non ha condensato di Bose

dell'universo". ~~Q~~ ^{Tutte le} particelle di per sé (ABB/24) Cella B, C, D... che interagiscono tra loro e con A e γ in modo sufficientemente rapido e continuo anche la stessa temperatura $T_A = T_B = T_C = T_D = T_\gamma \dots$

- Nel caso in cui le particelle siano di massa nulla (es fotoni) e trascurabile ($kT \gg m_i c^2$, $E = p^2 c^2 + m_i^2 c^4$ cioè nel caso ultrarelativistico) $\approx p^2 c^2$.

$$m_i \equiv \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{pc/kT} \pm 1} \approx \frac{g_i}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{u^2 du}{e^u \pm 1}$$

Notiamo che:

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = (z-1)! \zeta(z)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt = (1-2^{1-z})(z-1)! \zeta(z)$$

\oplus
fermioni

$$= \frac{3}{2} \zeta(3)$$

\ominus
bosoni

$$= 2 \zeta(3)$$

dove $\zeta(z)$ è la funzione zeta di Riemann

$$\zeta(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du, \quad z > 1; \quad \zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.645, \quad \zeta(3) = 1.202, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.082$$

Sarà, per bosoni e fermioni (m_i), rispettivamente

$$m_{bi} = \frac{g_i}{\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{kT_i}{hc}\right)^3 \quad m_{fi} = \frac{3g_i}{4\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{kT_i}{hc}\right)^3$$

In particolare ($g_\gamma = 2$)

$$m_\gamma = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{kT_\gamma}{hc}\right)^3 \text{ e quindi}$$

$$\left[\begin{array}{l} m_{fi} = \frac{3}{4} m_{bi} \\ \text{Se T è costante} \end{array} \right]$$

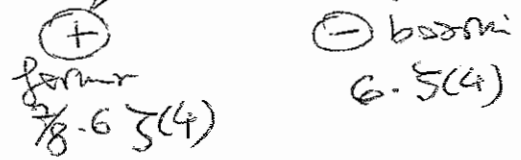
$$m_{bi} = \frac{g_i}{2} \left(\frac{T_i}{T_\gamma}\right)^3 m_\gamma(T_\gamma); \quad m_{fi} = \frac{3}{8} g_i \left(\frac{T_i}{T_\gamma}\right)^3 m_\gamma(T_\gamma)$$

dove si è tenuto conto che T_i può essere diverso (HBB 125) (vedi altro) da T_s .

Per questo riguarda la densità di energia, serve:

$$P_i c^2 = \frac{g_i c}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/kT} \pm 1} = \frac{g_i (kT)^4}{2\pi^2 h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{u^3 du}{e^u \pm 1}$$

Ricordiamo che $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$
 avremo, per bosoni e fermioni, rispettivamente,



$$P_i c^2 = \frac{7}{16} \left(\frac{\pi^2 k^4}{15 \pi^3 c^3} \right) g_i T_i^4 = \frac{7}{16} g_i a T_i^4$$

$a = 7.5659 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ (cost. di Stefan-Boltzmann)

$$b = \frac{c}{4} \cdot a$$

$$P_{bi} c^2 = \frac{1}{2} g_i a T_i^4$$

E' facile vedere che, come deve aspettarsi, risulta

$$P_i = \frac{1}{3} P_i c^2$$

L'energia media $\langle E \rangle$ per particella risulta essere

$$\langle E \rangle = \frac{P_i c^2}{n_i} = \begin{cases} \frac{7\pi^4}{180 \zeta(3)} kT = 3.15 kT & \text{fermioni} \\ \frac{\pi^4}{30 \zeta(3)} kT = 2.7 kT & \text{bosoni} \end{cases}$$

Se, nel caso opposto, le particelle sono non relativistiche, cioè $kT \ll m_i c^2$ ($pc \ll mc^2$), allora

$$E_i^2 = p^2 c^2 + m_i^2 c^4 = m_i^2 c^4 \left[1 + \frac{p^2}{m_i^2 c^2} \right]$$

da cui $E_i \approx m_i c^2 \left[1 + \frac{p^2}{2m_i^2 c^2} \right] = m_i c^2 + \frac{p^2}{2m_i}$

$$\left[E_i - \mu_i \approx m_i c^2 - \mu_i + \frac{p^2}{2m_i} \quad \text{se } \mu_i \neq 0 \right]$$

Sarà anche $e^{\epsilon/kT} \gg 1$, per cui non ci sarà differenza fra bosoni e fermioni. La densità numerica di particelle n sarà quindi:

$$n \approx \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{mc^2}{kT}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp \approx \left[e^{-\frac{mc^2 - \mu_i}{kT}} \right]_{\mu_i = 0}$$

$$= \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} (mkT)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{kT}} \int_0^\infty u^2 e^{-u^2/2} du$$

$u = \frac{p}{\sqrt{mkT}}$

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u^2/2} du = \frac{\Gamma(3/2)}{2(\frac{1}{2})^{3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

Per cui si ha:

$$n \approx \frac{g_i}{h^3} \left(\frac{mkT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{kT}}$$

taglio esponenziale!

Se calcoliamo la densità di energia $\rho_{\epsilon} \approx \frac{\rho}{V}$ (NB: $kT \ll mc^2$)

$$\rho_{\epsilon} \approx \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty \left[mc^2 + \frac{p^2}{2m} \right] p^2 e^{-\frac{mc^2}{kT}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp$$

$$= mc^2 n + \frac{g_i}{2\pi^2 h^3} \frac{(mkT)^{5/2}}{2m} \int_0^\infty u^4 e^{-u^2/2} du$$

$u = \frac{p}{\sqrt{mkT}}$

$$= mc^2 n + \frac{3}{2} mc^2 n \approx mc^2 n$$

L'energia media per particella $\langle \epsilon \rangle$ risulterà ora

$$\langle \epsilon \rangle \approx mc^2 + \frac{3}{2} kT$$

Per quanto riguarda la pressione sarà

$$P_i \approx \frac{g_i c^2}{6\pi^2 h^3} \int_0^\infty p^4 e^{-\frac{mc^2}{kT}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \frac{1 - \frac{p^2}{2mc^2}}{mc^2} dp$$

$$\approx m_i kT \left[1 - \frac{5}{2} \frac{kT}{mc^2} \right] \approx m_i kT \ll \rho_{\epsilon} c^2$$

La densità di energia di tutto lo spazio (HBB) 27
 in equilibrio si potrà scrivere come

$$\rho c^2 = \frac{kT^4}{2\pi^2 h^3 c^3} \sum_{i=\text{tutte le specie}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \int_0^\infty \frac{(u^2 + x_i^2)^{1/2} u^2 du}{e^{(u^2 + x_i^2)^{1/2}} + 1}$$

dove qui, tenendo conto con $u \equiv \frac{pc}{kT}$ e $x_i \equiv \frac{m_i c^2}{kT_i}$
 che lo spazio può avere una distribuzione termica, ma con $T_i \neq T = T_0$.

Se notiamo che il contributo a ρc^2 (come pure a P)
 delle specie non relativistiche è trascurabile, si può bene
 approssimare ρc^2 con la relazione

$$\rho c^2 \approx \rho_R c^2 = T^4 \left[\sum_{i=\text{bosoni rel.}} \frac{1}{2} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermi rel.}} \frac{1}{2} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} T^4 \left[\sum_{i=b. \text{ rel.}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f. \text{ rel.}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \right]$$

$$\boxed{\rho c^2 \approx \rho_R c^2 \approx \frac{1}{2} g_* (T) T^4}$$

$$g_* \equiv \sum_{i=b. \text{ rel.}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f. \text{ rel.}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4$$

g_* conta il numero "effettivo" di gradi di libertà delle
 particelle "non massive" (relativistiche) con $m_i c^2 \ll kT$.

Per $kT \ll 1 \text{ MeV}$ le sole specie relativistiche sono i fotoni e
 la 3 famiglia di neutrini (se $m_\nu \approx 0$); poiché $T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma$
 (vedi sopra), $g_* (\ll 1 \text{ MeV}) = 3.36$. Per $1 \text{ MeV} \leq kT \leq 100 \text{ MeV}$
 entrano in gioco anche e^+ ed e^- e $T_\nu = T_\gamma$, perciò $g_* = \frac{43}{4} = 10.75$.
 Sopra i 300 GeV tutte le particelle previste dal modello standard
 della fisica delle particelle diventano relativistiche, e
 $g_* = \frac{422}{4} = 106.75$ (vedi figura).

$$kT \ll 1 \text{ MeV}: g_* = \frac{2}{1} + \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{N_\nu}{1} \cdot \left[\left(\frac{4}{11}\right)^{1/3}\right]^4 = 3.36$$

Table 1. Effective numbers of degrees of freedom in the standard model.

Temperature	New Particles	$4 \cdot g^*$
$T < m_e$	γ 's + ν 's	43
$m_e < T < m_\mu$	e^\pm	57
$m_\mu < T < m_\pi$	μ^\pm	69
$m_\pi < T < T_c^*$	π 's	205
$T_c < T < m_{\text{strange}}$	π 's + u, \bar{u}, d, \bar{d} + gluons	247
$m_s < T < m_{\text{charm}}$	s, \bar{s}	289
$m_c < T < m_\tau$	c, \bar{c}	303
$m_\tau < T < m_{\text{bottom}}$	τ^\pm	345
$m_b < T < m_{W,Z}$	b, \bar{b}	381
$m_{W,Z} < T < m_{\text{top}}$	W^\pm, Z	423
$m_t < T < m_{\text{Higgs}}$	t, \bar{t}	427
$M_{\text{Higgs}} \leq T$	H^0	427

Handwritten notes: $\gamma + \bar{\nu} = 3$ (3×2)
 $4 \left[\frac{2}{2} + \frac{7}{8} - 2 - 1 + \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \right]$
 3.36

* T_c corresponds to the confinement-deconfinement transition between quarks and hadrons.

It is assumed that $m_{\text{Higgs}} > m_{\text{top}}$.

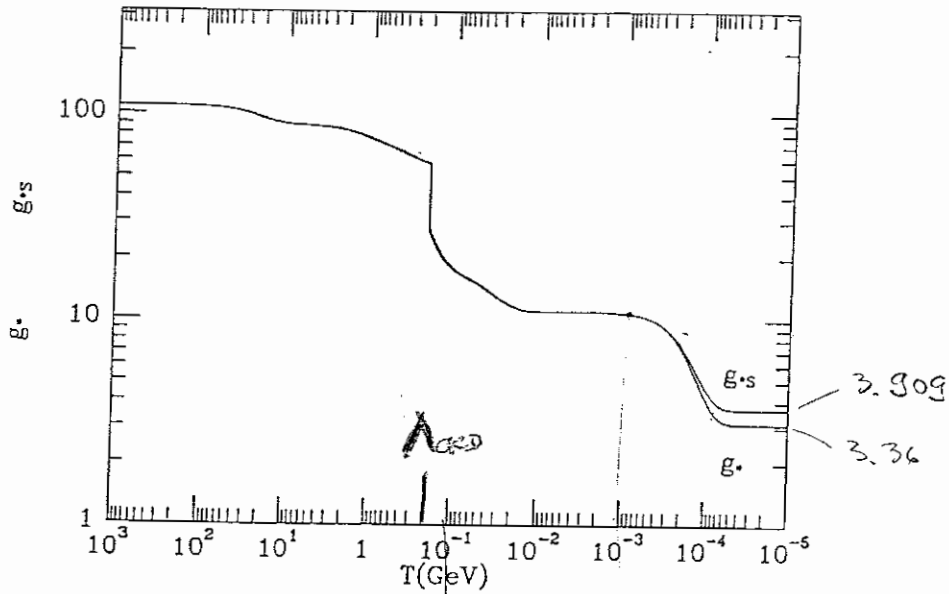


Fig. 3.5: The evolution of $g_*(T)$ as a function of temperature in the $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ theory.

1.60 MeV 1 MeV

A energie superiori a E_{EW} (g_* dipende dalla $\frac{4\pi^2}{3} \frac{28}{28}$ resta costante. Ad esempio, nel modello minimale SU(5) di GUT, sarà, per $z \gg z_{EW}$, $g_* \sim 160$. In un modello supersimmetrico, questo numero per z rimane redoppia. Se alcune particelle hanno massa minore dell'Higgs, come permesso dagli attuali limiti sperimentali, allora ci può essere qualche cambiamento nella Tabella e nel grafico della pagina precedente.

- Nell'epoca dominata dalla radiazione ($z \gg z_{eq}$), l'universo si può ben approssimare con un modello $FidS$, per cui è

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} \quad [E \sim 3kT] \quad (\text{vedi sopra})$$

Ponendo $\rho = \rho_R$, si ha,

$$t^2 \approx \frac{3c^2}{32\pi G \rho_R} \approx \frac{45 c^5 h^3}{16\pi^3 G g_*(t) k^4 T^4} = \frac{45 c^5 h^3}{16\pi^3 G g_*} \frac{3^4}{E^4}$$

da cui

$$t(\text{sec}) \approx \frac{3.25 \times 10^{20}}{g_*^{1/2} T_K^2} \approx \frac{5.57 \times 10^{-4}}{g_*^{1/2} E_{\text{erg}}^2} \approx \frac{2.2 \times 10^{-5}}{g_*^{1/2} E_{\text{GeV}}^2}$$

$$[\text{Dalla } E \sim 3kT \rightarrow T_K \approx 4 \cdot 10^{12} \cdot E_{\text{GeV}}] = \frac{2.4}{g_*^{1/2} (kT)_{\text{MeV}}^2}$$

- Possiamo, a questo punto, verificare che nell'universo primordiale vi è stata una fase di equilibrio termodinamico. Valutiamo quando $\Gamma = n\sigma v$ è maggiore di $H = \frac{1}{2t}$ (nella fase Rad. Dominated).

Il n° totale di particelle relativistiche sarà: (quelle non relativistiche sono trascurabili esponenzialmente)

$$N \approx \frac{5(3)}{4\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \left[\sum g_{B_i} + \frac{3}{4} \sum g_{F_i} \right] \approx \frac{g_*}{\pi^2} 5(3) \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3$$

$$\sim g_* = \left(\sum g_{B_i} + \frac{7}{8} \sum g_{F_i} \right)$$

Ponendo $\sigma v c$ e $\sigma \sim \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{kT}\right)^2$ (valido per particelle relativistiche)

e usando per $H = \frac{1}{2t}$ le relazioni scritte sopra, si vede che si può scrivere

$$m_{pe} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 m_{pe} c^2}{kT} g_*^{1/2} \approx \frac{5(3)3(5)}{2 \cdot 10^{12}} \approx 1$$

(488) 29

$g_* \sim 10^2 \rightarrow g_*^{1/2} \sim 10$
ad energie elevate

da cui $\frac{kT}{H} > 1 \Rightarrow kT \lesssim \alpha^2 m_{pe} c^2$ e $kT \geq m_{pe} c^2$
si hanno le
sonde possibili
ma ultravel.

ed essendo $\alpha \sim \frac{1}{30}$, $kT \lesssim 10^{-3} m_{pe} c^2 \sim 10^{16}$ GeV
 Quindi se $E \lesssim E_{GeV}$ le reazioni avvengono abbastanza rapidamente da formare l'equilibrio termodinamico, mentre ad energie più elevate le reazioni sono "congelate" ed è possibile che l'universo non sia stato in equilibrio termico [forse potrebbe essere "fossilizzato" da interazioni gravitazionali forti?].

Se consideriamo invece interazioni mediate da un bosone massiccio X , la σ (vedi pag 488 H2) varia per un fattore $\left(\frac{kT}{m_X c^2}\right)^4$ rispetto al caso precedente; quindi

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 m_{pe} c^2}{kT} \cdot g_*^{1/2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{kT}{m_X c^2}\right)^4 > 1$$

assumo anche che la particella carica X interagisce $\frac{1}{3}$ rel. $\frac{1}{m_X c^2}$

che, essendo a basse energie $g_* \sim 10$, $\alpha \sim \frac{1}{30} \sim \alpha_W$, fornisce

$$m_X c^2 \gtrsim kT \gtrsim 3 \left(\frac{m_X c^2}{100 \text{ GeV}}\right)^{4/3} \text{ MeV}$$

Se, come per i neutrini, il bosone massiccio è W^\pm o Z^0 con $m_X \sim 100 \text{ GeV}$, vedo che il neutrino si disaccoppia (cioè cessa di interagire con materia e radiazione) ad un'energia $\sim 1 \text{ MeV}$. È quindi giustificato assumere che vi sia stata un'epoca di equilibrio termodinamico.

• Verifichiamo ancora che le canoniche libere mediate dalle particelle è maggiore della mutua costante $\frac{1}{H}$ $\sim \frac{1}{H} \sim t^{-1/2}$

Sarà $\frac{\lambda}{d} \sim \frac{1}{10 \cdot 10^3} \sim \frac{1}{10^{23.5}} \sim$ (ABB/30)

$$\sim \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2/3} (\hbar c)^2}{g^{4/3} \int(z)^{2/3} (\hbar c)^2} \cdot \frac{(\hbar c)^2}{\alpha^2 (\hbar c)^2} \sim \left(\frac{\hbar}{g \alpha}\right)^{2/3} g^{4/3} \alpha^{-2}$$

Se $g \sim 1$ e $\alpha \sim 1/25$ vedo che $\frac{\lambda}{d} \sim 100$ anche ad alta energia.

Possiamo anche verificare che il rapporto tra energia cinetica e potenziale tra due particelle, come due elettroni, è dato da

$$r = \frac{E_{cin}}{E_{pot}} \sim \frac{\hbar v}{e^2/d} \sim \frac{\hbar v}{e^2} \sim \frac{\hbar v}{e^2} \frac{\pi^{2/3} \hbar c}{\hbar c} \sim \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{d} \frac{\hbar c}{d} = \frac{1}{d} \frac{\hbar c}{d}$$

Entropia Abbiamo visto che durante la maggior parte della vita dell'universo (in particolare in quella primordiale) il tasso di interazione delle particelle nel bagno Fermi, Γ_{int} , è molto maggiore del tasso di espansione, H , e che si dovrebbe mantenere un equilibrio termodinamico (TE). In questo caso l'entropia per elemento di volume comovolume rimane costante e fornisce una bellissima quantità di riferimento durante l'espansione dell'universo.

Nell'universo in espansione, la conserv. dell'energia applicata ad un volume comovolume di volume delle coordinate pari ad 1 e di volume fisico $V = a^3$ ($a =$ fattore di scala) significa che (in condizioni di equilibrio)

$$dQ = dW + dL \rightarrow T dS = d(p c^2 V) + p dV = V dp$$

$$= d[(p c^2 + p)V] - V dp$$

dalla $dS(V, T) = \frac{1}{T} d[(p c^2 + p)V] + \frac{p(T)}{T} dV =$

$$= \frac{V}{T} \frac{d(p c^2 + p)}{dT} dT + \frac{p c^2(T) + p(T)}{T} dV$$

in cui sarà $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T} \frac{d(p c^2 + p)}{dT}$ e $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{p c^2(T) + p(T)}{T}$

Dalle condizioni si fa che dS sia un differenziale (HBB/31)
 esatto $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$ segue che

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} (pc^2 + p) \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{V}{T} \frac{d(pc^2)}{dT} \right]$$

cioè

$$\frac{1}{T^2} \left\{ \left[\frac{dpc^2}{dT} + \frac{dp}{dT} \right] \cdot T - (pc^2 + p) \right\} = \frac{1}{T} \frac{dpc^2}{dT}$$

da cui $\frac{dp}{dT} = \frac{pc^2 + p}{T}$ o $dp = (pc^2 + p) \frac{dT}{T}$

Sostituendo nella relazione già ottenuta prima

$$dS = \frac{1}{T} d[(pc^2 + p)V] - V(pc^2 + p) \cdot \frac{1}{T^2} dT =$$

$$= d \left[\frac{(pc^2 + p)V}{T} + \text{costante} \right]$$

Quindi, a parte un'eventuale costante additiva, l'entropia per ~~volume~~ volume costante serve

$$S = \frac{d^3 (pc^2 + p)}{T}$$

Abbiamo già visto che nell'espansione si conserva l'energia $dQ = dU + dL = 0$, per cui

$$d(pc^2 V) + p dV = d[(pc^2 + p)V] - V dp = 0$$

e quindi

$$\frac{1}{T} d[(pc^2 + p)V] = \frac{V}{T^2} (pc^2 + p) dT \Leftrightarrow d \left[\frac{(pc^2 + p)V}{T} \right] = 0$$

Quindi, in equilibrio termico, l'entropia per volume costante S si conserva

È utile definire la densità di entropia s

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{pc^2 + p}{T}$$

Questa è dominata dal contributo delle particelle relativistiche, per cui, con ottima approssimazione, serve

$$(p = \frac{1}{3} pc^2) \quad s_i = \frac{4}{3\pi} pc^2 \quad \text{e la } s \text{ totale serve}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} a T^4 g_i$$

$$S = \frac{2}{3} a T^3 \left[\sum_{i=\text{bosoni}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermioni}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 \right] \quad (4BB|32)$$

$$= \frac{2}{45} \frac{\pi^2 k^4}{\pi^3 c^3} g_{*S}(T) \cdot T^3 = \frac{2}{45} \pi^2 k g_{*S}(T) \left(\frac{kT}{\pi c}\right)^3$$

Notiamo che se $T_i \equiv T_r$ per tutte le particelle relativistiche, come accade per buona parte della storia dello Universo primordiale, allora $g_* = g_{*S}$. Notiamo anche che S è proporzionale al numero di particelle relativistiche, e in particolare ad m_r : si ha infatti:

$$S = \frac{\pi^4}{45 \zeta(3)} \cdot k g_{*S}(T) m_r = 1.8 \cdot k g_{*S}(T) m_r$$

$$T_r = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_e$$

Oggi ($kT \leq 1 \text{ MeV}$) $g_{*S} = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \left(\frac{4}{11}\right) = 3.908$

e $S \approx 7.04 \cdot k m_r$ [Sopra 1 MeV (vedi figura) sarà $g_* = g_{*S}$]

(NB: poiché g_{*S} è funzione di T , S ed m_r non possono essere sempre visti in modo intercambiabile). Solo sopra 1 MeV

• La conservazione di S implica che $S \propto a^{-3}$ e anche che $g_{*S} \cdot T^3 \cdot a^3 = \text{costante}$ mentre l'universo si

espande.

• Poiché $S \propto a^{-3}$, allora la densità fisica di un volume co-movente $\propto a^3 \propto S^{-1}$. Quindi il numero N di particelle di una certa specie in un volume co-movente, $N \equiv a^3 \cdot n$, è uguale alla densità numerica n divisa per S :

$$N_i \equiv n_i / S$$

e, in equilibrio termico:

$$N_i = \left(\frac{3/4 - 1}{1 - 1/6}\right) \cdot \frac{45 \zeta(3)}{2 \pi^4} \frac{g_i}{k g_{*S}}$$

$$= \frac{45}{4 \sqrt{2} \pi^{7/2}} \frac{1}{k} \frac{g_i}{g_{*S}} e^{-\frac{m_i c^2}{kT}} \left(\frac{m_i c^2}{kT}\right)^{3/2} \quad kT \ll m_i c^2$$

← si conserva se non c'è creazione o distruzione di particelle
 $m_i c^2 \ll kT$

$$m_r = \frac{2}{3} \zeta(3) \left(\frac{kT}{\pi c}\right)^3$$

Se il numero di particelle in un volume co-mo- (HBB/33)
 vuole non cambia (cioè particelle non vengono né create
 né distrutte), allora $N \equiv n/S$ rimane costante.

- Il numero di barioni in un volume co-movente è

$$\frac{M_B}{S} \equiv \frac{M_b - M_{\bar{b}}}{S}$$

(cioè la differenza tra ba-
 rioni ed anti-barioni)

Forse che le interazioni che non conservano il n° bario-
 nico (se esistono!) avvengono molto lentamente,
 M_B/S è conservato.

- Tuttavia il rapporto barioni-fotoni

$$\eta \equiv \frac{M_B}{m_\gamma} = 1.8 \cdot g_{*S}(T) \cdot \frac{M_B}{S}$$

non rimane costante perché g_{*S} cambia con T .
 Ma dopo le annichitazioni degli e^- ed e^+ (a 0.5 MeV)
 g_{*S} è costante ($= 3.36$) e $\eta \approx 7$ e M_B/S ed M_B/S sono
 intercambiabili.

- Il fatto che $S = g_{*S} T^3 a^3 = \text{costante}$ implica
 che la temperatura dell'universo evolve come

$$T \propto g_{*S}^{-1/3} a^{-1}$$

Se $g_{*S} = \text{cost.}$ otteniamo $T \propto a^{-1}$. Il fattore
 $g_{*S}^{-1/3}$ entra in gioco perché quando una parti-
 cella diventa non-relativistica e sparisce (perché la
 reazione $A + \bar{A} \rightarrow 2\gamma$ è sempre meno compensata dal-
 la reazione inversa di creazione di coppie), la sua
 entropia è trasferita alle altre particelle rela-
 tivistiche presenti, facendo sì che T decresca più
 lentamente.

Verifichiamo di entropia

Dalle relazioni già viste

$$dS = \frac{dU + PdV - \sum \mu_i dN_i}{T}$$

con $U = pc^2 \cdot V = pc^2 a^3$ $V = a^3$

$$dS = \frac{d(pc^2 a^3) + P d(a^3) - \sum \mu_i dN_i}{T}$$

ricordando che dalle (F3) $\rightarrow d(pc^2 a^3) + P d(a^3) = 0$,
si ottiene

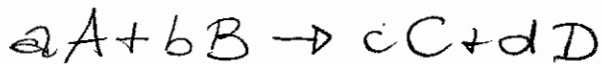
$$dS = - \sum_i \frac{\mu_i}{T} dN_i$$

che, usando le densità proprie invece delle grandezze
comolute, si può scrivere

$$d(S a^3) = - \sum_i \frac{\mu_i}{T} d(\underbrace{N_i}_{N_i} a^3)$$

• Vedo che per aver variazioni di entropia ($dS \neq 0$)
devo avere creazione o distruzione di particelle, in
modo che $N_i a^3 \neq \text{costante}$, $dN_i \neq 0$.

• Ma non dobbiamo nemmeno essere in equilibrio
termodinamico. Infatti in eq. termodinamico una
reazione che trasforma, ad esempio, le particelle A e B
nelle particelle C e D



porta alla relazione tra i potenziali chimici

$$a\mu_A + b\mu_B = c\mu_C + d\mu_D \quad [\text{con } a, b, c, d \in \mathbb{N}]$$

Ma a, b, c, d saranno proporzionali alle variazioni del numero
di particelle: $a\alpha - \Delta N_A$, $b\alpha - \Delta N_B$, $c\alpha + \Delta N_C$, $d\alpha + \Delta N_D$, per cui

$$\sum \mu_i \Delta N_i = 0$$

e di nuovo otteniamo $dS = 0$!

Serve quindi un decadimento fuori eq. termodinamico.

- Se una **particella ultra-relativistica** si **disaccoppia** al tempo $t=t_D$, quando $T=T_D$ e $a=a_D$, non beneficia dello scambio di entropia dovuto all'annichilazione (a $T<T_D$) delle altre specie. Dopo il disaccoppiamento $p \propto 1/a \Rightarrow p=(a_D/a)p_D$ e (se la particella è stabile) $n=(a_D/a)^3 n_D$; poichè $p \propto 1/a$, n sarà

$$n = \frac{g_i}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{a_D}{a} \right)^3 \int_0^\infty \frac{p_D^2 dp_D}{e^{\frac{c \cdot a_D p_D}{kT} \frac{a_D p_D}{a}} \pm 1}$$

che fornisce la corretta dipendenza da a se **$T=(a_D/a)T_D$** . La funzione di distribuzione mantiene la sua forma, ma con una $T \propto a^{-1}$ invece della $T \propto g_{*S}^{-1/3} a^{-1}$ che vale per il resto delle particelle ancora accoppiate.

(Se la particella - ad esempio un neutrino "leggero"- diviene alla fine non relativistica, la sua distribuzione dei momenti mantiene la sua forma, con $T \propto a^{-1}$).

Questo spiega anche perchè i **fotoni del CMB**, dopo l'ultimo scattering (a $z_{ls} \approx 1100$) e quindi ormai disaccoppiati dai barioni e non più in equilibrio termodinamico, **mantengono lo spettro di corpo nero**.

NEUTRINI

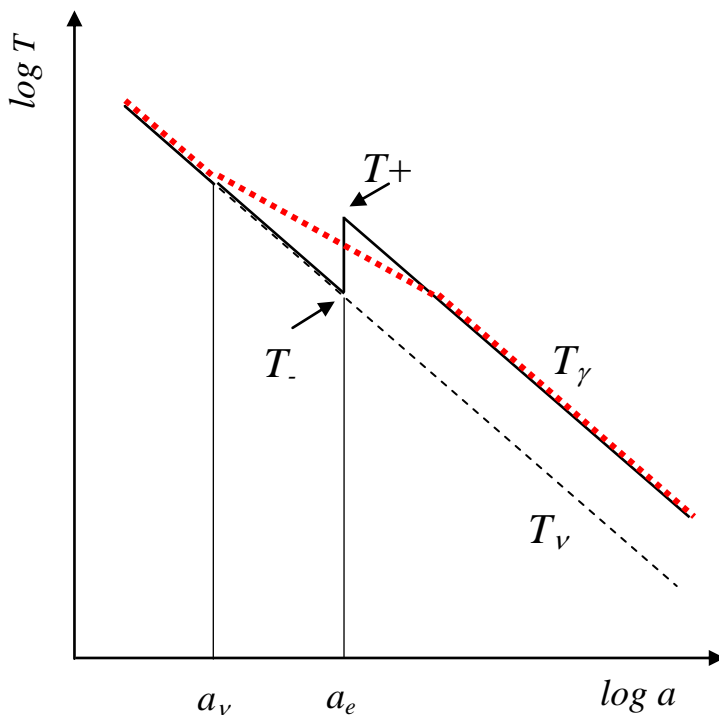
- Abbiamo già detto che per $E \sim 1 \text{ Mev}$ i neutrini (ν) si disaccoppiano dalle altre particelle quando $a=a_\nu$ e quindi, mentre prima $T_\nu=T_\gamma$, sotto questa energia **$T_\nu=T_\gamma(a_\nu/a)$** . Ma poco sotto questa energia, a $E \sim 0.5 \text{ Mev}$ ($a=a_e$), elettroni e positroni si annichilano, e la loro entropia va ai

fotoni, ma non ai neutrini ormai disaccoppiati. Per le particelle ancora accoppiate (e^+ , e^- e γ per $a < a_e$, γ soli per $a > a_e$) si conserva l'entropia ($g_{*S} T^3 a^3 = \text{cost.}$) e, indicando con a_- , T_- ed a_+ , T_+ i valori subito prima e subito dopo l'annichilazione, avremo ($a_+ \approx a_e \approx a_-$):

$$g_{*S} T^3 a^3 = \overbrace{\left(\underset{\gamma}{2} + \frac{7}{8} \cdot \underset{e^+ + e^-}{2} \cdot \underset{g_i}{2} \right) T_-^3 a_-^3}_{\text{prima}} = \overbrace{2 T_+^3 a_+^3}_{\text{dopo}}$$

da cui

$$\frac{T_-}{T_+} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} = \frac{T_\nu}{T_\gamma}$$



Poichè dopo a_e entrambe le temperature scalano come $1/a$, il rapporto tra T_ν e T_γ si mantiene inalterato nel tempo e se $T_{\gamma 0} = 2.73 \text{ K}$, $T_{\nu 0} = 1.95 \text{ K}$.

In realtà, la temperatura non sale bruscamente, ma decresce più lentamente di $1/a$ finchè non termina l'annichilazione di e^+ e e^- (vedi linea punteggiata)

- Per l'odierno **CMB** risulta:

$$\rho_{\gamma 0} = \frac{a T_{\gamma 0}^4}{c^2} = 4.67 \cdot 10^{-34} \left(\frac{T_{\gamma 0}}{2.73} \right)^4 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\frac{s_0}{k} = \frac{2\pi}{45} g_{*S}(T_{\gamma 0}) \left(\frac{k T_{\gamma 0}}{\hbar c} \right)^3 = 2934 \left(\frac{T_{\gamma 0}}{2.73} \right)^3 \text{ cm}^{-3}$$

$$n_{\gamma 0} = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{k T_{\gamma 0}}{\hbar c} \right)^3 = 417 \left(\frac{T_{\gamma 0}}{2.73} \right)^3 \text{ cm}^{-3}$$

- Per ogni famiglia di neutrini, contando ν e $\bar{\nu}$,

$$\frac{n_{\nu+\bar{\nu}}}{n_{\gamma}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{T_{\nu}}{T_{\gamma}} \right)^3 = \frac{3}{11}$$

g_{ν} $\nu+\bar{\nu}$
 \swarrow \downarrow
 \uparrow \nearrow
 g_{γ}

$$n_{\nu+\bar{\nu},0} = 114 \left(\frac{T_{\gamma 0}}{2.73} \right)^3 \text{ cm}^{-3}$$

- Possiamo stimare allora il contributo dei neutrini alla materia oscura non barionica $\Omega_{\nu} h^2$ per N_{ν} ($N_{\nu}=3$) famiglie di neutrini:

$$\Omega_{\nu} h^2 = 0.011 \sum_{i=1}^{N_{\nu}} \left(\frac{m_{\nu i}}{1 \text{ eV}/c^2} \right)$$

Fondo di reliitti cosmici

E' possibile prevedere, in linea di massima, l'effetto cosmologico che possono avere delle particelle massive debolmente interagenti: (weakly interacting massive particles, WIMPs) o, in alternativa, vedere i vincoli che la cosmologia può porre su masse ed densità di queste particelle.

Due sono i casi possibili rispetto alle condizioni in cui avviene il disaccoppiamento dei WIMPs. Se il disaccoppiamento avviene ad una temperatura T_D tale che $kT_D \gg m_w c^2$, le particelle sono relativistiche al disaccoppiamento (si parla allora di Hot Dark Matter, HDM), se invece $kT_D \ll m_w c^2$ i WIMPs si disaccoppiano quando non sono più relativistici, e si parla di COLD Dark Matter (CDM). Vediamo i due casi separatamente.

HDM Se non vi è decadimento delle particelle, dopo il disaccoppiamento $n \cdot a^3 \propto \frac{n}{S} \propto N = \text{cost.}$ e $N(T_0) = N(T_D) = \int \frac{g_i}{2\pi^4} \frac{g_i}{k g_{*S}(T_D)} = \frac{n_0}{S_0}$ (vedi HBB/32)

Sostituendo l'espressione di S_0 : $S = 1.68 g_{*S}(T) \left(\frac{M_P}{M_P}\right)^2$ $M_P = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{kT}{hc}\right)^2$
 $n_0 = \int \frac{g_i}{2\pi^4} \frac{g_i}{g_{*S}(T_D)} \left(\frac{kT_0}{hc}\right)^3 \left| \begin{aligned} g_{*S}(T_0) &= 3.365 \\ T_0 &= 2.728 \pm 0.002 \end{aligned} \right.$
 $\approx \int \frac{3/4}{1} \frac{g_i}{g_{*S}(T_D)} \cdot 813 \cdot \left(\frac{T_0}{2.728}\right)^3 \text{ cm}^{-3}$

Se i WIMPs sono fermioni $n_0 \approx 610 \frac{g_i}{g_{*S}(T_D)} \text{ cm}^{-3}$

Queste particelle saranno diventate non relativistiche nel passato, quando $kT_{ur} \sim m_w c^2$, se $m_w c^2 > kT_0 \sim 2 \times 10^{-4} \text{ eV}$ [se $m_w c^2 < 2 \times 10^{-4} \text{ eV}$ esse continueranno a comportarsi ancora oggi, e tutti gli effetti, come neutrini privi di massa]

Se le particelle off-sono non relativistiche,

|Rc|2

$\rho_0 = m_0 m_w$, che fornisce $\Omega_w = \frac{m_0 m_w}{\int \rho dr}$
 c^2

$$\Omega_w h^2 \approx 0.058 \frac{g_i}{g_{*S}(T_D)} \cdot \left(\frac{m_w}{1 \text{ eV}/c^2} \right) \quad (*)$$

anche

$$m_w \approx 17 \frac{g_{*S}(T_D)}{g_i} \Omega_w h^2 \text{ eV}/c^2$$

■ I neutrini si disaccoppiano a $T_D \sim 1 \text{ MeV}$, quando $g_{*S} \approx 10.75$ [ricordiamo che per i neutrini $g_i = 1$]; se teniamo conto di ν e $\bar{\nu}$, e di tre famiglie di ν , allora

$$\Omega_\nu h^2 \approx \frac{0.058 \cdot 2}{10.75} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_{\nu_i}}{1 \text{ eV}/c^2} \right)$$

$$\Omega_\nu h^2 \approx 0.011 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_{\nu_i}}{1 \text{ eV}/c^2} \right)$$

Se prendiamo come contributo massimo per le HDM, dedotto dalle primarie di struttura, $\Omega_\nu \approx 0.15$, e usiamo $h \approx 0.65$

[tipica delle attuali stime $0.55 \leq h \leq 0.75$] abbiamo $\left\{ \begin{array}{l} \text{WMAP: } \Omega_\nu h^2 \approx 0.006 \\ \text{+ LSS} \\ 2 \frac{m_\nu}{\text{eV}} \approx 0.7 \end{array} \right.$

~~$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_{\nu_i}}{1 \text{ eV}/c^2} \right) \leq 6 \quad (\leq 7 \text{ se } h \approx 0.72)$$~~

■ Ricordiamo che alcuni segnali per la possibile massa dei neutrini, basati sulle evidenze di oscillazioni dei neutrini solari, atmosferici ed "artificiali" all'LSND (= Liquid Scintillator Neutrino Detector), preferiscono masse $\sim 1 \text{ eV}/c^2$ per due di questi (ν_μ e ν_τ) e masse molto minori ($\sim 10^{-3} \text{ eV}/c^2$) per il ν_e , assieme all'esistenza di un quarto neutrino "sterile" ν_s , che interagisce molto più debolmente degli altri e non viene quindi "visto" nel decadimento della Z^0 .

Ricordiamo inoltre che, trascurando i dati LSND non confermati al momento da altre osservazioni, è possibile spiegare le osservazioni con tre soli neutrini.

~~■ Se immaginiamo altre particelle che, interagendo (RC/3) molto più debolmente dei neutrini, si disaccoppiano a T_D più alte, i limiti sulle loro massa possono essere finché solo le $g_{*S}(T_D)$. Ad esempio, sopra ~ 300 GeV, $g_{*S}(T_D) \sim 100$ e m_W può anche essere un ordine di grandezza maggiore delle scale basate su $T_D \sim 1$ MeV.~~

■ Se invece, ~~se invece~~ ^{altre} abbiamo ~~una~~ particelle che interagiscono debolmente come i neutrini, la relazione (*) di pag (RC/2) continua a valere finché la massa dei WIMPs è tale che essi sono relativistici a $T \sim T_D \sim 1$ MeV. Quando $m_W \sim 1$ MeV/c² la (*) cessa di valere, in corrispondenza di $\ln \Omega_{DM} h^2 \sim 10^4$.

■ Quando le particelle di DM si disaccoppiano, esse sono relativistiche, e per esse vale la relazione (HBB/25)

$$\langle E \rangle \sim 3kT \quad \text{con} \quad E \sim \langle p \rangle c \Rightarrow \langle p \rangle c \sim 3kT$$

Poiché sia p che $T (= T_D)$ scalano come $1/a^2$, questa relazione vale anche quando le particelle sono non relativistiche, con $\langle p \rangle \rightarrow m \langle v \rangle$, per cui

$$m \langle v \rangle c \sim 3kT \quad \rightarrow \quad \langle v \rangle \sim \frac{3kT}{mc} \sim 150 \left(\frac{m}{1 \text{ eV}/c^2} \right)^{-1} \text{ km/s}$$

Questa velocità, per $m \sim 1 \text{ eV}/c^2$, è abbastanza elevata, da cui il nome di Hot DM, notiamo che questa velocità era ancora più elevata a z grande, con conseguenze sulle scale di strutture sub-galattiche.

■ Notiamo che la densità attuale dei relitti cosmici dipende dalla T_D attraverso $g_{*S}(T_D)$. Se, pur rimanendo relativistici al disaccoppiamento, questo avviene a T maggiore di ~ 1 MeV [questo richiede che le particelle interagiscano molto più debolmente dei neutrini], g_{*S} cresce e m_0 cala, consentendo, entro i limiti cosmologici, una m_W maggiore. Se consideriamo ad esempio una specie con $g_i = 2$ e che si è un fermione, se $T_D \gtrsim 300$ GeV, $g_{*S} \gtrsim 106.75$ otteniamo

$$\sigma_{wh}^2 \approx 1.1 \times 10^{-3} \left(\frac{m_w}{1 \text{ eV}/c^2} \right) \approx \frac{m_w}{910 \text{ eV}/c^2} \quad (\text{RC14})$$

Essendo la massa maggiore di quella dei neutrini, anche le $\langle \sigma \rangle$ ~~sono~~ calerà di un fattore simile, alleviando i problemi per la formazione di strutture. Si parla in questo caso di Warm Dark Matter (WDM) e come possibili candidati vi sono il gravitino e il fotino "leggeri" (dove "leggero" significa con $m \ll 1 \text{ keV}/c^2$ o un neutrino sterile con $m \sim 1 \text{ keV}/c^2$)

■ **CDM** Se abbiamo invece particelle che si disaccoppiano quando sono già non-relativistiche, la loro densità numerica rispetto ai fotoni sarà molto minore e la loro massa potrà essere quindi, rispetto ai vincoli cosmologici) molto maggiore, con una velocità anch'essa molto minore delle particelle di WDM. Da qui il nome di Cold Dark Matter.

• In questo caso il risultato finale dipende dai dettagli del "supplemento", a differenza di quanto accade per le WDM.

• Vediamo l'equazione che governa l'evoluzione delle densità di particelle. Se non abbiamo creazione o distruzione di particelle, la relazione $n \propto 1/a^3$ porta alla equazione

$$\dot{n} + 3Hn = 0$$

Se abbiamo invece distruzione (annichitazione) e creazione con un termine sorgente S , avremo

$$\dot{n} + 3Hn = -\langle \sigma \sigma \rangle n^2 + S$$

dove σ è la sezione d'urto totale di annichitazione e σ è la velocità delle particelle. Se fossimo in condizioni stazionarie ($H \approx 0$), si otterrebbe per n il valore di equilibrio termicamente alla temperatura dell'universo, per cui sarebbe ($\dot{n} = 0$)

$$-\langle \sigma \sigma \rangle n_{\text{eq}}^2 + S = 0 \rightarrow S = \langle \sigma \sigma \rangle n_{\text{eq}}^2$$

$$\dot{n} + 3Hn = -\langle\sigma v\rangle n^2 + S \quad ; \quad \text{Se } H=0 \quad \dot{n} = 0$$

annuliert. creation

$$-\langle\sigma v\rangle n_{eq}^2 + S = 0$$

28 $S = \langle\sigma v\rangle n_{eq}^2$

the collision rate is $\Gamma = n\langle\sigma v\rangle$; likewise, the source term for thermal particle creation is $S = \langle\sigma v\rangle n_T^2$; thus, the continuity equation changes to read

$$\dot{n} + 3Hn = -\langle\sigma v\rangle [n^2 - n_{eq}^2]$$

$$\dot{n} + 3Hn = -\Gamma n + S = -\Gamma n \left(1 - \frac{n_T^2}{n^2}\right) \quad (1.115)$$

- we now introduce the comoving number density $N := a^3 n$; substituting from $\dot{N} = a^3(3Hn + \dot{n})$ in (1.115) yields

$$\dot{N} = -\Gamma N \left(1 - \frac{N_T^2}{N^2}\right) \quad (1.116)$$

substituting further

$$\frac{d}{dt} = \dot{a} \frac{d}{da} = aH \frac{d}{da} = H \frac{d}{d \ln a} \quad (1.117)$$

yields

$$\frac{d \ln N}{d \ln a} = -\frac{\Gamma}{H} \left(1 - \frac{N_T^2}{N^2}\right) \quad (1.118)$$

- thus, if the comoving number density is thermal, $N = N_T$, it does not change; if N deviates from N_T , it needs to change for re-adjustment to its thermal equilibrium value N_T ; this is impossible if $\Gamma \ll H$ because then the rate of change becomes too small; then, the particles freeze out of thermal equilibrium
- for relativistic particles, $n \propto T^3 \propto a^{-3}$, thus $N = a^3 n = \text{const.}$; according to the freeze-out equation (1.118),

$$\frac{d \ln N}{d \ln a} = 0 \Rightarrow N = N_T \quad (1.119)$$

this implies that relativistic particle species retain their thermal-equilibrium density regardless of Γ/H , i.e. even after freeze-out

- for non-relativistic particles, the comoving number density in thermal equilibrium is

$$N_T \propto T^{-3/2} e^{-mc^2/kT} \quad (1.120)$$

for $kT \lesssim mc^2$, N_T drops exponentially, i.e. very quickly $N_T \ll N$, then

$$\frac{d \ln N}{d \ln a} \approx -\frac{\Gamma}{H} \rightarrow 0 \quad (1.121)$$

$$N_i \propto T^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{kT}}$$

$$N_i \propto m_i a^3 \quad a \sim \frac{1}{T}$$

$$N_i \propto \frac{T^{3/2}}{T^3} e^{-\frac{mc^2}{kT}}$$

as the collision rate falls below the expansion rate; the actual comoving number density of particles then remains constant, while its thermal-equilibrium value drops to zero

$\frac{\Gamma}{H} \sim 1$ for congelation cuts: buona approssimazione

Per stimare Γ occorre $\langle G_A \cdot \sigma \rangle$.

• Per $m_W < m_{Z_0}$ $\langle \sigma \rangle \sim \sigma_0 c$

con

$$\sigma_0 \sim \frac{5}{2\pi} \frac{G_F^2 m_W^2}{\hbar^4} = \frac{5}{2\pi} \frac{G_F^2 (m_W c^2)^2}{(\hbar c)^4} \propto m_W^2$$

La condizione $\Gamma/H \approx 1$ forte alla fine (vedi dettagli in "The Early Universe" di Kolb & Turner p. 129 e segg.)

$$\Omega_\omega h^2 \sim 3 \left[1 + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{m_W c^2}{\text{GeV}} \right) \right] \cdot \left(\frac{m_W c^2}{\text{GeV}} \right)^{-2} \sim 3 \left(\frac{m_W c^2}{\text{GeV}} \right)^{-2}$$



$$0.1 < \Omega_\omega h^2 < 1 \Rightarrow 2 \lesssim m_W \lesssim 5 \text{ GeV}, \quad |m_W \sim 1 \text{ GeV}|$$

Limite di Lee-Weinberg (Vedi figura pag. successiva)

• Per $m_W > m_{Z_0}$ $\sigma_0 \propto m_W^{-2}$

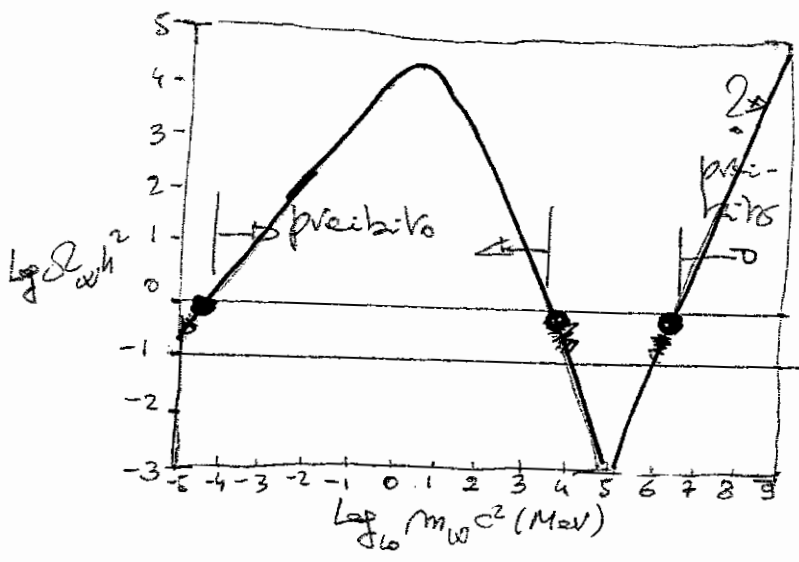
$$\sigma_0 \sim \frac{5}{2\pi} \frac{G_F^2}{(\hbar c)^4} (m_W c^2)^2 \cdot \left(\frac{m_{Z_0} c^2}{m_W c^2} \right)^4$$

$$\Gamma/H \sim 1 \Rightarrow \Omega_\omega h^2 \approx 0.1 \left[1 - \frac{\ln(m_W c^2)_{\text{TeV}}}{30} \right] (m_W c^2)_{\text{TeV}}^2$$

$$\Omega_\omega h^2 \approx 0.1 (m_W c^2)_{\text{TeV}}^2 \Rightarrow 0.1 \lesssim \Omega_\omega h^2 \lesssim 1 \text{ implica}$$

$$1 \lesssim m_W \lesssim 3 \text{ TeV}$$

$$|m_W \sim 1 \text{ TeV}|$$



(RC/10)

~~Ancora qui: se
 $\Omega_{dm}^2 \leq 1 \rightarrow m_{\tilde{W}} c^2 \lesssim 3 \text{ TeV}$
 se $\Omega_{dm}^2 \approx 0.3$, $h \approx 0.65$
 $m_{\tilde{W}} c^2 \lesssim 1 \text{ TeV}$ $[\Omega_{dm}^2 = 0.113]$
 $m_{\tilde{W}} c^2 \approx 2 \text{ TeV}$~~

La figura mostra il contributo a Ω_{dm}^2 di particelle che interagiscono debolmente. Come si vede, alcuni intervalli di massa

sono esclusi, perché Ω_{dm}^2 sarebbe troppo grande (e mass che i neutrini non decadono). Altri intervalli di massa sono, dal punto di vista della cosmologia, poco interessanti perché il contributo ad Ω_{dm}^2 è trascurabile. Come abbiamo visto, i valori "interessanti" sono, per le HDM, $m_{\tilde{W}} c^2 \sim 1-10 \text{ eV}$ e, per le CDM, $m_{\tilde{W}} c^2 \sim 1 \text{ GeV}$ e $m_{\tilde{W}} c^2 \sim 1 \text{ TeV}$. Questo vale per particelle che interagiscono debolmente (cioè con interazioni nucleari deboli).

• Nel caso in cui i candidati per la materia oscura siano particelle supersimmetriche, i calcoli sulla loro abbondanza residua dipendono dalle assunzioni fatte sui molti parametri liberi dei modelli di SUSY. Come già detto (HBB/18), la LSP (lightest supersymmetric particle) è il candidato ideale. In particolare, il candidato considerato più favorito è il neutralino ($\tilde{\chi}$) che è in realtà la sovrapposizione lineare di più basse massa di fotino ($\tilde{\gamma}$), zino (\tilde{Z}) e due stati di Higgsino ($\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0$):

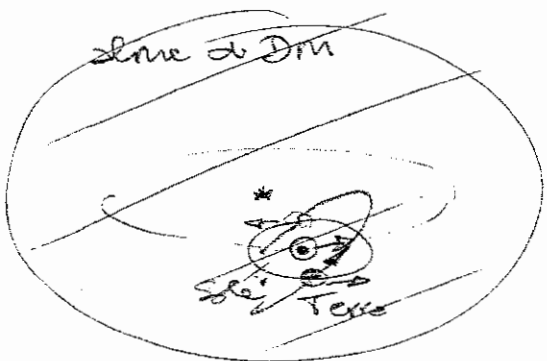
$$\tilde{\chi} = a_1 \tilde{\gamma} + a_2 \tilde{Z} + a_3 \tilde{H}_1^0 + a_4 \tilde{H}_2^0$$

Le previsioni sulle loro abbondanza dipendono da varie assunzioni, a causa dei numerosi parametri liberi presenti nei modelli di SUSY, anche nella MSSM.

• Tra i metodi diretti per l'osservazione di WIMPs (RC/11) vi sono quelli che sfruttano lo scattering di questi sui nuclei di un bersaglio. Il rate R di reazioni sarà

$$R = N \int \phi(E) \sigma(E) dE$$

con $N = n \cdot A$ di atomi bersaglio, ϕ flusso di particelle di DM e σ sezione d'urto ($E = \text{energia}$). Dai moti delle stelle vicini al Sole e perpendicolarmente al piano galattico si può stimare la densità locale di massa, escludendo le masse di stelle, nane bianche, ecc., si ottiene una stima della densità dell'alone di DM vicino al Sole, che risulta di $\sim 0.18 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-3} \sim 0.3 \text{ GeV}/c^2 \text{ cm}^{-3}$ (0.45). Negli esperimenti in cui lo scattering WIMP-nucleo è elastico, il nucleo colpito rimbalza e cede il momento, questa commoazione viene rivelata.



Un fenomeno tipico che ci si aspetta di vedere in questi esperimenti è una modulazione di frequenza annuale dei conteggi R . Le stelle prossime al nostro orbitano al centro della galassia con una velocità di $\sim 220 \text{ km s}^{-1}$

ed il Sole si muove rispetto a queste con una velocità maggiore di 12 km s^{-1} , per cui esso viaggia a $\sim 232 \text{ km s}^{-1}$. La Terra \oplus ruota a sua volta, in un'orbita attorno al Sole con una velocità di 30 km s^{-1} , ^{su un'orbita} inclinata di circa 60° sul piano galattico. La \oplus ha quindi una vel. max sul piano galattico $v_+ \sim 232 + \frac{30}{\cos 60^\circ} = v_+ = (232 + 15) \text{ km s}^{-1}$ il 2/6 ed una minimo $v_- = (232 - 15) \text{ km s}^{-1}$ all'inizio di gennaio. Se supponiamo che i WIMPs siano omogenei (in realtà hanno una distribuzione di velocità) allora i conteggi saranno $R \sim N \cdot \sigma \cdot v_{\oplus} \cdot \rho$, con ρ densità in numero di WIMPs [si è supposto di considerare la σ totale, su tutte le energie], per cui avrà un valore max ed una min di R : $R_+ \sim N \sigma v_+ \rho$, $R_- \sim N \sigma v_- \rho$

Questo porta ad uno scostamento $[\bar{R} = \frac{R_+ + R_-}{2}]$ (RC/12)

$$\frac{R_+ - (\bar{R})}{(\bar{R})} \sim \frac{15}{232} \sim 0.06 \sim 5\%$$

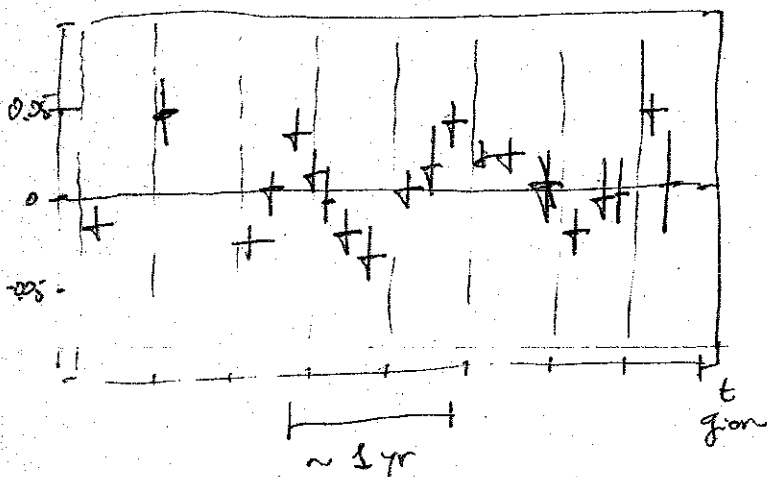
Quando ci si aspetta una modulazione di quest'ordine nei conteggi. Questo è stato osservato (anche se i risultati possono essere controversi) dell'esperimento DAMA, fatto al Laboratorio Nazionale del Gran Sasso, che usa ~ 500 kg di

NaI come bersaglio e lavora da circa $\frac{1}{2}$ anni.

I risultati suggeriscono un valore di

$$30 \text{ GeV} \leq M_{\chi} c^2 \leq 130 \text{ GeV}$$

al 1- σ conf. level.



ed un valore di $\xi \cdot \sigma_p$ [dove $\xi = \frac{\rho_{\chi}}{0.3 \text{ GeV}/(c^2 \text{ cm}^3)}$; σ_p sezione d'urto per il protone nell'interazione con il χ] $\approx 10^{-6} \text{ cm}^2$

Modelli ragionevoli di neutralino possono fornire valori di $\sigma_{\chi p}$ di interesse cosmologico.

Vedi il sito www.LNGS.infn.it alle voci preprints

Oltre a questi citati finora, ce sono relativistici ter-
minici cioè in equilibrio termodinamico con le altre
 componenti: fino alla disaccoppiamento, vi sono i cosiddetti
relativistici non termici, tra cui le "motrici"
~~le "motrici"~~ espressioni. Queste fermioniche, se cosmiche
 esistono, non essendo mai state in equilibrio termico con il
 resto dell'universo, hanno velocità trascurabili anche
 rispetto alla CDM. La loro evoluzione è simile a quella
 delle fluttuazioni di CDM. [$1 \mu\text{eV} \leq m \leq 1 \text{ meV}$]

• Per i neutrini massivi, e per i fermioni debolmente interagenti (WIMP) in generale, si può trovare una stima minima della massa m_ν (Gunn & Tremaine, 1979).

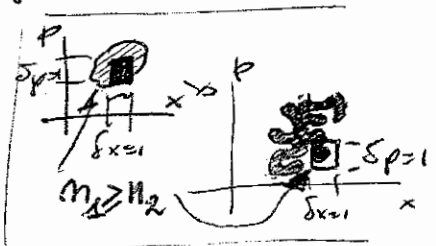
Il numero di neutrini δN_ν in un elemento di volume $d^3p d^3x$ dello spazio delle fasi sarà

$$\delta N_\nu = n_\nu \cdot d^3p d^3x, \text{ con } n_\nu = \frac{g}{h^3} \frac{1}{e^{E/kT} + 1}$$

n_ν densità nello spazio delle fasi.

Il valore massimo di n_ν , n_ν^{\max} , forma spettrale neutrinica ($\nu + \bar{\nu}$) si avrà per $E \rightarrow 0$, e sarà

$$n_\nu^{\max} = \underset{(\nu + \bar{\nu})}{2} \cdot \frac{g}{h^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{g}{h^3}$$



Sia per il Teorema di Liouville (la densità nello spazio delle fasi entro un elemento di volume non cambia, anche se può cambiare forma e volume, se le particelle sono non interagenti), che per il principio di esclusione di Pauli, la densità media di un sistema di neutrini non potrà mai essere maggiore di n_ν^{\max} . Per una data massa M sarà

$$\langle M_\nu \rangle = \frac{N_\nu}{\int d^3p \int d^3r} \approx \frac{M}{M_\nu \left[\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{4\pi}{3} (m_\nu v_{\max})^3 \right]}$$

dove v_{\max} è la velocità massima dei neutrini (in modulo) ed R è l'estensione del sistema. Se questo è virializzato sarà

$$M \sim \frac{V^2 R_\nu}{G} \text{ con } R_\nu (\text{raggio del viriale}) \approx \text{estensione } R \text{ del sistema e } V^2 = 3\sigma^2, \text{ con } \sigma \text{ dispersione}$$

(= deviazione standard) di velocità lungo le linee di vista

[il fattore 3 viene dalle supposte isotropia delle velocità].

Se le velocità lungo le linee di vista sono distribuite in modo gaussiano sarà $v_{\max} \sim 3\sigma$, per cui, da $\langle n_\nu \rangle < g/h^3$

arriviamo:

DM16

$$\frac{g \cdot \sigma^2 R}{m_\nu^4 \cdot 16\pi^2 R^3 (\sigma R)^3 G} \leq \frac{g}{h^3} \quad \text{da cui}$$

$$m_\nu^4 \geq \frac{h^3}{16\pi^2 g G \sigma R^2} \rightarrow m_\nu \geq 60 \text{ eV } \sigma_{100}^{-1/4} R_{\text{kepc}}^{-1/2}$$

con $\sigma_{100} = (\sigma / 100 \text{ km/s})$ e $R_{\text{kepc}} = (R / 1 \text{ kepc})$

Per una galassia come la nostra, con $\sigma \sim 200 \text{ km/s}$ e $R \sim 16 \text{ kepc}$ si ha $m_\nu \gtrsim 16 \text{ eV}$. Se consideriamo invece una galassia nana sferoidale (dSph), con $\sigma \sim 10 \text{ km/s}$ e $R \sim 2-3 \text{ kepc}$ otteniamo $m_\nu \gtrsim 200 \text{ eV}$.

Un calcolo più rigoroso, assumendo una struttura isoterma in equilibrio formata da nientrini, fornisce i risultati

$$m_\nu \gtrsim 80 \text{ eV } \sigma_{100}^{-1/4} r_{\text{kepc}}^{-1/2}$$

dove r_c è il "raggio del core" corrispondente circa al raggio di coerenza λ_c al quale la densità è $\sim 1/\lambda_c^3$ di quella centrale) reaching the messel. le conclusioni qualitative sono più le stesse che con la formula viceversa sopra

Vedremo che, mentre per le galassie otteniamo valori di m_ν delle decine di eV, interessanti cosmologicamente, i dati sulle galassie nane sferoidali, se corretti, danno valori di m_ν tali da fornire $(\Omega_\nu h^2) > 1$, in contrasto con le osservazioni.

Se così è, la materia oscura non potrebbe non più essere di tipo caldo formata da nientrini o WIMPs formidabili.

di HDM

- Vediamo che per $m_{\nu_i} \approx 10 \text{ eV}/c^2$ il contributo neutrino alla materia oscura non barionica potrebbe essere significativo. In realtà i dati del CMB e della struttura a grande scala forniscono $\Omega_\nu h^2 < 0.0076$ (95% c.l.) che, dalla relazione precedente, fornisce

$$\sum_{i=1}^{N_\nu} \left(\frac{m_{\nu_i}}{1 \text{ eV}/c^2} \right) < 0.7$$

- Se consideriamo, per un momento, i neutrini privi di massa, possiamo scrivere:

$$\rho_{R0} = \rho_{\gamma 0} \left[1 + \frac{7}{8} \cdot N_\nu \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \right]$$

Questo permette, assieme alla $\rho_{M0} = \Omega_M \rho_{0cr}$, di stimare

$$1 + z_{eq} = \frac{\rho_{M0}}{\rho_{R0}} = 23900 \Omega_M h^2 \cong 2.4 \cdot 10^4 \Omega_M h^2$$

$$T_{eq} = T_{\gamma 0} (1 + z_{eq}) \cong 6.5 \cdot 10^4 \text{ K}$$

che, per neutrini relativistici, corrisponde ad un'energia media $E_\nu = 3kT_\nu = 3kT_\gamma (T_\nu/T_\gamma) \approx 11 \Omega_M h^2 \approx 2 \text{ eV}$ (se $\Omega_M = 0.3$ e $h = 0.7$). Questo significa che, se i neutrini hanno masse minori di $2 \text{ eV}/c^2$ (come peraltro sembra), all'epoca dell'equivalenza sono ancora relativistici e il valore di z_{eq} resta invariato.

(RI)COMBINAZIONE E DISACCOPIAMENTO DEI FOTONI

Ad un certo momento della storia cosmica protoni ed elettroni si (ri)combinano, quindi la densità numerica n_e degli elettroni cala bruscamente ed il rate di interazione tra fotoni ed elettroni $\Gamma_\gamma \equiv n_e \sigma_T c$ diventa $\approx H$, (σ_T è la sezione d'urto - $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ - dello *scattering Thomson*) per cui i fotoni si disaccoppiano dalla materia, subendo il loro ultimo scattering.

L'equilibrio di ionizzazione tra elettroni (e), protoni (p) e atomi di idrogeno (H) è regolato dall'*equazione di Saha*

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \frac{g_H}{g_p g_e} \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{B/kT}$$

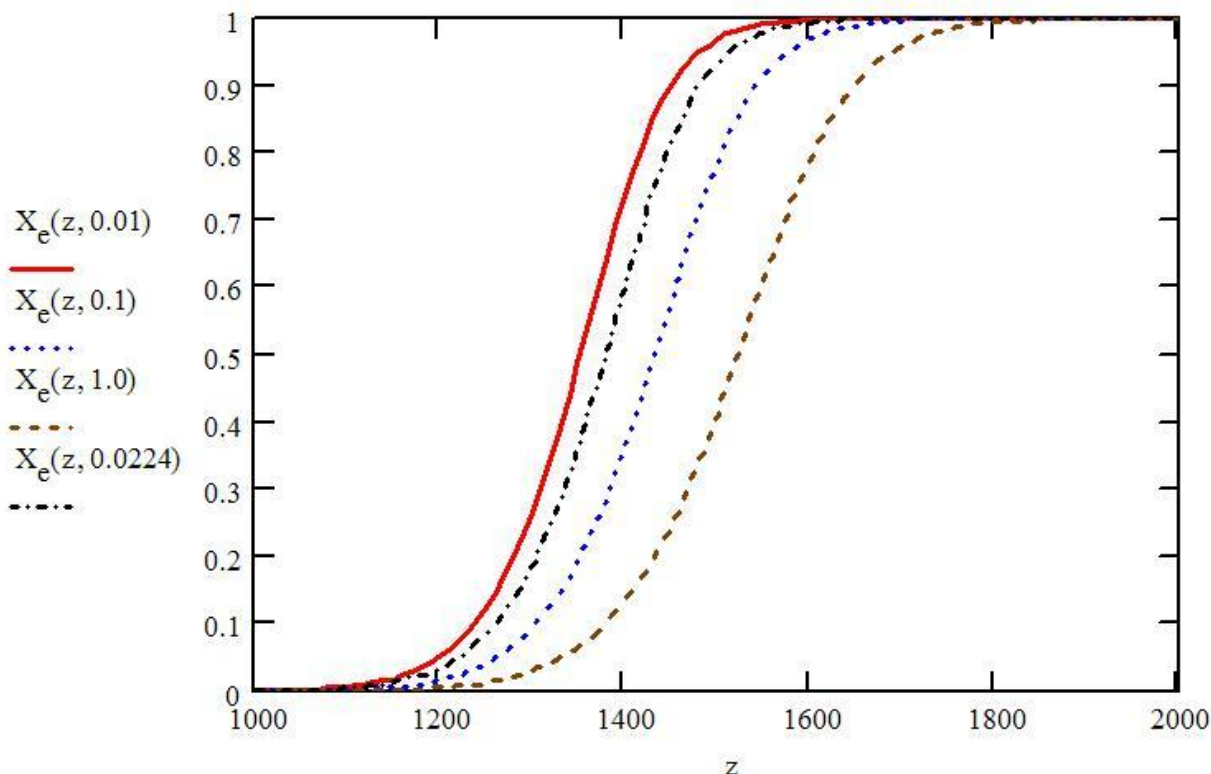
dove $g_e = g_p = 2$, $g_H = 4$, m_e è la massa dell'elettrone e B è il potenziale di ionizzazione dell'atomo di idrogeno (13.6 eV se assumo che tutti gli atomi siano nel livello fondamentale).

Definisco $X_e \equiv n_p / (n_p + n_H)$ **ionizzazione frazionaria**, esprimo n_γ in funzione di T , ricordo che $\eta \equiv n_B / n_\gamma = \text{costante} = 2.7 \times 10^{-8} \Omega_b h^2$, $n_B = n_p + n_H = \rho_{0b} / m_p$, m_p massa protone, $\rho_{0b} = \Omega_b \rho_{0cr}$, e riscrivo l'eq. di Saha:

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \eta \zeta(3) \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{B/kT}$$

con $T = T_{\gamma 0} (1+z)$.

Andamento di X_e per vari valori di $\Omega_b h^2$



Come si vede, al crescere di $\Omega_b h^2$ le curve si spostano verso valori maggiori di z .

Se prendiamo $X_e=0.1$ come riferimento per la ricombinazione si ottiene:

$$1 + z_{ric} \cong 1380 \left(\Omega_b h^2 \right)^{0.023} \approx 1240 - 1380$$

La ricombinazione non avviene però in modo completo perchè ad un certo punto $\Gamma_{rec} \approx H$ e questa si congela, lasciando una piccola ionizzazione residua. Per stimare a che z questo succede confrontiamo $H(z) \approx H_0 \Omega_M^{1/2} (1+z)^{3/2}$ con il rate di ricombinazione $\Gamma_{rec} = n_e \langle \sigma_{fb} v \rangle$ dove $\langle \sigma_{fb} v \rangle$ è il prodotto della sezione d'urto *free-bound* per la velocità degli elettroni, mediato su una distribuzione

Maxwelliana di velocità per questi ultimi e tiene conto della ricombinazione a tutti i livelli n dell'atomo di idrogeno. Si ottiene

$$\langle \sigma_{fb,n} v \rangle = 3.262 \times 10^{-6} \frac{e^{B_n/kT}}{n^3 T^{3/2}} \int_{B_n/kT}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

dove B_n è il potenziale di ionizzazione dal livello n . Una utile approssimazione per la somma su tutti i livelli è (caso A)

$$\alpha_A(T) = \sum_n \langle \sigma_{fb,n} v \rangle \approx 5.197 \times 10^{-14} \lambda^{1/2} \left(0.4288 + \frac{1}{2} \ln \lambda + 0.469 \lambda^{-1/3} \right)$$

$$\lambda \equiv 1.579 \times 10^5 / T$$

Ma le ricombinazioni al livello fondamentale producono l'emissione di un fotone in grado di ionizzare a sua volta altri atomi, per cui quelle che contano veramente sono le ricombinazioni ai livelli $n > 1$ (caso B). Perciò useremo

$$\alpha_B(T) = \alpha_A(T) - \langle \sigma_{fb,1} v \rangle$$

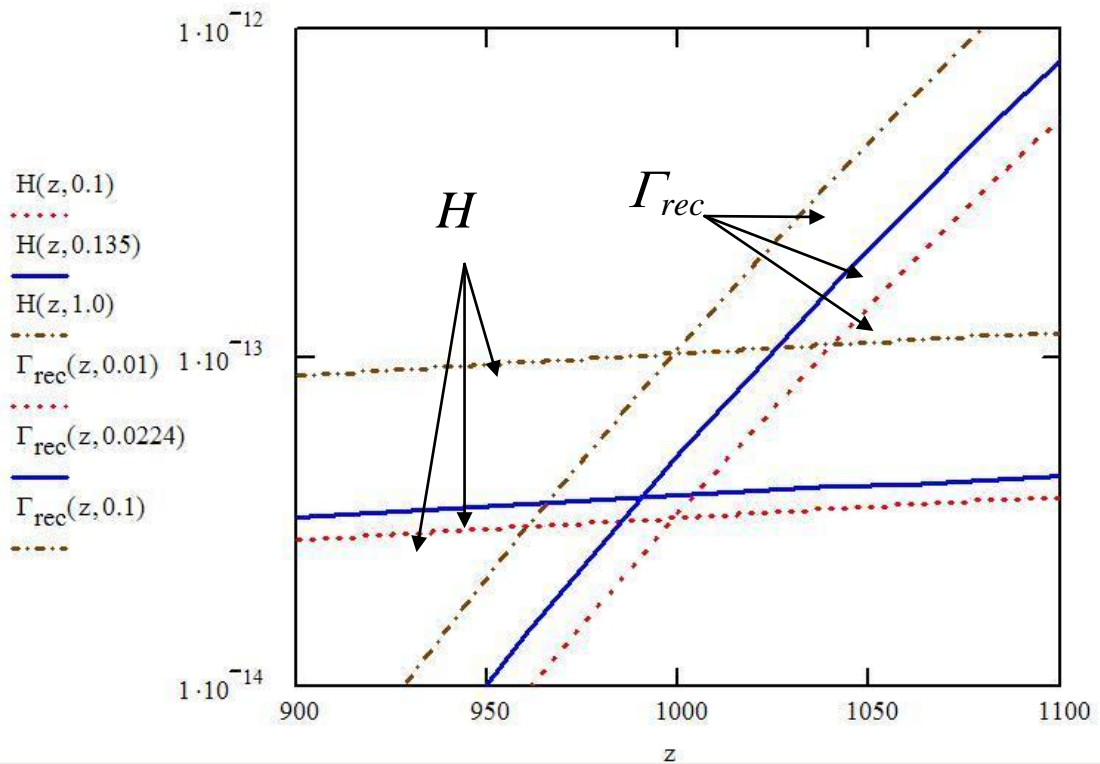
e $\Gamma_{rec} = n_e \alpha_B(T)$. Usando

$$n_e = X_e n_B = X_e \rho_b / m_p = X_e \times 1.13 \times 10^{-5} \Omega_b h^2 (1+z)^3$$

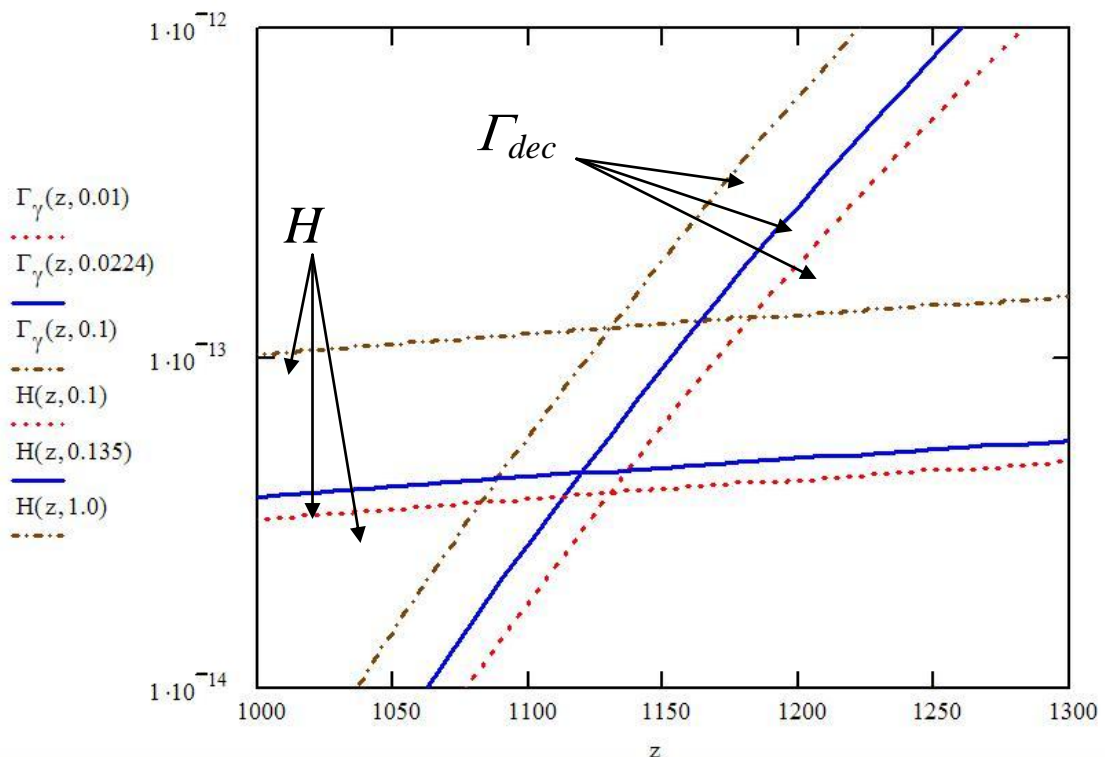
si ottengono le curve della figura seguente, dalle quali si vede che la ricombinazione può procedere quasi fino alla fine, con un z_{cong} tra 950 e 1050.

Rimane una ionizzazione residua (con i soliti parametri)

$$X_{cong} \approx 2 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{\Omega_M h^2}}{\Omega_b h^2} \approx 4 \times 10^{-4}$$



Per stimare il redshift z_{dec} al quale i fotoni cessano di interagire con la materia dovremo porre $\Gamma_\gamma \equiv n_e \sigma_{TC} \approx H$. Il risultato è mostrato nella figura seguente, dove si vede che $1+z_{dec} \approx 1100$.



Notiamo che il disaccoppiamento dei fotoni dalla materia non corrisponde al disaccoppiamento della materia dai fotoni, perché questo è definito dalla condizione $\Gamma_{mat} \equiv n_\gamma \sigma_T c \approx H$ che corrisponde a $z \simeq 200-300$ (gli elettroni presenti per la ionizzazione residua interagiscono con i protoni e, tramite urti, anche con gli atomi di H neutro).

Un calcolo più dettagliato del processo di ricombinazione mostra che la $X_e(z)$ risulta maggiore di quanto stimato dall'equazione di Saha. Un'approssimazione, valida per $800 < z < 1200$, è data dalla relazione²

$$X_e(z) \simeq 2.4 \times 10^{-3} \frac{(\Omega_M h^2)^{1/2}}{\Omega_b h^2} \left(\frac{z}{1000} \right)^{12.75}$$

In base a questa relazione si vede che, in realtà, $X_e = 0.1$ per $1+z_{ric} = 1077$ se $\Omega_b h^2 = 0.0224$ e $\Omega_M h^2 = 0.135$, come suggerito da *WMAP*.

Un altro modo per valutare l'epoca del disaccoppiamento tra fotoni e materia consiste nel valutare la profondità ottica τ al variare di z : $\tau = 1$ è il valore di aspettativa di τ per i fotoni che ci arrivano. Poiché $d\tau = n_e \sigma_T c dt$ avremo:

$$\tau(z) = \int_0^z n_e(z) \sigma_T c \left| \frac{dt}{dz} \right| dz = \int_0^z n_e(z) \sigma_T c \frac{1}{(1+z)H_0 E(z)} dz$$

Il contributo sostanziale all'integrale viene dall'intervallo in cui vale l'approssimazione per $X_e(z)$ riportata sopra, in cui anche $E(z) \approx \Omega_M^{1/2} (1+z)^{3/2}$. In questo caso la dipendenza dai parametri cosmologici si semplifica e si

² Jones e Wyse, 1985, *A&A* **149**,144

ha la semplice relazione

$$\tau(z) \cong 0.37 \left(\frac{z}{1000} \right)^{14.25}$$

dalla quale si vede che $\tau=1$ corrisponde a $z=1072$.

La probabilità di ricevere un fotone dalla profondità ottica τ è pari a $e^{-\tau}$; alla probabilità di ricevere un fotone che arriva dall'intervallo tra τ e $\tau+d\tau$ corrisponde una probabilità di arrivare dall'intervallo tra z e $z+dz$:

$$e^{-\tau} d\tau = g(z) dz \Rightarrow g(z) = e^{-\tau} \frac{d\tau}{dz}$$

dove $g(z)$ è la distribuzione di probabilità in z dell'ultimo scattering. Con l'approssimazione scritta sopra

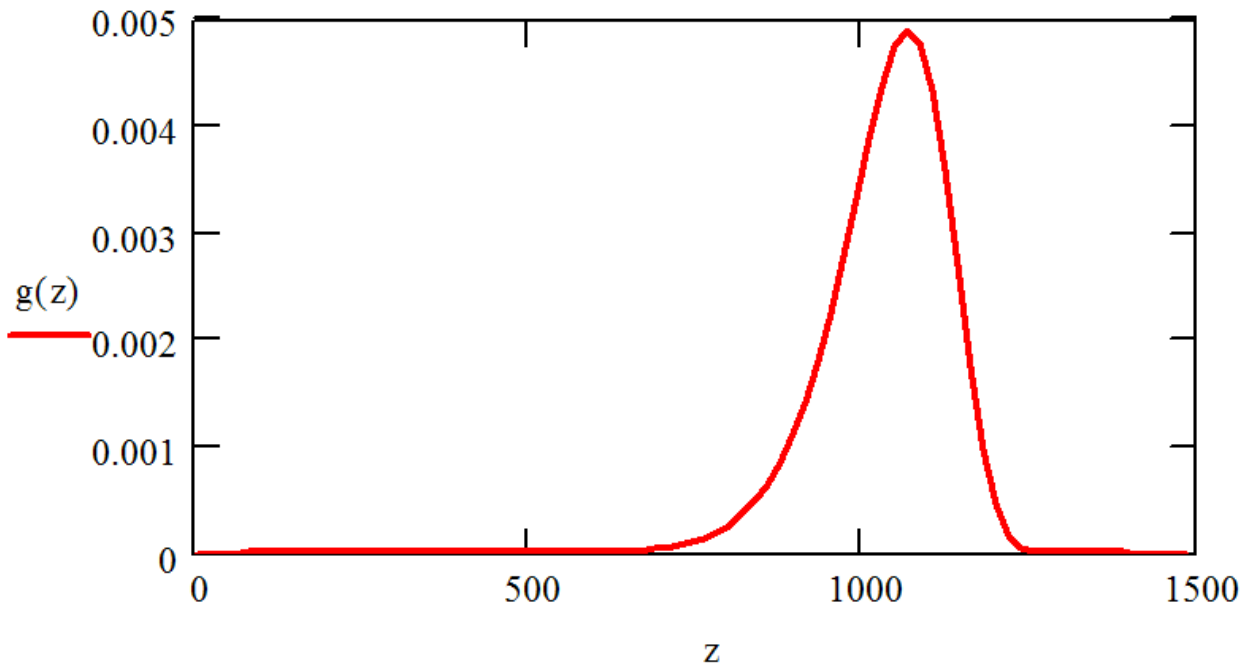
$$g(z) = 5.26 \times 10^{-3} \left(\frac{z}{1000} \right)^{13.25} \exp \left[-0.37 \left(\frac{z}{1000} \right)^{14.25} \right]$$

che ha un massimo per $z=1067$. Il 68% di probabilità è compreso in un $\Delta z \approx 170$ attorno al massimo, per cui vediamo che l'evento *ultimo scattering* non è istantaneo e non corrisponde ad un unico redshift.

Possiamo stimare l'età dell'universo all'epoca dell'ultimo scattering, assunto qui pari a $1+z_{ls}=1067$, usando la relazione esatta che mi fornisce il tempo in un universo con materia e radiazione, già vista sopra. Per $h=0.71$, $\Omega_M=0.27$, con i valori di Ω_γ visti prima e tre neutrini non massicci, fornisce

$$t_{ls} \cong 3.9 \times 10^5 \text{ anni}$$

Distribuzione di probabilità in z dell'ultimo scattering



NUCLEOSINTESI COSMOLOGICA (BIG BANG NUCLEOSYNTHESIS BBN)

Quando $kT \geq 1 \text{ MeV}$, reazioni come



che scambiano neutroni n in protoni p e viceversa, sono veloci rispetto all'espansione, i neutrini non sono disaccoppiati e vi è equilibrio termodinamico; neutroni e protoni, sotto il GeV , sono non relativistici ed il rapporto delle loro densità numeriche n_n ed n_p è dato dalla

$$r \equiv \frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} e^{-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT}} \cong e^{-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT}}$$

dove m_n ed m_p sono le masse di neutrone e protone, e

$(m_n - m_p)c^2 = 1.293 \text{ MeV}$. Il rate delle interazioni che scambiano tra loro n e p è (con G_F costante di accoppiamento debole di Fermi) :

$$\Gamma_{n \leftrightarrow p} \cong 2(kT)_{\text{MeV}}^5 s^{-1} \propto G_F T^5$$

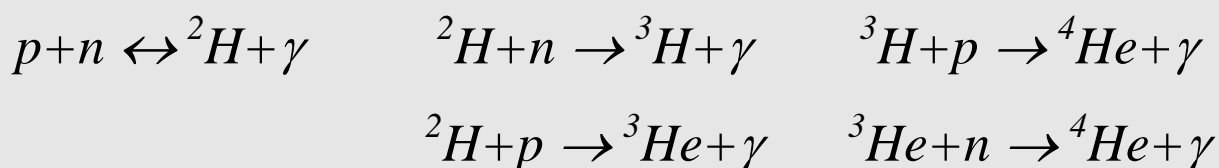
Se lo confrontiamo con $H = 1/2t$ (EdS nella fase RD), dove (vedi sopra),

$$t(\text{sec}) \approx 2.4 g_*^{-1/2} (kT)_{\text{MeV}}^{-2}$$

in cui $g_* \approx 10$, vediamo che $\Gamma_{n \leftrightarrow p} \approx H$ per $kT_{Dv} \approx 0.7 \text{ MeV}$. I **neutrini si disaccoppiano** e le reazioni sopra elencate non possono più avvenire. Siamo a $t_{Dv} \approx 1.5 \text{ sec}$. Il rapporto tra neutroni e protoni si “congela” ad un valore

$$r_0 = n_n/n_p \cong \exp(-1.293/0.7) \cong 0.16.$$

L'unica reazione possibile resta il **decadimento β** del neutrone, con un tempo di vita media $\tau_n = 885.7 \pm 0.8 \text{ sec}$. Ma, oltre a decadere, i neutroni possono combinarsi con i protoni e arrivare a formare ${}^4\text{He}$ attraverso reazioni veloci come



Il processo chiave è la **formazione del deuterio ${}^2\text{H}$** , che ha un'energia di legame $B_D = 2.23 \text{ MeV}$. A causa dell'elevato numero dei fotoni rispetto ai barioni la coda ad alta energia della distribuzione dei fotoni dissocia subito il deuterio che si forma, e questo fino a che il numero dei fotoni dissocianti n_γ^{diss} non diventa comparabile con quello dei barioni, n_B . Avremo

$$\frac{n_{\gamma}^{diss}}{n_B} = \frac{n_{\gamma}^{diss}}{n_{\gamma}} \cdot \frac{n_{\gamma}}{n_B} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{n_{\gamma}^{diss}}{n_{\gamma}}$$

con

$$n_{\gamma} = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3$$

La densità dei fotoni dissocianti si otterrà ponendo $p=E/c$ nella relazione che esprime la densità dei fotoni ponendo B_D come limite inferiore nell'integrazione:

$$n_{\gamma}^{diss} = \frac{2}{2\pi^2(\hbar c)^3} \int_{B_D}^{\infty} \frac{E^2 dE}{e^{E/kT} - 1} \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \left(\frac{B_D}{kT} \right)^2 e^{-B_D/kT}$$

nell'intervallo di interesse, essendo $E/kT > B_D/kT \gg 1$.

Per $1 < \eta_{10} < 10$ risulta $n_{\gamma}^{diss}/n_B \approx 1$ per $kT \approx 0.1 \text{ MeV}$, $T \approx 10^9 \text{ K}$. A quest'epoca il deuterio non viene più distrutto dai fotoni e, rapidamente, avvengono le reazioni che portano alla formazione dell' ^4He : è questa l'**epoca della BBN**. L'universo ha un'età di circa ($g_* = 3.36$ a $kT = 0.1 \text{ MeV}$)

$$t_{BBN} \text{ (sec)} \approx 2.4 g_*^{-1/2} (0.1)_{\text{MeV}}^{-2} \approx 150 \text{ s}$$

Cioè di circa **tre minuti**.

Tra l'epoca del "congelamento", $t_{D\nu} \approx 1.5 \text{ sec}$, e t_{BBN} i neutroni decadono in protoni e, da $r_0 \approx 0.16$, si passa a

$$r_{BBN} \cong \frac{n_{n,0} e^{-t_{BBN}/\tau_n}}{n_{p,0} + n_{n,0} (1 - e^{-t_{BBN}/\tau_n})} \cong 0.13$$

Superata la strozzatura del deuterio, in pratica tutti i neutroni che non sono decaduti finiscono incorporati nei

nuclei di ${}^4\text{He}$. Poiché occorrono due neutroni per ogni nucleo di ${}^4\text{He}$ e questo ha peso atomico 4, l'**abbondanza in massa, Y_{BBN} , di ${}^4\text{He}$** è

$$Y_{BBN} \equiv \frac{\text{massa } {}^4\text{He}}{\text{massa } {}^4\text{He} + \text{massa protoni liberi}} = \frac{4 \cdot n_n / 2}{4 \cdot n_n / 2 + 1 \cdot (n_p - n_n)}$$

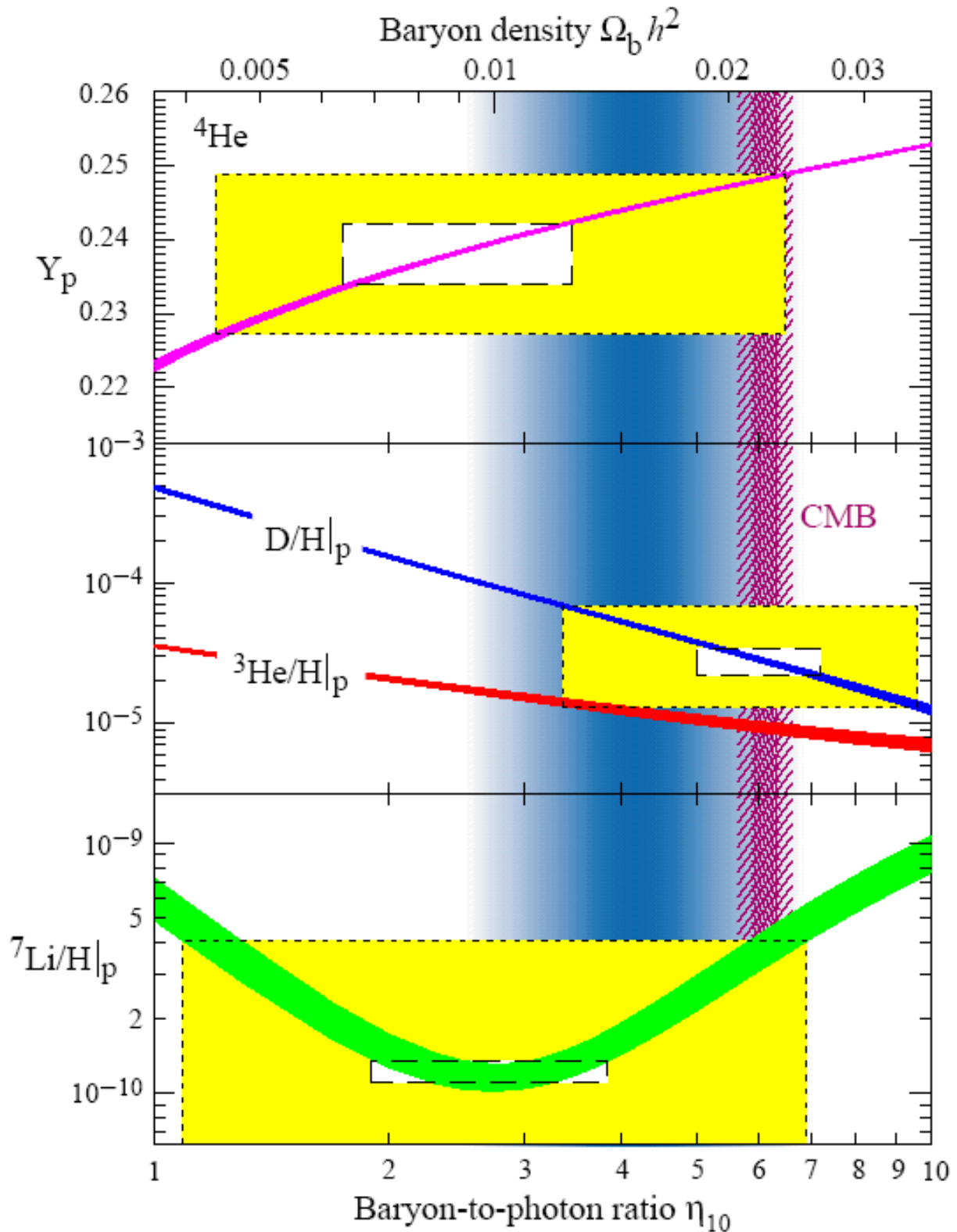
$$Y_{BBN} = \frac{2r_{BBN}}{1 + r_{BBN}} \approx 0.23$$

Il calcolo dettagliato, molto più complesso, fornisce valori simili, in accordo con i dati sperimentali che suggeriscono **$Y_{oss} \approx 0.24$** .

I **parametri fisici che determinano Y_{BBN}** sono tre:

1. la temperatura $T_{D\nu}$ alla quale il rapporto n_n/n_p si “congela”, legata alla condizione $\Gamma_{n \leftrightarrow p} \approx H$. Ma H dipende da $g_* = 2 + 7/8[4 + 2N_\nu]$, quindi da **N_ν**
2. il tempo di vita media del neutrone **τ_n**
3. il rapporto barioni fotoni **$\eta \equiv n_B/n_\gamma = 2.7 \times 10^{-8} \Omega_b h^2$** , che determina t_{BBN}

A causa del grande valore di τ_n rispetto a t_{BBN} , Y_{BBN} dipende poco da η , mentre è più sensibile al valore di g_* a $t_{D\nu}$ e quindi a N_ν . Si ottiene **$\Delta Y_{BBN} \approx 0.013 \Delta N_\nu$** . Se N_ν cresce, cresce pure $T_{D\nu}$ e di conseguenza crescono r_0 , r_{BBN} ed Y_{BBN} ($Y_{BBN} \rightarrow 1$ se $N_\nu \rightarrow \infty$). Per una decina d'anni, dal 1980 al 1991, il limite sperimentale derivato dalla BBN, cioè $N_\nu = 3 \pm 1$, ha rappresentato il miglior vincolo sul numero di famiglie di neutrini. Poi, con il *LEP*, dallo studio del decadimento dello Z^0 , si è trovato che il numero di famiglie di neutrini è $N_\nu = 2.993 \pm 0.011$.



Le abbondanze di ${}^4\text{He}$ (assumendo $N_\nu=3$), deuterio D , ${}^3\text{He}$ e ${}^7\text{Li}$ predette dalla BBN in funzione di η_{10} . I box indicano le abbondanze osservate (box più piccoli: errori statistici a 2σ ; box più grandi: errori statistici a $\pm 2\sigma$ ed errori sistematici, sommati in quadratura). La fascia verticale più stretta rappresenta i limiti su $\Omega_b h^2$ derivati dal CMB.

Anche se l'effetto principale della BBN è la produzione di elio, rimangono tracce di ${}^3\text{He}$ e ${}^2\text{H}$ (congelati quando il rate delle reazioni che li producono diventa minore di H), al livello di 10^{-4} - 10^{-5} in numero rispetto all'idrogeno. In questo caso le abbondanze sono molto più sensibili al valore di η di quanto non lo sia Y_{BBN} .

Attraverso processi come



si produce anche una quantità di ${}^7\text{Li} \approx 10^{-10}$ - 10^{-9} in numero rispetto all'idrogeno. Anche in questo caso l'abbondanza è molto più sensibile al valore di η di quanto non lo sia Y_{BBN} .

La quantità di elementi più pesanti che viene prodotta è del tutto trascurabile a causa della mancanza di elementi stabili con numero atomico di massa $A=5$ e 8 , che servirebbero come passi intermedi. Inoltre, per nuclei con più di tre protoni, la barriera colombiana è troppo elevata per essere superata alla temperatura della BBN. Bisogna aspettare la nucleosintesi nel centro delle stelle per arrivare a produrre C , N , O , Fe e tutti gli altri elementi.

Ma la nucleosintesi stellare, oltre a produrre elementi pesanti, può alterare le abbondanze degli elementi prodotti nella BBN. Per questo si cercano oggetti con basse abbondanze di elementi pesanti, quindi più antichi, che dovrebbero avere abbondanze degli elementi leggeri più prossime a quelle primordiali.

Poiché non sembrano esserci processi astrofisici che producono deuterio, mentre l'evoluzione stellare tende a distruggerlo, i valori misurati della sua abbondanza

forniscono un limite inferiore su D/H (superiore su η). Le stime derivate dal mezzo interstellare locale forniscono un limite inferiore $D/H=(1.5\pm 0.1)\times 10^{-5}$. Il deuterio è stato osservato anche nelle righe di assorbimento dei quasar, quindi a distanze cosmologiche. Le misure derivate da questi sistemi in assorbimento forniscono $D/H=(3.0\pm 0.4)\times 10^{-5}$. Un limite superiore a D/H si può ottenere dalla non detezione del deuterio in un sistema in assorbimento ad alto redshift: $D/H < 6.7 \times 10^{-5}$ ad 1σ .

L' ${}^4\text{He}$ si osserva nelle nubi di idrogeno ionizzati (HII), e quelle più povere di metalli sono nelle galassie nane. La stima che si ottiene per la Y primordiale, estrapolando a metallicità zero, è: $Y_P=0.238\pm 0.002\pm 0.005$ (sono indicati gli errori statistici e sistematici). Altre stime danno valori consistenti entro gli errori.

I sistemi migliori per osservare il litio sono le stelle povere di metalli ($Pop II$) presenti nelle sferoide della nostra galassia, che hanno metallicità 10^{-4} - 10^{-5} volte quella solare. Estrapolando anche qui le osservazioni a metallicità zero si ottiene il valore di Li/H primordiale: $Li/H|_P=(1.23\pm 0.06)\times 10^{-10}$. Anche altre stime sono presenti in letteratura a causa di incertezze sistematiche. Tenendone conto si può ragionevolmente porre $Li/H|_P=(0.59-4.1)\times 10^{-10}$.

L' ${}^3\text{He}$ è osservabile solo nel sistema solare e nelle regioni HII ad elevata metallicità della nostra galassia. Questo, unito ad incertezze teoriche sulla produzione di ${}^3\text{He}$ nelle stelle, suggerisce di non usarlo come indicatore per la BBN.

Se assumiamo che $N_\nu=3$, l'unico parametro libero è η (o η_{10}). Ogni misura di abbondanza determina η , per cui dobbiamo cercare la consistenza tra le abbondanze dei vari elementi visti sopra. Se esaminiamo la figura, tenendo conto sia degli errori statistici che di quelli sistematici, troviamo un accordo accettabile per

$$3.4 \leq \eta_{10} \leq 6.9 \quad (95\% \text{ C.L.})$$

Ma l'accordo è meno buono se consideriamo solamente gli errori statistici: ${}^4\text{He}$ e ${}^7\text{Li}$ sono consistenti, ma forniscono un valore di η_{10} discordante a 2σ da quello del deuterio.

Tuttavia è rimarchevole il fatto che, usando processi fisici ben noti, si riesce a risalire ad eventi accaduti nei primi tre minuti di vita dell'universo.

Noto n_γ , da η si può derivare $\Omega_b h^2$:

$$0.012 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.025 \quad (95\% \text{ C.L.})$$

Si ottengono così dei limiti su uno dei parametri cosmologici fondamentali.

Ma una stima indipendente di η si può ottenere anche dal **CMB**, in base all'ampiezza dei picchi presenti nello spettro di potenza angolare. I risultati dipendono dalle assunzioni a priori che si fanno sullo spettro di potenza delle perturbazioni cosmiche in densità. Lasciando libero di variare l'indice spettrale, da *WMAP* si ottiene

$$\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009 \quad \text{o} \quad \eta_{10} = 6.14 \pm 0.25$$

Queste stime non sono inconsistenti con quelle dedotte dalla *BBN*, specialmente per quello che riguarda il

deuterio. Se si considerano però solamente gli errori statistici, ${}^4\text{He}$ e ${}^7\text{Li}$ sono inconsistenti con il *CMB*, come pure con il deuterio. Resta da chiarire se questa discrepanza è dovuta ad errori sistematici nelle misure delle abbondanze e/o ad incertezze nell'astrofisica stellare, oppure a “*nuova fisica*” oltre il Modello Standard della fisica delle particelle.

Anche dopo la stima di N_ν con il *LEP*, la *BBN* rappresenta ancora un vincolo efficace per le speculazioni sulla fisica delle particelle oltre il Modello Standard. E rappresenta anche il confine tra sicurezza ed estrapolazione nella cosmologia del Big Bang.

Osserviamo che le stime di N_ν ottenute dal *LEP* e dalla *BBN* non sono esattamente la stessa cosa. Al *LEP* si è misurato il decadimento dello Z^0 in coppie $\nu \bar{\nu}$, il cui rate è $\Gamma \propto G_F M_Z^3 N_\nu$ (più specie di neutrini $\Rightarrow Z^0$ decade più velocemente). Con la *BBN* misuro g_* , cioè il numero di specie di particelle che sono relativistiche ad un'energia di circa 1 MeV . Se fossero esistite altre famiglie di neutrini “pesanti”, con masse molto maggiori del MeV , il *LEP* le avrebbe viste, ma non la *BBN*.

Ma supponiamo che esistano delle particelle che interagiscono in modo più debole delle interazioni deboli, ad esempio dei neutrini “sterili” con interazioni solo di tipo *right-handed* di intensità $G_R < G_F$. Lo Z^0 decadrebbe ancora allo stesso modo, confermando l' N_ν ottenuto dal *LEP*. Ma questi neutrini “sterili”, interagendo molto più debolmente, si disaccoppiano ad una temperatura T_{D_s} più elevata della $T_{D_\nu} \sim 1 \text{ MeV}$ dei neutrini normali. Se, tra T_{D_s}

e $T_{D\nu}$, altre specie di particelle si annichilano (come e^+ ed e^- dopo il disaccoppiamento dei neutrini) la T_γ sale rispetto alla T_S dei neutrini “sterili”, e l’effetto di queste particelle su g_* è ridotto di un fattore $(T_D/T_\gamma)^4$. Più elevata è $T_{D\nu}$, più specie non standard sono consentite dai vincoli su g_* (equivalenti ai vincoli su N_ν) della *BBN*.

BARIOGENESI PRIMORDIALE

Il quadro finora descritto ci lascia, tuttavia, con il problema dell’**origine del numero barionico e leptonic netto**, cioè del perché vi siano più quark che antiquark, più elettroni che positroni.

Sappiamo che il sistema solare è fatto di materia e non di antimateria. La piccolissima proporzione ($\sim 10^{-4}$) di antimateria nei raggi cosmici, la mancata osservazione dei raggi X che dovrebbero essere prodotti se l’annichilazione di materia ed antimateria fosse una cosa comune nelle collisioni tra stelle, nubi di gas e galassie, assieme alla mancanza di un meccanismo convincente in grado di separare materia e antimateria su scale cosmiche, tutto suggerisce che l’**universo** sia **fatto solo di materia**.

Se nell’universo primordiale il numero di quark ed antiquark fosse stato perfettamente uguale, considerando che quando il rate di annichilazione $\Gamma_{ann} \sim H$ il processo si congela, ci si aspetterebbe un valore di

$$\eta \equiv n_B/n_\gamma = n_{\bar{B}}/n_\gamma \approx 10^{-18} \quad \text{invece di} \quad \eta \approx 10^{-9} \gg n_{\bar{B}}/n_\gamma$$

e ancora con il problema di separare barioni e antibarioni!

A meno di non assumere che l'asimmetria sia nata con l'universo, è necessario spiegarne l'origine. Ma per farlo occorre andare oltre il modello standard della Fisica delle Particelle.

Le Teorie di Grande Unificazione (*Grand Unified Theories*, *GUT*) prevedono che numero barionico e leptonico non siano perfettamente conservati. Questo potrebbe portare ad un eccesso di barioni purchè esistano reazioni per le quali siano verificate le seguenti condizioni (messe in evidenza già da Sakharov nel 1967):

1. Il numero barionico B e quello leptonico L non si conservano
2. Le invarianze C e CP vengono violate³
3. Non siamo in condizioni di equilibrio termodinamico

La condizione 1 è ovviamente necessaria se vogliamo passare da uno stato con $B=0$ e $L=0$ ad uno con $B \neq 0$, $L \neq 0$. L'operatore C cambia $n_q \rightarrow n_{\bar{q}}$, per cui se C è conservato dovremo avere $n_q = n_{\bar{q}}$ nel sistema, e quindi $B=0$ ($L=0$). Poiché l'operatore P lascia immutati sia n_q che $n_{\bar{q}}$, l'invarianza CP richiede anch'essa $n_q = n_{\bar{q}}$ e

³ Il **coniugio di carica** (*Charge conjugation*) C è l'operazione che cambia una particella con la sua antiparticella [es.: $C(\pi^+) = \pi^-$].

L'operazione di **parità** (*Parity*) P è una riflessione di tutte le coordinate attraverso l'origine [es.: $P(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}$; la parità non si conserva nelle interazioni deboli].

L'operazione di **inversione temporale** (*Time reversal*) T consiste nello scambiare il tempo t in $-t$; un processo invariante rispetto a T è un processo reversibile, come quelli descritti dalle equazioni di Newton, che contengono solo derivate seconde rispetto al tempo. Nella meccanica quantistica l'applicazione dell'invarianza T ha conseguenze più sottili.

Queste operazioni possono essere combinate tra loro. Così si può parlare di **invarianza CP**; questa viene violata, ad esempio, nel decadimento dei mesoni K^0 e \bar{K}^0 .

Un teorema importante nella teoria quantistica dei campi, che vale in condizioni abbastanza generali (invarianza di Lorentz e causalità microscopica), afferma che gli osservabili sono invarianti rispetto all'operazione combinata **CPT**, con ordine qualsiasi (**CPT theorem**). Questo teorema implica l'esistenza di un'antiparticella per ogni particella e l'uguaglianza di masse, vite medie, momenti magnetici, ecc., di particelle ed antiparticelle. Affinché l'invarianza **CPT** si mantenga, nel caso in cui uno tra C , P o T sia violato, uno degli altri deve anche essere violato in modo complementare. Se, ad esempio, T è violata, anche CP dovrà esserlo, e viceversa.

quindi $B=0$ ($L=0$). Quindi è necessaria anche la condizione 2. Infine, in equilibrio termodinamico i processi sono reversibili e quindi T è una buona simmetria. L'invarianza T ed il teorema CPT implicano quindi l'invarianza CP e di conseguenza $B=0$ e $L=0$ per quanto visto al punto 2. Anche la 3 è necessaria.

Sono stati proposti vari meccanismi che permettono di ottenere un'asimmetria tra barioni ed antibarioni. Uno dei primi (Weinberg, 1979) era basato sul decadimento, fuori equilibrio termodinamico, di una particella massiccia come un bosone di gauge X superpesante delle GUT .

Supponiamo che X e \bar{X} , quando era $kT \gg m_X c^2$, ad esempio all'epoca di Planck, fossero in equilibrio termodinamico con i fotoni, quindi $n_X = n_{\bar{X}} \approx n_\gamma$. Dopo l'epoca di Planck la gravità diventa debole e, a causa della libertà asintotica delle interazioni forti, c'è un periodo di non equilibrio termodinamico. La densità numerica delle particelle varia però come a^{-3} per X , \bar{X} e γ e continua quindi ad essere $n_X = n_{\bar{X}} \approx n_\gamma$ (supponiamo che i bosoni X siano le particelle più massicce, di modo che non vi sono annichilazioni che fanno crescere n_γ rispetto ad n_X). Se la massa dei bosoni è sufficientemente elevata ($m_X \geq 10^{17} \text{ GeV}/c^2$ nel caso di bosoni vettori, $m_X \geq 10^{12}-10^{14} \text{ GeV}/c^2$ nel caso di bosoni scalari, o di Higgs) i rate dei processi di scattering e di decadimento inverso sono $\ll H$, quindi fuori equilibrio termodinamico e "congelati", mentre solo il rate di decadimento è $> H$. Abbiamo appunto un decadimento fuori equilibrio termodinamico.

Supponiamo, per semplicità, che il bosone X decada in due canali, con *branching ratio* r e $1 - r$ (sommati su tutti i tipi di quark e leptoni), rispettivamente. Il bosone \bar{X} decadrà in canali simili (ma con particelle \leftrightarrow antiparticelle) con *branching ratio* \bar{r} e $1 - \bar{r}$. Se C e CP non sono conservate sarà $r \neq \bar{r}$.

La seguente tabella illustra, in modo schematico, la creazione di un numero barionico diverso da zero.

		ΔB	ΔL			ΔB	ΔL				
X	$1 - r$	\bar{q}	\bar{q}	$-2/3$	0	\bar{X}	$1 - \bar{r}$	q	q	$2/3$	0
	r	q	l	$1/3$	1		\bar{r}	\bar{q}	\bar{l}	$-1/3$	-1

Il numero barionico netto prodotto dal decadimento di un X sarà:

$$B_X = r(+1/3) + (1 - r)(-2/3) = r - 2/3$$

e, analogamente, per un \bar{X} :

$$B_{\bar{X}} = \bar{r}(-1/3) + (1 - \bar{r})(+2/3) = -\bar{r} + 2/3$$

Quindi, per ogni coppia X, \bar{X} verrà prodotto in media un numero barionico

$$\Delta B = B_X + B_{\bar{X}} = r - \bar{r} \neq 0$$

Una cosa analoga vale per il numero leptonico; avremo anche in questo caso

$$\Delta L = r - \bar{r} \neq 0$$

con $\Delta B - \Delta L = \Delta(B-L) = (r - \bar{r}) - (r - \bar{r}) = 0$, un fatto comune a molte *GUT*.

Quando i bosoni X, \bar{X} decadono, essendo $n_X = n_{\bar{X}} \approx n_\gamma$, la densità netta di barioni sarà quindi

$$n_B \sim \Delta B n_X \sim \Delta B n_\gamma(T_d)$$

con T_d temperatura all'epoca del decadimento. Ma abbiamo già visto che la densità di entropia è data da

$$s = 1.8 k g_{*S}(T_d) n_\gamma(T_d)$$

per cui, a $T=T_d$,

$$\left. \frac{n_B}{s} \right|_{T_d} = \frac{\Delta B}{1.8 k g_{*S}(T_d)}$$

Ma se, dopo quest'epoca, B non varia più, n_B/s si mantiene costante, uguale al valore odierno, a $T=T_0$,

$$\left. \frac{n_B}{s} \right|_{T_0} = \frac{\eta}{1.8 k g_{*S}(T_0)}$$

Dal confronto delle due relazioni otteniamo

$$\Delta B \approx \eta \frac{g_{*S}(T_d)}{g_{*S}(T_0)} \approx \frac{160}{3.909} \eta \approx 40 \eta \approx 10^{-8}$$

INFLAZIONE

Abbiamo già parlato sopra di due problemi che il modello dello Hot Big Bang presenta: il **problema della piattezza** e quello **dell'orizzonte**, ai quali si può aggiungere quello **dei monopoli magnetici** (difetti topologici zero-dimensionali, prodottisi all'epoca della transizione di fase corrispondente alla rottura delle *GUTs*, la cui densità numerica, unita alla loro massa molto elevata, produrrebbe un valore di Ω decisamente inaccettabile).

Il paradigma dell'inflazione, che risolve questi problemi, è stato proposto da **Alan Guth** nel **1981**. Esso prevede una fase di espansione di tipo esponenziale tra i tempi t_i e t_f (con $t_{pl} < t_i < t_f \ll t_{eq}$), prodotta da un'equazione di stato che mima quella di una costante cosmologica:

$$t_i < t < t_f \quad a(t) \approx a(t_i) e^{H(t-t_i)}$$

(H costante) simile ad un modello di *de Sitter* (che ha $\Lambda \neq 0$ e densità di materia trascurabile), invece di una crescita continua del tipo $a(t) \approx t^{1/2}$, tipica dell'era **RD**.

La crescita esponenziale, se sufficientemente prolungata, produce una crescita di d_H sufficiente a risolvere il problema dell'orizzonte, nel contempo Ω converge verso l'unità (come nei modelli dominati da costante cosmologica) resolvendo il problema della piattezza (ricordiamo anche che la curvatura della sezione spaziale scala come $a(t)^{-2}$, e la crescita esponenziale di $a(t)$ forza questa curvatura verso lo zero). Anche il problema dei monopoli viene risolto attraverso l'abbattimento della

loro densità numerica.

Se l'inflazione avviene attorno all'epoca della grande unificazione (*GUT*), per risolvere i suddetti problemi deve essere

$$\ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) \equiv \mathcal{N} \geq 60$$

dove \mathcal{N} è il cosiddetto numero di *e-foldings*.

ELEMENTI DI TEORIA DEI CAMPI

Come abbiamo visto, per avere una fase inflattiva occorre che l'universo posseda, per un certo intervallo di tempo, un'equazione di stato del tipo $p = -\rho c^2$.

Questo può essere ottenuto in modo naturale per mezzo di un campo scalare presente nelle prime fasi dell'universo primordiale.

Per comprendere il meccanismo è necessario introdurre alcuni concetti usati in *Teoria dei Campi*.

Nella *Meccanica Classica* le equazioni del moto di un sistema dinamico si possono ricavare da una funzione *Lagrangiana* L

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - V(q_i)$$

dove le q_i sono coordinate generalizzate, T è l'energia cinetica e V è l'energia potenziale. L'azione S , legata al moto del sistema tra una data configurazione al tempo t_1

ed un'altra al tempo t_2 , è

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

e, secondo il *principio di minima azione*, l'evoluzione del sistema tra le due configurazioni è quella che corrisponde al valore minimo di S . Questa condizione porta alle *equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Queste relazioni descrivono il moto di *particelle*, cioè di oggetti localizzati. Un *campo* occupa invece una certa regione di spazio e quello che vuole la *Teoria dei Campi* è calcolare una (o più) funzioni della posizione e del tempo: $\phi_i = \phi_i(x, y, z, t)$ (es.: la temperatura, il potenziale elettrico, le tre componenti del campo magnetico in una stanza). Mentre, nella meccanica delle particelle, la Lagrangiana L è funzione delle coordinate q_i e delle loro derivate, nella *Teoria dei Campi* si lavora con una *densità lagrangiana* \mathcal{L} che è funzione dei campi ϕ_i e delle loro derivate rispetto ad x, y, z e t . Per rendere più trasparente la covarianza relativistica si usano le coordinate spazio-temporali $x^0 = ct$ e $x^1, x^2, x^3 = x, y, z$, così che la lagrangiana sarà l'integrale di volume di \mathcal{L}

$$L = \int \mathcal{L} d^3x$$

e l'azione si potrà scrivere

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x$$

(il fattore $1/c$, inessenziale, serve a mantenere le dimensioni dell'azione).

In realtà questa scrittura è corretta in uno spazio euclideo ed in coordinate ortogonali; per tener conto di una scelta più generale delle coordinate (ad esempio coordinate spaziali co-moventi) l'elemento di volume d^4x va sostituito con $\sqrt{-g} d^4x$ dove g è il determinante della metrica $g_{\alpha\beta}$.

Useremo nel seguito, per semplicità, la scrittura

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha \phi_i$$

In una teoria relativistica, che tratta la coordinata temporale allo stesso modo di quelle spaziali, le equazioni di *Eulero-Lagrange* nella *Teoria dei Campi* si generalizzano nella forma

$$\partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha \phi_i)} \right] - \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi_i} = 0$$

In uno spazio piatto e statico (di Minkowski) la metrica $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Sarà allora

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0; \bar{\nabla})$$

$$\partial^\alpha = \eta^{\alpha\nu} \partial_\nu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}; -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial^0 (\equiv \partial_0); -\bar{\nabla})$$

$$\partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \square^2$$

dove il simbolo \square^2 rappresenta l'**operatore d'Alembertiano**.

Se usiamo invece coordinate co-moventi ($r = a x$) in uno spazio piatto in espansione: $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -a^2, -a^2, -a^2)$ e $\sqrt{-g} = a^3$. Si ha allora ($\bar{\nabla}_x$ rappresenta il gradiente rispetto alla coordinata co-movente x)

$$\partial_\alpha = (\partial_0; \bar{\nabla}_x) \quad \partial^\alpha = \left(\partial^0; -\frac{1}{a^2} \bar{\nabla}_x \right) \quad \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2} \nabla_x^2$$

Consideriamo, come esempio, la seguente (densità) Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2$$

dove ϕ è un campo scalare singolo e reale. In questo caso, in uno spazio di Minkowski ($\sqrt{-g} = 1$),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} = \partial^\alpha \phi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 \phi = -\mu^2 \phi$$

e l'equazione di *Eulero-Lagrange* fornisce

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \phi + \mu^2 \phi = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2 \right] \phi = \left[\square^2 + \mu^2 \right] \phi = 0$$

che è l'equazione di **Klein-Gordon** per il campo scalare corrispondente ad una particella libera di spin 0 (scalare) e massa m .

In analogia con la $L=T-V$, nella Lagrangiana scritta sopra il primo termine, $\frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi)$, è detto **termine**

dell'energia cinetica, mentre il secondo termine, in questo caso quadratico in ϕ (termine di massa), è il termine dell'energia potenziale. Per un campo scalare scriveremo la Lagrangiana nella forma generale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi) - V(\phi)$$

dove $V(\phi)$ è un opportuno potenziale ($V(\phi) = 1/2 \mu \phi^2$ nel caso di *Klein-Gordon*).

Se \mathcal{L} , scritto come qui sopra, dipende da x^α solo attraverso ϕ e le sue derivate $\partial_\alpha \phi$, si conserva (ha cioè quadri-divergenza nulla) la quantità (**tensori energia-impulso**)

$$T^{\alpha\beta} \equiv \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}$$

Nel caso di un **fluido perfetto** abbiamo visto che esso ha la forma

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$$

dove p è la pressione, ρc^2 la densità di energia e u^α è la quadri-velocità ($u^\alpha \equiv dx^\alpha/ds$); nel sistema di riferimento co-movente $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. Sempre in coordinate co-moventi, in uno spazio piatto, dal confronto tra le due relazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \rho c^2 \equiv T^{00} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{a^2} (\bar{\nabla}_x \phi)^2 + V(\phi) \\ p \equiv a^2 \left(\frac{T^{11} + T^{22} + T^{33}}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{1}{a^2} (\bar{\nabla}_x \phi)^2 - V(\phi) \end{cases}$$

In una teoria che, se è relativistica, tratta le (INFL) 6
 coord. spaziali come le temporale, le eq. di EULEN-LEFREN
 si generalizzano come

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

Ricordiamo che per i 4-vettori, assumendo uno spazio
 piatto di Minkowski con $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv \eta^{\alpha\beta}$
 [questo vale bene perché l'universo primordiale, con $\Omega \sim 1$, si
 scosta poco da quello piatto, anche se $k = \pm 1$] sarà

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0; \vec{\nabla})$$

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\partial_0; -\vec{\nabla} \right)$$

e quindi

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \square^2$$

dove con il simbolo \square^2 si indica l'operatore d'Alembert-
 Viers.

Vediamo un esempio: consideriamo la (densità) Lagran-
 giana espressa dalla:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

dove ϕ è un campo scalare singolo e reale. In questo
 caso

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

come si può verificare scrivendo \mathcal{L} per esteso:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_0 \phi \cdot \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \cdot \partial_1 \phi - \partial_2 \phi \cdot \partial_2 \phi - \partial_3 \phi \cdot \partial_3 \phi] - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

è allora diverso che

(LNFU/7)

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi \text{ e siml.}$$

mentre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi$$

così che la formula di

Euler-Lagrange parte all'equazione per esempio:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0 \Rightarrow (\square^2 + \mu^2) \phi = 0$$

in cui abbiamo scritto $\mu \equiv \frac{mc}{\hbar}$. Questa altro non è che l'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare (cioè di spin=0). Questa si ottiene con le usuali sostituzioni di operatori quantistici

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

nell'equazione di conservazione di energia-momento

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

che diventa

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \rightarrow \left[\underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}_{\square^2} - \nabla^2 + \underbrace{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}_{\mu^2} \right] \phi = 0$$

• Mentre nella meccanica classica delle particelle la Lagrangiana L è derivata ($L = T - V$), nella teoria relativistica dei campi la densità lagrangiana \mathcal{L} è generalmente assunta in modo assiomatico per riprodurre, come per l'ep. di Klein-Gordon, l'equazione di campo che si desidera.

• Nella lagrangiana vista sopra, il primo termine, cioè $\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$, è detto il termine dell'energia cinetica, mentre il secondo $-\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$ è il termine di massa. Nota mo il segno associato al coeff. cinetico di ϕ !

Se la lagrangiana \mathcal{L} è indipendente, in (INFL) 9 modo esplicito dallo spazio-tempo (cioè dipende da x^μ solo attraverso ϕ_i e le derivate $\partial_\mu \phi_i$), si ha allora la conservazione di un tenore

$$T^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\alpha \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\beta} - \mathcal{L} g^{\alpha\beta} \quad \left| \rightarrow \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0 \right.$$

che esprimerà, attraverso le sue derivate nulle, la conservazione di energia e quantità di moto per il campo: $T^{\alpha\beta}$ è il tenore energia-impulso. Se scriviamo \mathcal{L} come un termine di "energia cinetica" meno un termine di "energia potenziale" $V(\phi)$ [nel caso dello ϕ di Klein-Gordon $V(\phi) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2$]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi)$$

essendo $\boxed{T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \cdot \partial^\beta \phi - \mathcal{L} g^{\alpha\beta}}$, avremo

(ricorda che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)} = \partial^\alpha \phi$, vedi pag (INFL) 6) che

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi - \mathcal{L} g^{\alpha\beta}}$$

che, come si vede, è simmetrico negli indici α e β .

~~Se supponiamo che, per isotropia, le derivate rispetto alle componenti spaziali ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) siano nulle, avremo che~~

~~$$T^{00} = \partial^0 \phi \partial^0 \phi - \mathcal{L} g^{00} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + V(\phi)$$~~

~~$$= \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + V(\phi) + \left[\frac{(\nabla \phi)^2}{2} \right]$$~~

~~$$T^1 = T^{22} = T^3 = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - V(\phi) + \left[\frac{(\nabla \phi)^2}{2} - (\nabla \phi)^2 \right]$$~~

~~20 per isotropia
ricordi anche che
 $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$~~

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi - \mathcal{L} g^{\alpha\beta}$$

$$= -\frac{1}{c^2} \mathcal{L}$$

(WFG) 3 bits

$$T^{00} = \partial^0 \phi \partial^0 \phi - g^{00} \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_1 \phi \partial^1 \phi + \partial_2 \phi \partial^2 \phi + \partial_3 \phi \partial^3 \phi) - V(\phi) \right]$$

comer —
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}$

$$= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + V(\phi)$$

$\nabla \phi \cdot \nabla \phi$

$$T^{00} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) = \rho c^2$$

$$T^{11} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] - V(\phi)$$

Se soma $T^{11} + T^{22} + T^{33} = 3\rho$:

$$3\rho = (\nabla \phi)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{3}{2} (\nabla \phi)^2 - 3V(\phi)$$

da cui

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{6} (\nabla \phi)^2 - V(\phi)$$

Il termine fuori diagonale, con le sole $\partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi$ (essendo $g^{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \neq \beta$) sono statisticamente nulli se le derivate lungo di verso di rotazioni spaziali e il tempo sono scorrelate tra loro.

$$T^{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla_x \phi)^2 \right] - \frac{1}{2} V(\phi)$$

T^{22}

T^{33}

$$\frac{1}{2} (\nabla_x \phi)^2 + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla_x \phi)^2 \right] - \frac{3}{2} V(\phi) = \frac{3\rho}{2}$$

$$3\rho = \frac{3}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_x \phi)^2 - \frac{3}{2} (\nabla_x \phi)^2 - 3V(\phi) \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{6} (\nabla_x \phi)^2 - V(\phi)$$

Vedo che se, durante qualche fase della (INFLU) vita dell'universo la densità di energia è dominata da quella legata al campo scalare ϕ , e questo non varia [però molto lentamente nel tempo per cui $(\dot{\phi}/\phi)^2 \ll V(\phi)$]

allora

$$\left. \begin{aligned} T_{00} = \rho c^2 = +V(\phi) \\ T^{11} = T^{22} = T^{33} = p = -V(\phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = -\rho c^2 \quad w = -1!$$

ciò otteniamo l'eq. di stato che porta all'inflazione.

Ricordiamo che

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1c^4}{8\pi G} g^{\alpha\beta} \rightarrow p_1 = \frac{1c^2}{8\pi G}, \quad p_1 = -\rho c^2 = -\frac{1c^4}{8\pi G}$$

e se $\partial^\mu \phi \equiv 0 \quad \forall \mu$, $T^{\alpha\beta} = V(\phi) g^{\alpha\beta}$ e il termine di energia potenziale fa da vici della costante cosmologica.

Prima di proseguire facciamo una digressione per parlare delle rotture spontanee della simmetria

• Rotture Spontanea delle Simmetrie (SSB)

Se risandiamo alla lagrangiana corrispondente alle eq. di Klein-Gordon

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2}_{V(\phi)}$$

e consideriamo un potenziale $V(\phi)$ generico, vediamo che il termine che moltiplica ϕ^2 ha il significato di una massa al quadrato, e deve essere quindi positivo per avere senso fisico. Se, ad esempio

$$V(\phi) = \alpha^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \alpha^4 \phi^4 + \dots, \text{ dove } \alpha^2 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \text{ e}$$

quindi le particelle del campo avranno una massa

$$m = \sqrt{2} \alpha \cdot \frac{\hbar}{c}.$$

Ma vediamo la seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4$$

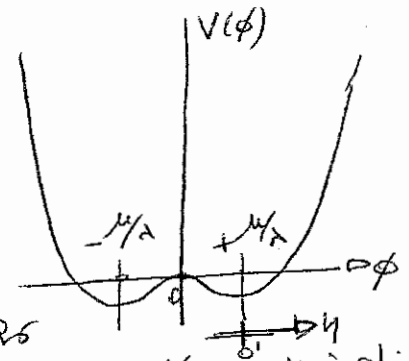
con μ, λ costanti reali. Il secondo termine pare una massa, ed il terzo come un'interazione, ma: il segno è sbagliato: se quella è una massa essa è immaginaria. Come va interpretata questa lagrangiana? Nell'approccio perturbativo delle teorie dei campi quantistici si parte dal livello fondamentale, a più bassa energia (il cosiddetto "vuoto") e si tratta i campi come fluttuazioni attorno a quello stato. Per la lagrangiana di Klein-Gordon lo stato di energia minima è quello banale con $\phi = 0$. Ma per la lagrangiana scritta qui sopra $\phi = 0$ non è lo stato fondamentale. Per determinare il vero stato fondamentale separiamo la parte "cinetica" da quella "potenziale"

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} - V \quad \text{con}$$

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4$$

i cui minimi sono a

$$\phi_{\text{min}} = \pm \frac{\mu}{\lambda} = \pm \sigma$$



Per queste lagrangiane l'approccio perturbativo (alla base del calcolo di Feynman) deve essere formulato in termini di deviazioni da uno o l'altro di questi stati fondamentali. Questo suggerisce di introdurre una nuova variabile di campo η tale che

$$\eta \equiv \phi - \sigma, \quad \phi = \eta + \sigma \quad (\sigma = \mu/\lambda)$$

Facendo queste sostituzioni nella lagrangiana iniziale si ha

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \mu^2 (\eta^2 + \sigma^2 + 2\eta\sigma) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\eta^4 + 4\eta^3\sigma + 6\eta^2\sigma^2 + 4\eta\sigma^3 + \sigma^4) =$$

Simplificando

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta = \lambda^2 \sigma^2 \eta^2 - \lambda^2 \sigma \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} \lambda^2 \sigma^4$$

ci si

NB: se scegliamo il primo minimo moltiplico $\sigma \rightarrow -\sigma$ e cambio segno il termine in η^3 in η^2 !

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \left[\mu^2 \eta^2 + \lambda \mu \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \right]$$

Vedo che ora il segno del termine di massa è corretto e la massa della particella è

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \rightarrow m = \sqrt{2\mu} \frac{\hbar}{c}$$

I termini in η^3 ed η^4 rappresentano accoppiamenti del campo e il ultimo termine, una costante, non significa nulla (la eq. di Eulero-Lagrange non ne risentono), e non il salto di energia tra $\phi=0$ e $\phi=\sigma$. Notiamo che le interazioni del campo η dipendono entrambe dal parametro λ . Al minimo, $\phi=0$ ed η ha un valore di aspettazione del vuoto pari a σ .

Sottolineiamo che le due Lagrangiane, quella in funzione di ϕ e quella in funzione di η , rappresentano esattamente lo stesso sistema fisico (è stato solamente fatto un cambiamento di notazione) e sono equivalenti se il problema è risolto in modo esatto. Ma se vogliamo una descrizione perturbativa è essenziale partire da un minimo per avere la convergenza.

Questo esempio illustra il fenomeno della rottura spontanea della simmetria (Spontaneous Symmetry-breaking - SSB). La Lagrangiana originale è pari in ϕ (cioè è simmetrica rispetto alla riflessione $\phi \rightarrow -\phi$), ma quella finale non è pari in η : la simmetria si è rotta perché

Nel caso in cui il campo ϕ sia spazialmente omogeneo (da cui $\nabla_x \phi = 0$) ed il termine $1/2c^2(\partial\phi/\partial t)^2$ sia trascurabile rispetto al potenziale $V(\phi)$, risulta semplicemente

$$\rho c^2 = V(\phi)$$

$$p = -V(\phi) = -\rho c^2$$

cioè un'equazione di stato che mima quella corrispondente alla costante cosmologica! Sulla base del principio cosmologico (omogeneità dell'universo) si assume che $\nabla_x \phi = 0$ (anche se, in realtà, saranno presenti piccole fluttuazioni sulla scala del raggio di Hubble, che sono i "semi" della struttura a grande scala dell'universo). Vedremo più avanti sotto quali condizioni diviene trascurabile anche il termine $1/2c^2(\partial\phi/\partial t)^2$.

Se accade questo ($\forall \alpha : \partial_\alpha \phi = 0$) allora

$$T^{\alpha\beta} = -p g^{\alpha\beta} = \rho c^2 g^{\alpha\beta} = V(\phi) g^{\alpha\beta}$$

ed il termine di energia potenziale fa le veci della costante cosmologica.

TRANSIZIONI DI FASE E ROTTURA DELLA SIMMETRIA

Nella storia dell'universo primordiale si sono verificate una o più transizioni di fase. Ad energie elevate, secondo la teoria unificata dell'*interazione elettrodebole*, l'interazione elettromagnetica e quella debole si comportano in modo simile. Questo significa che, a causa del progressivo raffreddamento dovuto all'espansione

cosmica, ad un certo istante (attorno ad una temperatura critica $T_{EW} \sim 10^{16} K$, $E_{EW} \sim 10^2 GeV$) l'universo ha subito una transizione di fase, dopo la quale le due interazioni sono risultate separate.

Le *Grand Unified Theories (GUTs)*, che tentano di unificare elettromagnetismo ed interazioni deboli e forti, prevedono a loro volta una transizione di fase nell'universo ad una temperatura critica $T_{GUT} \sim 10^{27} - 10^{28} K$, al disopra della quale vi era simmetria tra le tre interazioni.

Consideriamo un'analogia con la **magnetizzazione di un materiale ferromagnetico**. Al di sopra della temperatura di Curie T_C gli orientamenti dei momenti magnetici di spin degli atomi sono orientati a caso e rapidamente fluttuanti, vi è simmetria rotazionale attorno ad ogni punto del materiale e il valore di aspettativa (il valor medio) dello spin è nullo ($\langle S \rangle = 0$). Tuttavia, scendendo sotto T_C , diventa energeticamente più favorevole, per gli spin, allinearsi e si ha una transizione di fase verso uno stato magnetizzato, con $\langle S_i \rangle \neq 0$ in una certa direzione \hat{i} . La **simmetria** originale viene persa, **rotta**, poiché i diversi domini che si cominciano a formare, indipendentemente gli uni dagli altri, hanno ognuno uno spin con direzione diversa. Alla fine, quando tutta la massa si è trasformata in domini, rimangono dei *difetti* lungo i confini delle diverse parti. In modo simile, mentre al disopra di T_{GUT} la simmetria tra le tre interazioni era manifesta, al disotto di T_{GUT} essa risulta rotta. Tornando al caso del materiale ferromagnetico, il modo in cui la simmetria rotazionale viene rotta nelle differenti porzioni della massa può venir

misurato dalla crescita dello spin S e dall'orientamento dei diversi domini. Similmente, il modo in cui la simmetria tra le tre interazioni si rompe può essere caratterizzata dall'acquisto di valori non nulli da parte di parametri detti **campi di Higgs**; questo fenomeno si chiama **rottura spontanea della simmetria** (*spontaneous symmetry breaking, SSB*). La simmetria è manifesta quando i campi di Higgs hanno valore (di aspettativa) nullo; essa è spontaneamente rotta quando almeno uno dei campi di Higgs acquista un valore (di aspettativa) diverso da zero. Come nel caso dei domini ferromagnetici, rimangono dei difetti sui confini delle differenti regioni nelle quali la simmetria si è rotta in modi differenti, assumendo differenti insiemi di valori per i campi di Higgs. Questi difetti sono detti **difetti topologici**, e possono essere bi-dimensionali (**domain walls**), uni-dimensionali (**cosmic strings**) e zero-dimensionali (**monopoli magnetici**). Durante la transizione di fase che porta alla rottura della simmetria si può anche verificare un periodo di espansione di tipo esponenziale, **l'inflazione** per l'appunto. Vediamo come. Per semplicità consideriamo un unico campo di Higgs, che supponiamo essere il campo scalare ϕ .

Riprendiamo la lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi) - V(\phi)$$

L'equazione del moto, generalizzazione di quella di *Klein-Gordon (KG)*, diventa allora

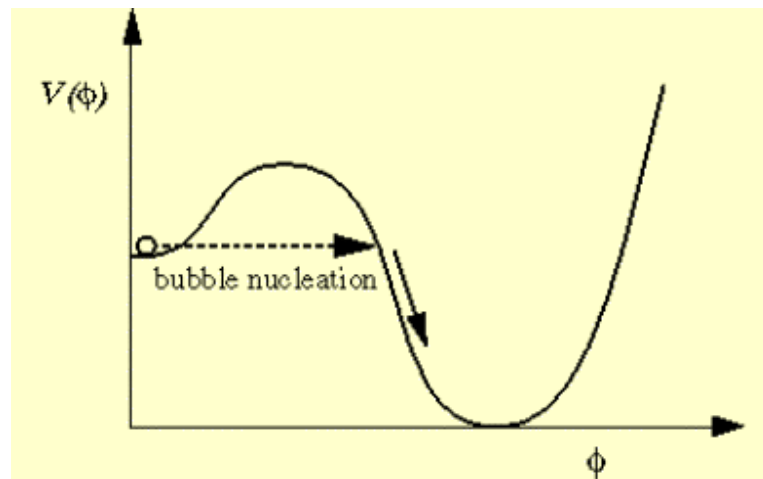
$$\square^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Gli stati delle particelle libere sono soluzione di questa equazione con il solo termine quadratico in ϕ nel potenziale $V(\phi)$, come nell'equazione di *KG*, dalla quale vediamo anche che il coefficiente di questo termine ($V(\phi)=1/2 \mu \phi^2$) specifica la massa della particella.

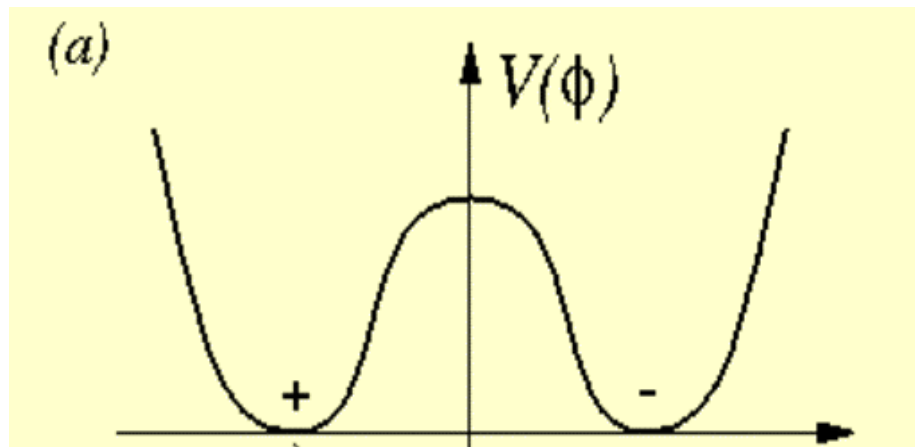
Lo stato di “**vuoto**”, che per definizione è lo stato senza particelle, si verifica quando $\partial V/\partial\phi=0$, che nel caso *KG* corrisponde a $\phi=0$. Termini di ordine superiore in $V(\phi)$ corrispondono a interazioni tra le particelle. L'equazione scritta sopra ammette la soluzione $\phi=costante$ per ogni valore di ϕ per cui sia $\partial V/\partial\phi=0$. Lo stato di vuoto sarà quindi uno di quelli in cui il valore d'aspettativa di ϕ assume uno di questi valori costanti. Sono possibili vari casi:

- Può essere che la $\partial V/\partial\phi=0$ abbia una sola soluzione. Perché l'energia sia inferiormente limitata, questa deve corrispondere ad un minimo di $V(\phi)$ e corrisponde anche all'unico vuoto della teoria.
- D'altra parte ci possono essere più soluzioni della $\partial V/\partial\phi=0$. I massimi del potenziale sono instabili, ma tutti i minimi sono dei possibili vuoti della teoria. Se c'è più di un minimo, quello più basso dovrebbe essere lo stato di vuoto estremo, il “**vuoto vero**” dell'universo.
- Tuttavia, l'universo potrebbe trovarsi, ad un certo istante, in un minimo locale con un valore più elevato del potenziale, sarebbe in un “**falso vuoto**”, con la possibilità, per effetto tunnel, di passare al

vuoto vero.



- In alcuni casi, infine, ci possono essere vari minimi, tutti con lo stesso valore del potenziale; il vuoto sarebbe allora degenere.



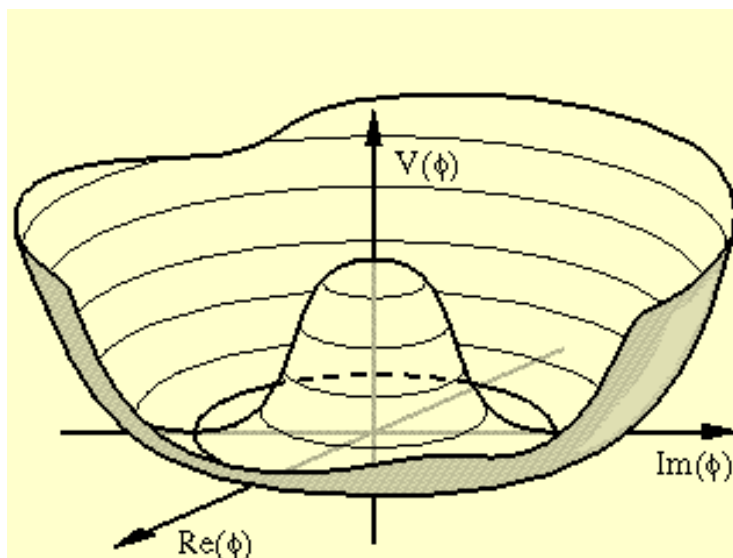
Nel caso qui rappresentato, che corrisponde ad un potenziale del tipo

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + V(0)$$

se l'universo possiede inizialmente un valore di aspettativa di $\phi=0$, essendo questo uno stato instabile, tenderà a cadere in uno dei due stati di vuoto vero

$$\phi = \pm \mu/\sqrt{\lambda}$$

Questo è un esempio con due soli possibili valori del vuoto vero, ma potenziali più generali possono portare ad un numero infinito di possibili valori in cui il vuoto vero può finire. Vedi qui sotto un caso bidimensionale (complesso) per il potenziale.

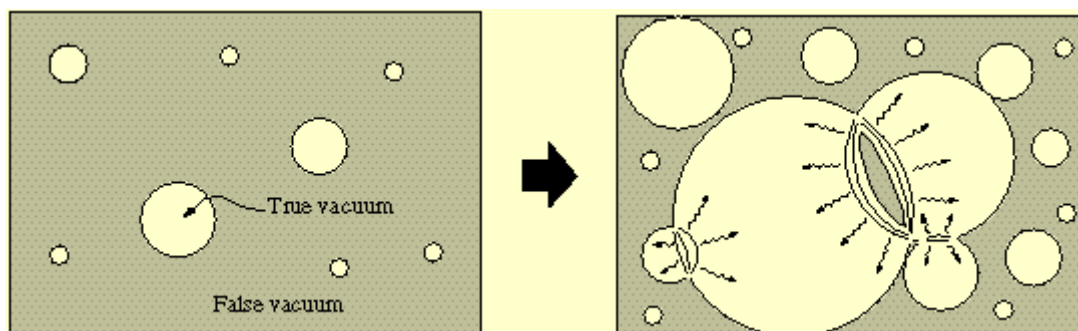


Attraverso la scelta casuale di uno dei minimi si ha la rottura spontanea della simmetria, analoga alla formazione, in una porzione di un materiale ferromagnetico che si raffredda sotto T_C , di un dominio con un particolare orientamento degli spin dei suoi atomi.

Il potenziale scritto qui sopra possiede questa forma ad un valore di $T=0$. Ma nell'universo primordiale, ad elevata temperatura, le correzioni a $V(\phi)$ per tener conto di questo aggiungono dei termini del tipo $\phi^2 T^2$. Vedo quindi che, ad elevata temperatura, la simmetria è non-rotta, con un valore di aspettativa di $\phi=0$.

Al raffreddarsi dell'universo che si espande, secondo dettagli che dipendono dalla forma particolare di $V(\phi)$, la rottura spontanea della simmetria avverrà:

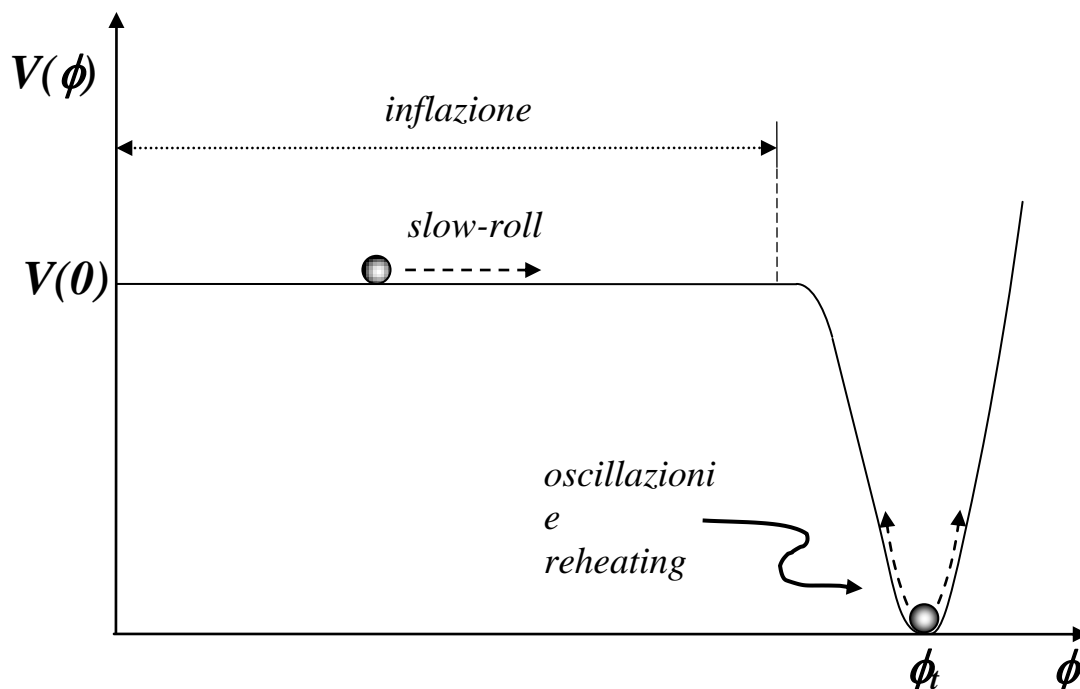
- Attraverso una **transizione di fase del primo ordine**, nella quale il campo, inizialmente in $\phi=0$, supera, per effetto tunnel, una barriera di potenziale entro la quale rimane comunque intrappolato per un certo tempo, durante il quale si verifica la fase di inflazione, con $\partial\phi/\partial t = 0$. È questo il modello proposto inizialmente da Guth, detto **old inflation**, che presenta però dei problemi. Infatti una transizione di fase del primo ordine avviene attraverso la formazione di bolle della nuova fase nel mezzo della fase vecchia; queste bolle si espandono, collidono e coalescono finché la vecchia fase sostituisce completamente la vecchia.



Ma nel modello di Guth, per avere una fase inflativa sufficientemente lunga, la probabilità di formare bolle è bassa e, poiché il falso vuoto si espande esponenzialmente, le bolle non riescono a coalescere e la transizione al vuoto vero non avviene.

- Oppure attraverso una **transizione di fase del secondo ordine**, nella quale il campo evolve tranquillamente da uno stato all'altro. È questo il modello della **new inflation**, proposto da Linde, Albrecht e Steinhardt nel 1982, nel quale il campo evolve molto lentamente (**slow-roll**) dalla condizio-

ne di falso vuoto $\phi=0$ verso il vuoto vero. Anche qui, se l'evoluzione da $\phi=0$ avviene lentamente e con $V(\phi) \cong V(0)$ per un certo tempo prima di cadere nel vuoto vero, abbiamo una fase d'inflazione (vedremo, più avanti, quali sono le condizioni perché questo avvenga).



ORDINI DI GRANDEZZA

Nell'universo primordiale l'espansione, se trascuriamo la curvatura (che comunque tende rapidamente verso lo zero a causa dell'enorme crescita del fattore di scala), sarà data dall'equazione

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

in cui la densità di energia sarà

$$\rho c^2 = \rho_R c^2 + \rho_\Lambda c^2$$

con

$$\rho_R c^2 = \frac{\pi^2}{30} \cdot \frac{g_*(T)(kT)^4}{(\hbar c)^3}$$

$$\rho_\Lambda c^2 = V(\phi = 0)$$

Dove $V(\phi)$ corrisponde alla densità di energia del campo ϕ che, ad alta temperatura, ha il suo minimo in $\phi=0$.

Finchè ρc^2 è dominata da $\rho_R c^2$, l'universo si comporta come nel modello di *EdS* dominato da radiazione, con $a(t) \propto t^{1/2}$. Ma mentre $\rho_R c^2$ scala come $1/a^4$, $\rho_\Lambda c^2$ rimane costante: la tensione (pressione negativa) fa sì che nell'espansione il pdV sia negativo mantenendo così costante l'energia interna del campo ϕ (l'energia gravitazionale è convertita in energia dello stato di vuoto).

Ad un certo istante t_i sarà $\rho_R c^2 \sim \rho_\Lambda c^2$ e l'espansione viene da quel momento dominata da una costante cosmologica “efficace” Λ_{eff} , con espansione esponenziale come nel modello di *de Sitter*:

$$a(t) = a_i \exp \left[\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} V(\phi = 0)} (t - t_i) \right]$$

$$H = \cos t = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} V(\phi = 0)} \equiv \sqrt{\frac{\Lambda_{eff} c^2}{3}}$$

dove a_i è il valore del fattore di scala al tempo t_i .

Al momento dell'eguaglianza, a $T=T_\Lambda$, sarà:

$$\begin{aligned}\rho_\Lambda c^2 = \rho_R c^2 &= \frac{\pi^2}{30} \cdot \frac{g_*(T_\Lambda) (kT_\Lambda)^4}{(\hbar c)^3} \\ &\approx 1.1 \times 10^{40} (kT_\Lambda)_{GeV}^4 \text{ erg/cm}^3 \\ &\approx 1.1 \times 10^{100} (kT_{\Lambda 15})^4 \text{ erg/cm}^3\end{aligned}$$

dove $kT_{\Lambda 15}$ è la scala di energia in unità di $10^{15} GeV$. A questa densità di energia corrisponde una costante cosmologica “efficace”

$$\begin{aligned}\Lambda_{GUT} &= \frac{8\pi G}{c^4} \rho_\Lambda c^2 = 2.3 \times 10^{-8} (kT_\Lambda)_{GeV}^4 \text{ cm}^{-2} \\ &\approx 2.3 \times 10^{52} (kT_{\Lambda 15})^4 \text{ cm}^{-2}\end{aligned}$$

Se confrontiamo questo valore (Λ_{GUT}) per $kT_{\Lambda 15}=1$, con quello della costante cosmologica odierna ($\Lambda_0 \cong 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$) otteniamo un rapporto enorme (*fine tuning?*)

$$\frac{\Lambda_{GUT}}{\Lambda_0} \approx 10^{108}$$

La costante di Hubble, durante la fase in cui il sistema è intrappolato nel falso vuoto ed avviene l'espansione esponenziale, è

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot c = 2.6 \times 10^6 (kT_\Lambda)_{GeV}^2 = 2.6 \times 10^{36} (kT_{\Lambda 15})^2 \text{ s}^{-1}$$

Se assumo $kT_{\Lambda 15}=1$ e voglio che $Ht_f \geq 60$ per risolvere i problemi dell'orizzonte e della piattezza, allora ho che

$$t_f \geq \frac{60}{H} \approx 2 \times 10^{-35} \text{ s}$$

come epoca di fine dell'inflazione, mentre per l'inizio, usando un modello di EdS dominato da radiazione, avremo

$$t_i \approx \frac{1}{2H} \approx 2 \times 10^{-37} \text{ s}$$

Queste sono stime all'ordine di grandezza e dipendono dal valore di kT_Λ adottato.

DINAMICA DELL'INFLATONE

Vediamo di ricavare l'equazione di evoluzione dell'*inflaton*, cioè del campo scalare ϕ , partendo dalla densità lagrangiana:

$$S_\phi = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x$$

Per un universo in espansione, spazialmente piatto, in coordinate ortogonali, $\sqrt{-g} = a^3$ e le equazioni di Eulero-Lagrange si applicano alla quantità $a^3 \mathcal{L}$:

$$a^3 \mathcal{L} = \frac{a^3}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - a^3 V(\phi)$$

Se l'inflaton dipende solamente dal tempo, e non dalle coordinate spaziali, solo le ∂_0 saranno diverse da zero e

$$a^3 \mathcal{L} = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - a^3 V(\phi)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange danno:

$$\frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}\right)} = c \cdot \frac{a^3}{2c^2} \cdot 2 \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{a^3\dot{\phi}}{c}$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{a^3\dot{\phi}}{c} \right] = \frac{1}{c^2} [a^3\ddot{\phi} + \dot{\phi} \cdot 3a^2\dot{a}]$$

$$\frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial\phi} = -a^3 \frac{dV}{d\phi}$$

Mettendo insieme e semplificando si arriva a ($\dot{a}/a = H$)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + c^2 \frac{dV}{d\phi} = 0$$

che rappresenta l'evoluzione dell'inflatone.

Questa equazione, se la riferiamo al potenziale tipico della new inflation, ha due regimi differenti, quello detto di "slow roll" e quello delle rapide oscillazioni attorno al minimo. Vediamole più in dettaglio.

a) Slow-roll: è la fase di lento "rotolamento" non accelerato del campo ϕ e che corrisponde alla fase di inflazione. In questo regime il termine $\ddot{\phi}$ è trascurabile e l'equazione del moto si riduce a

$$3H\dot{\phi} = -c^2 \frac{dV}{d\phi}$$

cioè l'attrito dovuto all'espansione è bilanciato

dinamicamente dall'accelerazione dovuta alla pendenza del potenziale. La condizione $|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$, usando la derivata dell'espressione scritta sopra, ricordando che H è essenzialmente costante durante l'inflazione, ed indicando con V'' la $d^2V/d\phi^2$ fornisce

$$\left| \frac{c^2 V'' \dot{\phi}}{3H} \right| \ll |3H\dot{\phi}| \rightarrow |V''| \ll \frac{9H^2}{c^2} \approx \frac{9}{c^2} \cdot \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{V}{c^2} \approx \frac{24\pi G V}{c^4}$$

$$\eta(\phi) \equiv \frac{c^4}{24\pi G} \left| \frac{V''}{V} \right| \ll 1$$

Ma un'altra condizione importante affinché sia $p = -\rho c^2$ è che $\dot{\phi}^2 / 2c^2 \ll V(\phi)$ da cui

$$\left(\frac{c^2 V'}{3H} \right)^2 \ll 2c^2 V \rightarrow c^2 V'^2 \ll 2V \cdot 9H^2 \approx 2V \cdot 9 \cdot \frac{8\pi G V}{3c^2}$$

$$\varepsilon(\phi) \equiv \frac{c^4}{48\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1$$

Le due condizioni sopra riportate assicurano lo “*slow roll*”

b) Rapide oscillazioni: Terminata la fase di inflazione il potenziale “cade” nel vuoto vero e l'inflatone compie delle rapide oscillazioni attorno al minimo. Se tutto si fermasse qui avrei delle oscillazioni che col passar del tempo subiscono redshift, in un universo che si è già raffreddato enormemente durante la fase di espansione

adiabatica inflazionarla. Perché la storia termica dell'universo si svolga come suggerisce l'evidenza (ad esempio la *BBN*) occorre che l'energia del falso vuoto sia convertita in materia e radiazione con una certa efficienza. Questo processo prende il nome di **Reheating**. Abbiamo già notato che l'inflazione diluisce rapidamente i monopoli magnetici perché la densità di energia del campo scalare rimane costante, mentre la densità dei monopoli decresce come $1/a^3$ (questo non vuol dire che spariscono completamente; un giorno rientreranno entro l'orizzonte). Tuttavia, affinché non vengano ricreati dal reheating, occorre che questo non riporti la temperatura dell'universo a valori tali da ricrearli.

c) **Il numero di e-foldings**: È immediato calcolare il numero \mathcal{N} di *e-foldings*. Partiamo da

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{a dt} \rightarrow \frac{da}{a} = H dt \rightarrow \int_{a_i}^{a_f} d \ln(a) = \int_{t_i}^{t_f} H dt$$

$$\mathcal{N} \equiv \ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) = \int_{t_i}^{t_f} \frac{H^2}{H} dt = - \int_{t_i}^{t_f} \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{V(\phi)}{c^2} \cdot \frac{3\dot{\phi}}{c^2 V'(\phi)} dt$$

$$\mathcal{N} = - \frac{8\pi G}{c^4} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi$$

ALTRI MODELLI DI INFLAZIONE

Nel modello di inflazione che abbiamo descritto si

verifica una rottura spontanea della simmetria, ma è possibile ottenere inflazione anche senza *SSB*, come nel caso della cosiddetta ***chaotic inflation*** proposta da Linde (1983), in cui il potenziale $V(\phi)$ è semplicemente

$$V(\phi) = \lambda\phi^4$$

e il potenziale ha un minimo a $\phi=0$. La fase di inflazione avviene se, entro l'orizzonte, il campo, per effetto delle fluttuazioni quantistiche, assume un valore diverso da zero in una regione di universo e poi ritorna verso il minimo. Questo può avvenire alla fine dell'epoca di Planck, anziché all'epoca della rottura della grande unificazione.

Per risolvere i problemi del modello standard non è indispensabile una fase inflativa con andamento esponenziale del fattore di scala; è sufficiente che

$$a(t) \propto t^p \quad p > 1$$

(power-law inflation) Il potenziale richiesto è del tipo

$$V(\phi) \propto e^{\alpha\phi}$$

Abbiamo detto che l'inflazione porta l'universo verso $\Omega \cong 1$. In realtà sono stati anche proposti modelli di inflazione più complessi nei quali, entro una bolla che può abbracciare ampiamente l'attuale sfera di Hubble, l'universo possiede un valore di **$\Omega < 1$** .

Nella trattazione dell'inflazione abbiamo assunto uno spazio piatto, omogeneo ed isotropo. Cosa accade se così non è? Si può vedere (vedi ad esempio il cap. 8, paragrafo 6 in "*The Early Universe*" di Kolb e

Turner) che, a meno che lo spazio di partenza non sia tanto curvato positivamente da far ricollassare l'universo prima dell'inflazione, questa produce, per un'ampia classe di modelli, enormi regioni uniformi e piatte, che superano come dimensioni l'attuale raggio di Hubble, e risolvono quindi i problemi del modello standard. Inomogeneità e/o anisotropie sono però solo ritardate, e finiscono col ricomparire prima o poi.

L'origine della costante cosmologica odierna 10/1

- Come possiamo interpretare l'odierna costante cosmologica? Nelle eq. di Einstein (e in quelle di Friedmann), se togliamo tutta la materia, rimane la cost. cosmologica come sorgente del campo: Λ corrisponde alla densità del vuoto.
- Ma nell'odierna teoria quantistica dei campi il vuoto non è il nulla della metafisica, bensì lo stato fondamentale, di minima energia, senza particelle, del campo stesso. Abbiamo visto che la cost. cosmologica si comporta come un fluido perfetto con $\rho_1 c^2 =$

$$\rho_1 c^2 = \frac{1c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad p_1 = -\rho_1 c^2 = -\rho_1 c^2, \quad \text{ed il tensore energia-impulso è diagonale } T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}.$$

D'altra parte ci si deve aspettare che i valori ϵ_1 e p_1 che definiscono lo stato di vuoto siano gli stessi in qualsiasi sist. di riferimento non accelerato, in modo da essere relativisticamente invarianti. Se ad esempio facciamo una trasformazione di Lorentz con velocità $v = \beta c$ lungo l'asse x^1 , il $T^{\alpha\beta}$ si trasformerà come

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} T^{\gamma\delta} \quad \text{dove}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

e $T^{\gamma\delta}$ è diagonale come sopra

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 02 & 03 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \quad p c^2 = \epsilon_1$$

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & \\ p c^2 & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}$$

Se $\alpha=\beta$ $T^{\alpha\beta} \neq 0$

$$T'^{00} = \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\beta}^0 T^{\alpha\beta} =$$

$$= \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\alpha}^0 T^{\alpha\alpha} = \gamma^2 p c^2 + \gamma^2 p = \gamma^2 [\epsilon_1 + \beta^2 p]$$

$$\boxed{\epsilon_1' = \frac{\epsilon_1 + \beta^2 p}{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$$

$$T'^{01} = \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\beta}^1 T^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\alpha}^1 T^{\alpha\alpha} =$$

$$= \gamma^2 \beta \epsilon_1 + \gamma^2 \beta p = \boxed{\gamma^2 \beta (\epsilon_1 + p)} = T'^{10}$$

$$T'^{11} = \Lambda_{\alpha}^1 \Lambda_{\beta}^1 T^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^1 \Lambda_{\alpha}^1 T^{\alpha\alpha} =$$

$$= \gamma^2 \beta^2 \epsilon_1 + \gamma^2 p = \gamma^2 [\beta^2 \epsilon_1 + p] = \boxed{\frac{\beta^2 \epsilon_1 + p}{1 - \beta^2}}$$

$$T'^{02} = \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\beta}^2 T^{\alpha\beta} = 0 \dots$$

$$T'^{22} = \Lambda_{\alpha}^2 \Lambda_{\beta}^2 T^{\alpha\beta} = p = T'^{33}$$

Se $\boxed{p = -\epsilon_1}$ $\epsilon_1' = \frac{\epsilon_1 [1 - \beta^2]}{1 - \beta^2} \cong \epsilon_1$

$T'^{01} = T'^{10} = 0$ $T'^{11} = \frac{p [1 - \beta^2]}{1 - \beta^2} = p$

Si può vedere che si ha:

$$T'^{00} = \epsilon'_1 = \frac{\epsilon_1 + \beta^2 p_1}{1 - \beta^2}$$

$$T'^{01} = \gamma^2 \beta (\epsilon_1 + p_1) = T'^{10}$$

$$T'^{11} = \frac{\beta^2 \epsilon_1 + p_1}{1 - \beta^2} \quad T'^{22} = T'^{33} = p_1$$

e gli altri: $T'^{i0} = 0$.

Affinchè $\epsilon'_1 = \epsilon_1$ e $p'_1 = p_1$ e T'^{i0} sia diagonale occorre che $p_1 = -\epsilon_1 = -p_1 c^2$.

• Vediamo quindi che non solo il "falso vuoto", ma anche il vuoto "vero" possiede un'ip di stato analogo.

• Possiamo anche pensare al vuoto come una "sostanza" con date ϵ_1 e p_1 , nel senso che la relazione $dU = -dL = -p dV$ (essendo $dQ = 0$) è soddisfatta.

Infatti: $dU = d(\epsilon_1 V) = \epsilon_1 dV = -p_1 dV$ se $p_1 = -\epsilon_1$.

• Ma quanto può valere questa ϵ_1 ?

Consideriamo un oscillatore armonico quantistico. I suoi livelli energetici sono dati da

$$E_m = \hbar \omega \left(m + \frac{1}{2} \right) \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

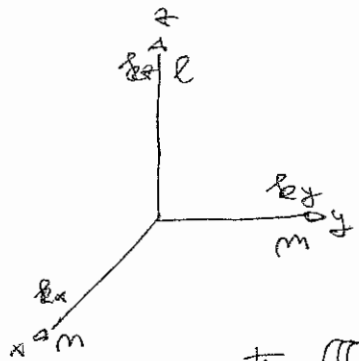
Il vuoto ($m=0$) ha un valore finito di energia (e non di punto zero) $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$.

Un campo può essere considerato come la somma di oscillatori armonici di tutte le possibili ω . Nel caso più semplice di un campo scalare con massa m , l'energia del vuoto è la somma di tutti i contributi:

$$E_0 = \int_j \frac{1}{2} \hbar \omega_j$$

Per eseguire il calcolo partiamo il nostro sistema 10/3
 entro una scatola cubica di lato L (che si farà poi far
 tendere all'infinito) e imponendo condizioni periodiche
 al contorno. Se $k = 2\pi/\lambda$, lungo la direzione x sarà

$$m \cdot \frac{\lambda}{2} = L \rightarrow k_x = m \frac{\pi}{L} \text{ e analoghe}$$



Allora

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_{m_x, m_y, m_z} \omega(k)_{mem} \rightarrow \frac{\hbar}{2} \iiint \omega(k)_{mem} d^3k_{mem}$$

$$ma \quad dm = \frac{L}{\pi} dk_x \text{ e analoghe}$$

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \iiint \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \omega(k) d^3k = \frac{\hbar}{2} \int_0^\infty \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \omega(k) \cdot \frac{4\pi}{8} k^2 dk$$

dove il fattore $1/8$ deriva dal fatto che integriamo su un
 ottavo in k_x, k_y e k_z . Alla fine

$$E_0 = L^3 \cdot \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty \omega(k) k^2 dk = L^3 \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{k^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} k^2 dk$$

$$\text{avendo usato } E^2 = \hbar^2 \omega^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow \hbar^2 \omega^2 = \hbar^2 k^2 c^2 + m^2 c^4 \text{ (per } k)$$

$$\rho_A^2 = \frac{E_0}{L^3} = \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^{k_{max}} \sqrt{k^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} k^2 dk \approx \frac{\hbar c}{16\pi^2} k_{max}^4$$

dove si è fatta una frequenza massima $k_{max} (\Rightarrow m)$ per evi-
 tare che l'integrale diverga! Otteniamo quindi:

$$\rho_A \approx \frac{\hbar}{16\pi^2 c} (k_{max})^4 \quad \text{con } k_{max} \sim \frac{E_{max}}{\hbar c}$$

Se immaginiamo che il taglio sia alle scale di Planck $k_{max} \sim \frac{E_{pl}}{\hbar c}$
 $\sim \frac{1}{l_{pl}}$ e otteniamo $\rho_A \approx 10^{92} \text{ gam}^{-3}$ contro un valore
 $\rho_A = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \text{ (} \Lambda \sim 2 \times 10^{-56} \text{ cm}^{-2} \text{)} \approx 10^{-29} \text{ gam}^{-3} \Rightarrow 121 \text{ ordini}$

di grandezza di differenza! Anche tagliando ad E_{max} in
 $\sim 200 \text{ GeV}$ abbiamo una discrepanza di 54 ordini di gran-
 desza; tagliando a $\Lambda_{CDM} \sim 4.2$ ordini di grandezza.
 E' questo il problema della costante cosmologica del

punto di vista delle forze delle particelle. Nel (10/4)
 caso di una Supersimmetria tra fermioni e bosoni
 il contributo dei fermioni è $\sim -\frac{1}{2} \omega$ e cancella
 esattamente il contributo bosonico. Ma sappiamo
 che questo può valere fintanto che non è rotta la
 SUSY, non oggi.

- Sono stati proposti vari meccanismi per avere una Λ
 piccola ma non nulla, ma nessuno chiaramente con-
 vincente. Sono stati anche avanzati modelli in cui
 Λ varia nel tempo. (vedi altre)
- Accenniamo solo brevemente all'idea di Zeldovich
 (1968): il vuoto è formato da coppie virtuali parti-
 cella-antiparticella di massa m e separazione
 pari a $\lambda = \frac{h}{mc}$ (l.d.o. Compton). Sebbene l'auto-
 energia di queste particelle sia zero, la loro intera-
 zione gravitazionale è finita (e negativa), per cui al
 vuoto corrisponde un'energia $\epsilon_1 = \rho_1 c^2 \sim \frac{Gm^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^3}$,
 per cui $\rho_1 \sim \frac{Gm^3 c^2}{h^4}$. Se per un universo la massa
 m_p del protone otteniamo $\rho_1(m_p) \sim 10^{-21} \text{ g cm}^{-3}$; se
 usiamo $m = m_e$, $\rho_1(m_e) \sim 3 \times 10^{-41} \text{ g cm}^{-3}$, a
 cervello del valore $10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. La massa del pione
 fornisce invece un valore prossimo a quello corretto.
- Sono state avanzate anche spiegazioni "autoproche",
 secondo cui una Λ troppo negativa farebbe collassare
 l'universo prima che si formi la vita, ed una Λ
 troppo grande e Λ lo farebbe espandere troppo
 presto e rapidamente, impedendo la formazione
 di strutture cosmiche e, di conseguenza, anche di
 stelle, pianeti e futuri.

Una alternativa ad una costante cosmologica $\Lambda \neq 0$ (10/5)
 può essere costituita da un campo scalare che varia
 lentamente e con eq. di stato $p_Q = w_Q \rho_Q c^2$ con w_Q
 negativo, come nel caso della cosiddetta quintessenza
 [QCDM o XCDM], con campo scalare Q , con potenziale $V(Q)$,
 ed equazione di stato

$$w_Q = \frac{\frac{\dot{Q}^2}{2c^2} - V(Q)}{\frac{\dot{Q}^2}{2c^2} + V(Q)}$$

che, a seconda del valore dell'energia cinetica, finisce in fi-
 nez di principio assumere qualunque valore tra -1 e $+1$.
 L'evoluzione di Q (se $k=0$) sarà data dall'eq.:

$$\ddot{Q} + 3 \frac{\dot{Q}}{a} \dot{Q} + c^2 \frac{dV(Q)}{dQ} = 0$$

Le dinamiche dell'universo dalla

$$\left\{ \begin{aligned} H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} (\rho_Q + \rho) \\ \rho_Q c^2 &= \frac{\dot{Q}^2}{2c^2} + V(Q) \end{aligned} \right.$$

Peebles & Ratra hanno proposto un potenziale

$$V(\phi) \approx \frac{2c}{Q^2}$$

Se, ad alto z , ρ_Q è "subdominante" rispetto alla densità ρ
 del background (materia o radiazione) [altrimenti la BBN
 potrebbe essere alterata], e assumiamo che

$$\langle \Omega(H) \sim t^q \rangle$$

l'eq. del moto del campo diventa: $\left\{ \begin{aligned} \frac{dV(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ} \left[\frac{\chi}{Q^\alpha} \right] &= \frac{10/6}{Q^{\alpha+1}} \\ &= -\chi \alpha Q^{-\alpha-1} \end{aligned} \right.$

$$\ddot{Q} + 3 \frac{\dot{Q}}{Q} \dot{Q} - \frac{\chi \alpha d}{Q^{\alpha+1}} = 0$$

$$2 \sim t^q \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{q t^{q-1}}{t^q} = \frac{q}{t}$$

$$\ddot{Q} + 3 \frac{q}{t} \dot{Q} = \frac{\chi \alpha d}{Q^{\alpha+1}}$$

che ha come soluzione $Q = A t^p \rightarrow \begin{cases} \dot{Q} = p A t^{p-1} \\ \ddot{Q} = A p(p-1) t^{p-2} \end{cases}$

$$A p(p-1) t^{p-2} + 3 \frac{q}{t} p A t^{p-1} = \frac{\chi \alpha d}{A^{\alpha+1} (t^p)^{\alpha+1}}$$

$$A [p(p-1) + 3gp] t^{p-2} = \frac{\chi \alpha d}{A^{\alpha+1}} t^{-p(\alpha+1)}$$

$$\Rightarrow p-2 = -p(\alpha+1) \rightarrow p+p(\alpha+1) = 2 \rightarrow p(\alpha+2) = 2$$

$$p = \frac{2}{\alpha+2}$$

$$Q \sim t^{\frac{2}{\alpha+2}} \leftarrow \text{non dipende da } q!$$

$$\rho_Q c^2 = \frac{1}{2c^2} \dot{Q}^2 + V(Q) = \frac{1}{2c^2} A^2 p^2 t^{2(p-1)} + \frac{\chi}{A^\alpha t^{\alpha p}} =$$

$$= \left[\frac{A^2 p^2}{2c^2} + \frac{\chi}{A^\alpha} \right] t^{2p-2} \sim t^{-\frac{2\alpha}{\alpha+2}}$$

Perciò, in FdS, $\rho \propto \frac{1}{t^2}$ (sia per ρ che per $\dot{\rho}$)

$$\frac{\rho_Q}{\rho} \propto \frac{t^{2p-2}}{t^{1/2}} \sim t^{2p} \sim t^{\frac{4}{\alpha+2}}$$

$$\begin{cases} p = \frac{2}{\alpha+2} \\ \alpha+2 = \frac{2}{p} \\ \alpha = \frac{2}{p} - 2 = \frac{2-2p}{p} \\ \alpha p = 2(1-p) \end{cases}$$

$\alpha < 0$ $V(p) = \text{cost}$ corrisponde alla classica $1 = \cosh(\rho_Q \alpha t^2)$

$\alpha > 0$ il campo scalare può dominare la densità dell'universo e il campo è unitario, anche se era trascurabile a t elevati

BREVE STORIA COSMICA

<i>Epoca</i>	<i>t (sec)</i>	<i>E(3kT)</i>	<i>T (K)</i>	<i>Osservazioni</i>
<i>Planck</i>	10^{-44}	10^{19} GeV	5×10^{31}	<i>Gravità quantistica</i>
<i>GUT</i>	10^{-38}	10^{16} GeV	5×10^{28}	<i>Rottura grande unificazione.</i>
	10^{-36}	10^{15} GeV	5×10^{27}	<i>Inflazione? Bariogenesi?</i>
<i>Elettrodebole</i>	10^{-10}	10^2 GeV	5×10^{16}	<i>Rottura unificazione elettrodebole</i>
<i>Adronica</i>	10^{-4}	200 MeV	10^{12}	<i>Transizione quark-adroni</i>
<i>Leptonica</i>	0.7	1 MeV	10^{10}	<i>Disaccoppiamento ν_e</i>
	5	0.5 MeV	5×10^9	<i>Annichilazione $e^+ e^-$</i>
<i>BBN</i>	$2-3 \text{ min}$	0.1 MeV	10^9	<i>Nucleosintesi ^4He, ^3He, D, ^7Li</i>
<i>Equivalenza</i>	$6 \times 10^4 \text{ yr}$	$2 - 3 \text{ eV}$	10^4	<i>Inizia l'epoca dominata dalla materia</i>
<i>Ricombinazione</i>	$4 \times 10^5 \text{ yr}$	0.7 eV	3000	<i>L'universo diventa neutro e trasparente</i>
<i>Vuoto</i>	10 Gyr	10^{-3} eV	3.6	<i>Inizia l'epoca dominata dal vuoto</i>
<i>Oggi</i>	13.7 Gyr	$7 \times 10^{-4} \text{ eV}$	2.73	