Introduzione alla logica proposizionale

(1ª parte: Sintesi)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

Trieste, 07/03/2016

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Killer application *(in elettronica digitale):*

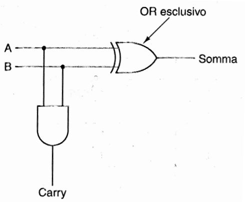
Disegno, minimizzazione,

generazione automatica di

circuiti combinatòri

A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

a)



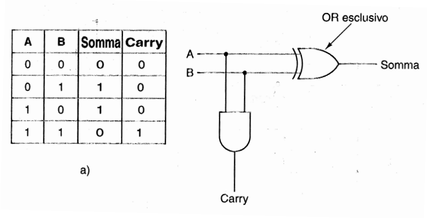
1

Killer application (*in elettronica digitale*):

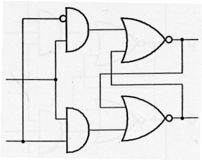
Disegno, minimizzazione,

generazione automatica di

circuiti combinatòri[1]



A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

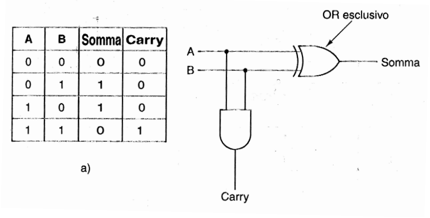


[1] Per i circuiti sequenziali, serve di piú...

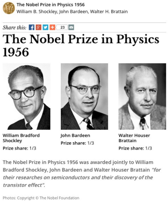
Disegno, minimizzazione,

generazione automatica di

circuiti combinatòri



A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



The Nobel Prize in Physics 1956
William B. Shockley, John Bardeen, Walter H. Brattain

Share this: 23

The Nobel Prize in Physics 1956

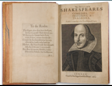
William Bradford Shockley
Prize share: 1/3

John Bardeen
Prize share: 1/3

Walter Houser Brattain
Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 1956 was awarded jointly to William Bradford Shockley, John Bardeen and Walter Houser Brattain *"for their researches on semiconductors and their discovery of the transistor effect"*.

Photos: Copyright © The Nobel Foundation



14

Not from the stars do I my judgement pluck,
And yet methinks I have astronomy;
But not to tell of good or evil luck,
Of plagues, of dearths, or seasons' quality;
Nor can I fortune to brief minutes tell,
Pointing to each his thunder, rain, and wind,
Or say with princes if it shall go well
By oft predict that I in heaven find.
But from thine eyes my knowledge I derive,
And, constant stars, in them I read such art
As truth and beauty shall together thrive
If from thyself to store thou wouldst convert;
Or else of thee this I prognosticate:
Thy end is Truth's and Beauty's doom and date.

14

Non prendo i miei giudizi dalle stelle,
eppure io ne so, di astrologia:
ma non predico cose brutte, o belle,
o peste, o siccità, o carestia,
né prevedo in dettaglio, a uno o una,
se avrà burrasche, o tuoni e temporali,
o ai prìncipi se avranno o no fortuna,
interpretando i vari segni astrali.
Io prendo dai tuoi occhi la mia scienza,
stabili stelle in cui vedo il mistero:
o tu trarrai da te una discendenza,
facendo rifiorire il bello e il vero,
o io prevedo che terminerà,
con te, ogni Bellezza e Verità.

- lessico

Scaletta

- lessico
- sintassi ridotta
- sintassi estesa

Scaletta

- lessico
- sintassi ridotta
- sintassi estesa
- semantica

Scaletta

- lessico
- sintassi ridotta
- sintassi estesa
- semantica
- potere espressivo
  - ⋆ funzioni su di un dominio formato da 2 valori (*switching algebra*)

Scaletta

- lessico
- sintassi ridotta
- sintassi estesa
- semantica
- potere espressivo
  - ⋆ funzioni su di un dominio formato da 2 valori (*switching algebra*)
  - ⋆ forme normali (*nnf*, *cnf*, *dnf*, ecc.)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- lessico
- sintassi ridotta
- sintassi estesa
- semantica
- potere espressivo
  - ⋆ funzioni su di un dominio formato da 2 valori (*switching algebra*)
  - ⋆ forme normali (*nnf*, *cnf*, *dnf*, ecc.)
  - ⋆ una base adeguata di connettivi (la popolare triade *non*, *ed*, *od*)

$\neg$, $\&$, $\vee$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- lessico
- sintassi ridotta
- sintassi estesa
- semantica
- potere espressivo
  - ⋆ funzioni su di un dominio formato da 2 valori (*switching algebra*)
  - ⋆ forme normali (*nnf*, *cnf*, *dnf*, ecc.)
  - ⋆ una base adeguata di connettivi (la popolare triade *non*, *ed*, *od*)

    $\neg$, $\&$, $\vee$
  - ⋆ altre basi adeguate (in partic. la $\mathbf{f}$, $\rightarrow$)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- lessico
- sintassi ridotta
- sintassi estesa
- semantica
- potere espressivo
  - ⋆ funzioni su di un dominio formato da 2 valori (*switching algebra*)
  - ⋆ forme normali (*nnf*, *cnf*, *dnf*, ecc.)
  - ⋆ una base adeguata di connettivi (la popolare triade *non*, *ed*, *od*)

    $\neg$, **&**, $\vee$
  - ⋆ altre basi adeguate (in partic. la $\mathbf{f}$, $\rightarrow$)
- Mappe di Karnaugh (Maurice Karnaugh, 1924–)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

ALFABETO

Consideriamo una successione (infinita)

$$(\,,\quad)\,,\quad \rightarrow\,,\quad \mathsf{p}_0\,,\quad \mathsf{p}_1\,,\quad \mathsf{p}_2\,,\quad \mathsf{p}_3\,,\quad \mathsf{p}_4\,,\quad \ldots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi ***simboli***.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Alfabeto

Consideriamo una successione (infinita)

$$(\,,\quad) \,,\quad \to \,,\quad \mathsf{p}_0 \,,\quad \mathsf{p}_1 \,,\quad \mathsf{p}_2 \,,\quad \mathsf{p}_3 \,,\quad \mathsf{p}_4 \,,\quad \ldots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi ***simboli***.

(E se volessimo ridurci ad un alfabeto finito ?)

Parole

Con la notazione

$$“\sigma_1 \cdots \sigma_h”$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_h \rangle \, ,$$

ovvero un'*h-upla*, con un numero qualsiasi h di componenti, *formata di simboli* σ_i

Parole

Con la notazione

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”}$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_h \rangle\,,$$

ovvero un'*h-upla*, con un numero qualsiasi h di componenti, *formata di simboli* σ_i

Esercizio “*tutto è numero*”

Istituire una biiezione ‘effettiva’ fra seq. di parole e numeri naturali.

Lettere proposizionali

Indichiamo con

$$\mathbf{f}\,,\ \underbrace{p\,,\ q\,,\ r\,,\ s\,,\ p'\,,\ q'\,,\ r'\,,\ s'\,,\ p''\,,\ \ldots}_{\text{lettere proposizionali}}$$

la successione di 1-uple

$$\text{“}\mathrm{p}_0\text{”},\ \text{“}\mathrm{p}_1\text{”},\ \text{“}\mathrm{p}_2\text{”},\ \text{“}\mathrm{p}_3\text{”},\ \text{“}\mathrm{p}_4\text{”},\ \text{“}\mathrm{p}_5\text{”},\ \text{“}\mathrm{p}_6\text{”},\ \ldots$$

Agli aggregati di simboli che, nel formalismo, rappresentano le proposizioni, si usa dare il nome di *enunciati*. Si tratta di espressioni molto simili, per costituzione e significato, alle espressioni aritmetiche.

L'implicazione materiale

Definiamo l'operazione $\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\rho}$ per ogni coppia

$$\boldsymbol{\sigma} \;=\; \text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”}, \qquad \boldsymbol{\rho} \;=\; \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”}$$

di sequenze finite di simboli ponendo

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”} \;\Rightarrow\; \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”} \quad =_{\text{Def}} \quad \text{“}(\sigma_1 \cdots \sigma_h \to \rho_1 \cdots \rho_k)\text{”}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ecco gli enunciati:

Definiamo $\mathcal{P}$ come il *piú piccolo* soprainsieme di

$$\left\{ \mathbf{f}\,,\ \ p\,,\ \ q\,,\ \ r\,,\ \ s\,,\ \ p'\,,\ \ q'\,,\ \ r'\,,\ \ s'\,,\ \ p''\,,\ \ \ldots\ \ \right\}$$

tale che per ogni coppia α, β di sequenze $\boxed{\text{in } \mathcal{P}}$ anche $\alpha \Rightarrow \beta$ appartenga a $\mathcal{P}$

(Questa sintassi è venuta ad essere uno *standard de facto*)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Grammatica:

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\,\text{enunc}\,\rangle & ::= & \langle\,\text{let}\,\rangle \mid \langle\,\text{cost}\,\rangle \mid \\
& & (\,\langle\,\text{uop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,) \mid (\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,\langle\,\text{bop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,) \\
\langle\,\text{let}\,\rangle & ::= & p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{let}\,\rangle\,' \\
\langle\,\text{cost}\,\rangle & ::= & \mathbf{f} \mid \mathbf{v} \\
\langle\,\text{uop}\,\rangle & ::= & \neg \\
\langle\,\text{bop}\,\rangle & ::= & \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \,|\, \mid \downarrow \mid > \mid +
\end{array}
$$

Grammatica:

$$\langle\, \text{enunc}\,\rangle \quad ::= \quad \langle\, \text{let}\,\rangle \mid \langle\, \text{cost}\,\rangle \mid$$
$$\big(\, \langle\, \text{uop}\,\rangle\, \langle\, \text{enunc}\,\rangle\, \big) \mid \big(\, \langle\, \text{enunc}\,\rangle\, \langle\, \text{bop}\,\rangle\, \langle\, \text{enunc}\,\rangle\, \big)$$

$$\langle\, \text{let}\,\rangle \quad ::= \quad p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\, \text{let}\,\rangle\, '$$

$$\langle\, \text{cost}\,\rangle \quad ::= \quad \mathbf{f} \mid \mathbf{v}$$

$$\langle\, \text{uop}\,\rangle \quad ::= \quad \neg$$

$$\langle\, \text{bop}\,\rangle \quad ::= \quad \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \,|\, \mid \downarrow \mid > \mid +$$

Come prima, la categoria sintattica principale è l'***enunciato***,

$$\langle\, \text{enunc}\,\rangle$$

Grammatica:

$$\langle\,\text{enunc}\,\rangle \quad ::= \quad \langle\,\text{let}\,\rangle \mid \langle\,\text{cost}\,\rangle \mid (\,\langle\,\text{uop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,) \mid (\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,\langle\,\text{bop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,)$$

$$\langle\,\text{let}\,\rangle \quad ::= \quad p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{let}\,\rangle\,'$$

$$\langle\,\text{cost}\,\rangle \quad ::= \quad \mathbf{f} \mid \mathbf{v}$$

$$\langle\,\text{uop}\,\rangle \quad ::= \quad \neg$$

$$\langle\,\text{bop}\,\rangle \quad ::= \quad \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \,|\, \mid \downarrow \mid > \mid +$$

Come prima, la categoria sintattica principale è l'***enunciato***,

$$\langle\,\text{enunc}\,\rangle$$

Gli $\langle\,\text{uop}\,\rangle$ e $\langle\,\text{bop}\,\rangle$ si chiamano ***connettivi*** (proposizionali)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Regole di precedenza

connettivi	priorità
$\neg$	4
$\&$ $\downarrow$ $>$	3
$\vee$ $\vert$	2
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $+$	1

(priorità piú alta significa precedenza, ossia "potere coesivo" maggiore).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Regole di precedenza

connettivi	priorità
$\neg$	4
$\&\ \downarrow\ >$	3
$\vee\ \mid$	2
$\rightarrow\ \leftrightarrow\ +$	1

(priorità piú alta significa precedenza, ossia "potere coesivo" maggiore).

Ove queste priorità non bastino a rendere univoca la lettura di un enunciato, conveniamo di far prevalere il connettivo piú a $\boxed{\text{destra}}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

connettivi	priorità
$\neg$	4
$\&$ $\downarrow$ $>$	3
$\vee$ $\vert$	2
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $+$	1

(priorità piú alta significa precedenza, ossia "potere coesivo" maggiore).
Ove queste priorità non bastino a rendere univoca la lettura di un enunciato, conveniamo di far prevalere il connettivo piú a $\boxed{\text{destra}}$

Esempio: $p \rightarrow\ q'' \,\&\ \neg\ \neg\ p \rightarrow\ \mathbf{v} \vee\ q'$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

connettivi	priorità
$\neg$	4
$\&$ $\downarrow$ $>$	3
$\vee$ $\mid$	2
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $+$	1

(priorità piú alta significa precedenza, ossia "potere coesivo" maggiore).

Ove queste priorità non bastino a rendere univoca la lettura di un enunciato, conveniamo di far prevalere il connettivo piú a $\boxed{\text{destra}}$

Esempio: $p \rightarrow_1 q'' \,\&_3 \neg_4 \neg_4 p \rightarrow_{1,5} \mathbf{v} \vee_2 q'$

connettivi	priorità
$\neg$	4
$\&$ $\downarrow$ $>$	3
$\vee$ $\mid$	2
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $+$	1

(priorità piú alta significa precedenza, ossia "potere coesivo" maggiore).
Ove queste priorità non bastino a rendere univoca la lettura di un enunciato, conveniamo di far prevalere il connettivo piú a destra

Esempio: $p \rightarrow_1 q'' \,\&_3 \neg_4 \neg_4 p \rightarrow_{1,5} \mathbf{v} \vee_2 q'$

abbrevia $(\, p \rightarrow ((\, q'' \,\&\, (\neg\, (\neg\, p\,))\,) \rightarrow (\, \mathbf{v} \vee q'\,)\,)\,)$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Una variante del linguaggio della logica proposizionale comprende le formule involgenti solo i connettivi di

CONGIUNZIONE: **&** (diadico, spessissimo scritto come $\wedge$)

DISGIUNZIONE: $\vee$ (diadico)

NEGAZIONE: $\neg$ (monadico),

Una variante del linguaggio della logica proposizionale comprende le formule involgenti solo i connettivi di

CONGIUNZIONE: $\&$ (diadico, spessissimo scritto come $\wedge$)

DISGIUNZIONE: $\vee$ (diadico)

NEGAZIONE: $\neg$ (monadico), che però $\boxed{\textit{figura solo nei}\ldots}$

. . . LETTERALI, intendendosi come tali le infinite lettere p , q , r , s , . . . e i loro *complementi*, ossia gli enunciati di forma $\neg L$, con L lettera proposizionale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Una variante del linguaggio della logica proposizionale comprende le formule involgenti solo i connettivi di

CONGIUNZIONE: & (diadico, spessissimo scritto come $\wedge$)

DISGIUNZIONE: $\vee$ (diadico)

NEGAZIONE: $\neg$ (monadico), che però $\boxed{\textit{figura solo nei}\ldots}$

. . . LETTERALI, intendendosi come tali le infinite lettere p , q , r , s , . . . e i loro *complementi*, ossia gli enunciati di forma $\neg L$, con L lettera proposizionale

Si dice che queste formule hanno la ***forma negativa normale*** ("**negative normal form**")

Secondo lo ‘standard’ implicazionale, il linguaggio comprende le formule involgenti solo i connettivi di

IMPLICAZIONE: $\rightarrow$ (diadico)

COSTANTE: $\mathbf{f}$ (talvolta anche l’altra, $\mathbf{v}$)

LETTERE proposizionali (in dotazione infinita)

Secondo lo 'standard' implicazionale, il linguaggio comprende le formule involgenti solo i connettivi di

IMPLICAZIONE: $\longrightarrow$ (diadico)

COSTANTE: $\mathbf{f}$ (talvolta anche l'altra, $\mathbf{v}$)

LETTERE proposizionali (in dotazione infinita)

Nel linguaggio implicazionale $\boxed{\textit{puro}}$, perfino la costante $\mathbf{f}$ è bandita

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Semantica

Un enunciato proposizionale si *interpreta* assegnando uno dei due valori di verità $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$ a ciascuna lettera che compare in esso. Per esempio, l'enunciato

$$(p \rightarrow q) \,\&\, (\neg\, p \leftrightarrow \mathbf{v} \vee r)$$

si interpreta tramite una qualunque funzione

$$\mathfrak{I} : \{\, p\,,\; q\,,\; r\,\} \longrightarrow \{\, \mathbf{f}\,,\; \mathbf{v}\,\}$$

dall'insieme $\{\, p\,,\; q\,,\; r\,\}$ nell'insieme $\{\, \mathbf{f}\,,\; \mathbf{v}\,\}$. Intuitivamente parlando, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{v}$ stanno per falso e vero.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un enunciato proposizionale si *interpreta* assegnando uno dei due valori di verità $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$ a ciascuna lettera che compare in esso. Per esempio, l'enunciato

$$(\, p \rightarrow q \,) \,\&\, (\, \neg\, p \leftrightarrow \mathbf{v} \vee r \,)$$

si interpreta tramite una qualunque funzione

$$\mathfrak{I} : \{\, p \,,\ q \,,\ r \,\} \longrightarrow \ \{\, \mathbf{f} \,,\ \mathbf{v} \,\}$$

dall'insieme $\{\, p \,,\ q \,,\ r \,\}$ nell'insieme $\{\, \mathbf{f} \,,\ \mathbf{v} \,\}$. Intuitivamente parlando, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{v}$ stanno per falso e vero.

Vi sono in tutto 2^n interpretazioni possibili di un enunciato involgente n lettere, e ciascuna interpretazione permette di *valutare* l'enunciato secondo un significato prestabilito dei connettivi.

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$'$	$''$	**f**	**&**	$>$	$'$	$<$	$''$	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg''$	$\leftarrow$	$\neg'$	$\rightarrow$	$\vert$	**v**
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**
f	**v**	**f**	**f**	**f**	**f**	**v**	**v**	**v**	**v**	**f**	**f**	**f**	**f**	**v**	**v**	**v**	**v**
v	**f**	**f**	**f**	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**v**
v	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$'$	$''$	0 $\mathbf{f}$	1 $\&$	2 $>$	3 $'$	4 $<$	5 $''$	6 $+$	7 $\vee$	8 $\downarrow$	9 $\leftrightarrow$	10 $\neg''$	11 $\leftarrow$	12 $\neg'$	13 $\rightarrow$	14 $\mid$	15 $\mathbf{v}$
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$'$	$''$	f	&	$>$	$'$	$<$	$''$	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg''$	$\leftarrow$	$\neg'$	$\rightarrow$	$\mid$	v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

&		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
′	″	f	&	$>$	′	$<$	″	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg$″	$\leftarrow$	$\neg$′	$\rightarrow$	$\mid$	v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

&		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\vee$		
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Università degli Studi di Trieste

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$'$	$''$	f	&	$>$	$'$	$<$	$''$	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg''$	$\leftarrow$	$\neg'$	$\rightarrow$	$\mid$	v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

&		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\vee$		
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\rightarrow$		
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Nel linguaggio implicazionale possiamo introdurre come *abbreviazioni* i costrutti:

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\alpha & =_{\mathsf{Def}} & \alpha \Rightarrow \mathbf{f}\,, \\
\alpha \vee \beta & =_{\mathsf{Def}} & (\neg\alpha) \Rightarrow \beta\,, \\
\alpha \,\&\, \beta & =_{\mathsf{Def}} & \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)\,, \\
\alpha \leftrightarrow \beta & =_{\mathsf{Def}} & (\alpha \Rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \Rightarrow \alpha)\,, \\
\alpha + \beta & =_{\mathsf{Def}} & (\alpha \leftrightarrow \neg\beta)\,.
\end{array}
$$

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\ell}}$$

dove

$$\mathbf{2} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\, \mathbf{f} \,,\, \mathbf{v} \,\}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Potere espressivo del linguaggio proposizionale

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\ell}}$$

dove

$$\mathbf{2} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{ \mathbf{f} \, , \, \mathbf{v} \}$$

Quale sottoinsieme di $\mathbb{B}$ costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati di $\mathbb{P}$?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\ell}}$$

dove

$$\mathbf{2} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\, \mathbf{f} \,,\, \mathbf{v} \,\}$$

Quale sottoinsieme di $\mathbb{B}$ costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati di $\mathbb{P}$?

La risposta è semplice: $\boxed{\textit{tutto quanto } \mathbb{B}}$

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{\, 0\,,\ 1\,\}^{\ell} \longrightarrow \ \{\, 0\,,\ 1\,\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,,\ldots,\ p_\ell\,,\ \neg p_1\,,\ldots,\ \neg p_\ell\,.$$

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{\,0\,,\,1\,\}^{\ell} \longrightarrow \{\,0\,,\,1\,\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,,\ldots,\,p_\ell\,,\,\neg p_1\,,\ldots,\,\neg p_\ell\,.$$

Casi basilari:

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0\,,\,1\}^{\ell} \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,,\ldots,\,p_\ell\,,\,\neg p_1\,,\ldots,\,\neg p_\ell\,.$$

Casi basilari:

- la costante 0 ($= \mathbf{f}$) può essere vista come disgiunzione vuota

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{\, 0\,,\, 1\,\}^{\ell} \longrightarrow \{\, 0\,,\, 1\,\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,, \ldots, \, p_\ell\,,\, \neg p_1\,, \ldots, \, \neg p_\ell\,.$$

Casi basilari:

- la costante 0 ($= \mathbf{f}$) può essere vista come <u>disg</u>iunzione vuota
- la costante 1 ($= \mathbf{v}$) come <u>con</u>giunzione vuota

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0, 1\}^{\ell} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1, \ldots, p_\ell, \neg p_1, \ldots, \neg p_\ell\,.$$

Casi basilari:

- la costante 0 ($= \mathbf{f}$) può essere vista come <u>disg</u>iunzione vuota
- la costante 1 ($= \mathbf{v}$) come <u>cong</u>iunzione vuota
- un letterale (o semplice lettera) proposizionale, preso a sé, vale sia come congiunzione che come disgiunzione

A titolo di esempio, esprimiamo in forma disgiuntiva normale una celebre funzione booleana Φ, la **Implicazione 'materiale'**

	$\rightarrow$	
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prendendo le rige a risultato 1, leggiamo direttamente:

$$\neg p_1 \,\&\, \neg p_2 \vee \neg p_1 \,\&\, p_2 \vee p_1 \,\&\, p_2$$

Fra le altre, ecco una codifica ben piú sbrigativa:

$$\neg p_1 \vee p_2$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$\neg(\alpha_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \alpha_n) = (\neg\alpha_1 \vee \cdots \vee \neg\alpha_n)$$
$$\neg(\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m) = (\neg\beta_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \neg\beta_m)$$

Augustus De Morgan
1806–1871

A titolo di esempio, esprimiamo in forma congiuntiva normale una celebre funzione booleana Φ, la **Implicazione 'a tre vie'**

seAlloraAltrim			
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Prendendo le rige a risultato 0, leggiamo direttamente:

$$(\,p_1 \vee p_2 \vee p_3\,)\ \&\ (\,p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3\,)\ \&$$
$$(\,\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3\,)\ \&\ (\,\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3\,)$$

Fra le altre, ecco una codifica ben piú sbrigativa:

$$(\,\neg p_1 \vee p_2\,)\ \&\ (\,p_1 \vee p_3\,)$$

Non è solo attraverso la triade $\neg$, $\&$, $\vee$ che possiamo esprimere qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0\,,\,1\}^{\ell} \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$

Varie possibilità:

	$\neg \quad \& \quad \vee$	E
	$\neg \quad \&$	S
	$\neg \quad \vee$	E
	$\neg \quad \rightarrow$	R
	$\downarrow$	C
	$\mid$	I
f **v**	seAlloraAltrim	Z
v	$\& \quad +$	I
f	$\rightarrow$	!

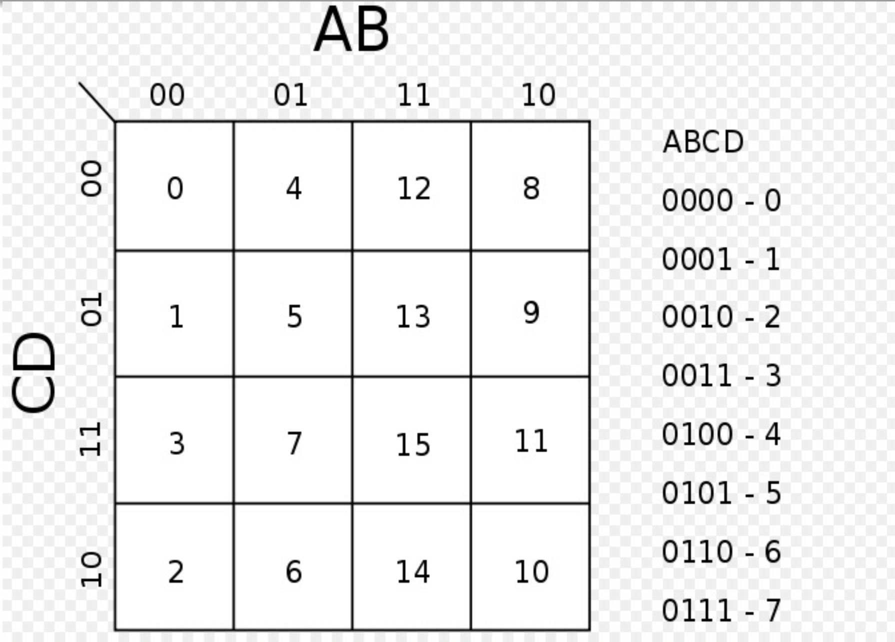
Esercizi!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Chi predilige, rispetto alla popolare triade $\neg_{/\mathbf{1}}$, $\&_{/\mathbf{2}}$, $\vee_{/\mathbf{2}}$, l'*implicazione*, se dispone della costante $\mathbf{f}$, può procedere cosí:

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\alpha & \rightsquigarrow & \alpha \rightarrow \mathbf{f} \\[2em]
\mathbf{v} & \rightsquigarrow & \neg\,\mathbf{f} \\[2em]
\alpha \vee \gamma & \rightsquigarrow & \neg\alpha \rightarrow \gamma \\
 & \rightsquigarrow & (\,\alpha \rightarrow \mathbf{f}\,) \rightarrow \gamma \\[2em]
\alpha \,\&\, \beta & \rightsquigarrow & \neg(\,\neg\alpha \vee \neg\beta\,) \\
 & \rightsquigarrow & \neg(\,\alpha \rightarrow \neg\beta\,) \\
 & \rightsquigarrow & (\,\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \mathbf{f}\,) \rightarrow \mathbf{f}
\end{array}
$$

Mappe di Karnaugh (1953)



Il criterio adottato nella numerazione (in $\boxed{\text{base } 2}$) di righe e colonne è che quando ci si sposta a una casella $\boxed{\text{adiacente}}$,[1]

in orizzontale o in verticale ,

$\boxed{\text{solo un bit}}$ deve cambiare ($0 \rightsquigarrow 1$ o viceversa)

[1] **N.B.: Si tratta di "mappamondi" !** (per un "mondo toroidale")
Prima e ultima riga vanno considerate adiacenti
e cosí pure la prima colonna e l'ultima.

Per rappresentare graficamente una funzione booleana Φ si usa talvolta, invece della sua tavola di verità, la cosiddetta **mappa di Karnaugh** di Φ. Tale mappa viene prodotta scegliendo dapprima, in base al numero ℓ di operandi di Φ, uno dei seguenti schemi di riferimento:

0

p	0	1
	0	1

$p \setminus q$	0	1
0	0	1
1	2	3

$p \setminus q\ r$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$s\ p \setminus q\ r$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Per rappresentare graficamente una funzione booleana Φ si usa talvolta, invece della sua tavola di verità, la cosiddetta **mappa di Karnaugh** di Φ. Tale mappa viene prodotta scegliendo dapprima, in base al numero ℓ di operandi di Φ, uno dei seguenti schemi di riferimento:

$\boxed{0}$

p	0	1
	0	1

$p \setminus q$	0	1
0	0	1
1	2	3

$p \setminus q\ r$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Questi fungono per cosí dire da "assi Cartesiani in uno spazio a ℓ dimensioni" ($\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Per rappresentare graficamente una funzione booleana Φ si usa talvolta, invece della sua tavola di verità, la cosiddetta **mappa di Karnaugh** di Φ. Tale mappa viene prodotta scegliendo dapprima, in base al numero ℓ di operandi di Φ, uno dei seguenti schemi di riferimento:

0

p	0	1
	0	1

$p \setminus q$	0	1
0	0	1
1	2	3

$p \setminus q\ r$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Occorre quindi marcare le caselle che corrispondono alle ℓ-uple di operandi mandate in $\mathbf{v}$ da Φ.

ESERCIZIO

Disegnare la mappa Karnaugh per $\ell = 5$

SOLUZIONE

ESERCIZIO

Disegnare la mappa Karnaugh per $\ell = 5$

SOLUZIONE

$s\ p \setminus q\ r\ p'$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

Occorre quindi marcare le caselle che corrispondono alle ℓ-uple di operandi mandate in $\mathbf{v}$ da Φ.

$\Phi_{\downarrow}$

$\checkmark$	

$\Phi_{|}$

$\checkmark$	$\checkmark$
$\checkmark$	

$\Phi_{>}$

$\checkmark$	

Φ_{+}

	$\checkmark$
$\checkmark$	

$\Phi_{\dots}$

	$\checkmark$	$\checkmark$	
		$\checkmark$	$\checkmark$

Esercizio

Rappresentare tramite mappa **K** una $\Phi(\,p\,,\,q\,,\,r\,,\,s\,)$ tale che

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{v}) = \\
&\Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{f}) = \\
&\Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v}) = \mathbf{v}
\end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \\
&\Phi(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}) = \mathbf{f}\ ,
\end{aligned}$$

utilizzando:

$\checkmark$ per indicare il risultato $\mathbf{v}$,

? per risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato $\mathbf{f}$

ESERCIZIO

Rappresentare tramite mappa **K** una $\Phi(\,p\,,\ q\,,\ r\,,\ s\,)$ tale che

$$\Phi(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{v}) =$$
$$\Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{f}) =$$
$$\Phi(\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

e che

$$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{v},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{f},\mathbf{f}) =$$
$$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}) = \mathbf{f}\ ,$$

utilizzando:

$\checkmark$ per indicare il risultato $\mathbf{v}$,

? per risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato $\mathbf{f}$

Poi, sfruttando la mappa, esprimere una tale Φ utilizzando *al minimo* i connettivi $\neg$, $\&$, $\vee$.

Soluzione del precedente esercizio

$p\,q \setminus r\,s$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Soluzione del precedente esercizio

$p\,q \setminus r\,s$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

Da questa mappa risalta un enunciato che descrive la Φ:

$$\neg p \vee (s \,\&\, \neg r) \vee (q \,\&\, \neg q)$$