Introduzione alla logica proposizionale

(2^{a} parte: Analisi)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

De Morgan:	$\gamma > (\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow (\gamma > \alpha) \vee (\gamma > \beta)$	
	$\gamma > (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\gamma > \alpha) \,\&\, (\gamma > \beta)$	
contrapposizione:	$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	
imp/esp-ortazione:	$(\alpha \,\&\, \beta \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$	
distribuzione:	$\alpha \vee (\beta \,\&\, \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \,\&\, (\alpha \vee \gamma)$	
	$\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \,\&\, \beta) \vee (\alpha \,\&\, \gamma)$	
associatività:	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	
	$\alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma) \leftrightarrow (\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma$	
commutatività:	$\alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vee \alpha$	$\alpha \,\&\, \beta \leftrightarrow \beta \,\&\, \alpha$
assorbimento:	$\alpha \vee \alpha \leftrightarrow \alpha$	$\alpha \,\&\, \alpha \leftrightarrow \alpha$

Trieste, 08/03/2016

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

I lucidi su Dnf e Cnf suggerivano metodi di '*sintesi*' per ottenere da una funzione booleana enunciati in grado di esprimerla

I lucidi su Dnf e Cnf suggerivano metodi di '*sintesi*' per ottenere da una funzione booleana enunciati in grado di esprimerla

Qui affrontiamo la questione inversa: come effettuare l''*analisi*' di un enunciato dato

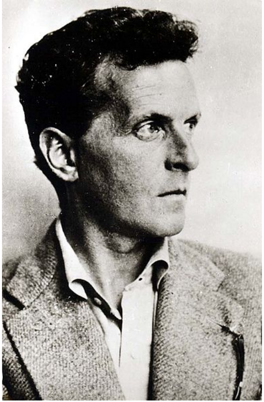
I lucidi su Dnf e Cnf suggerivano metodi di '*sintesi*' per ottenere da una funzione booleana enunciati in grado di esprimerla

Qui affrontiamo la questione inversa: come effettuare l''*analisi*' di un enunciato dato

N.B.: Non stiamo parlando più di analisi sintattica! :-)

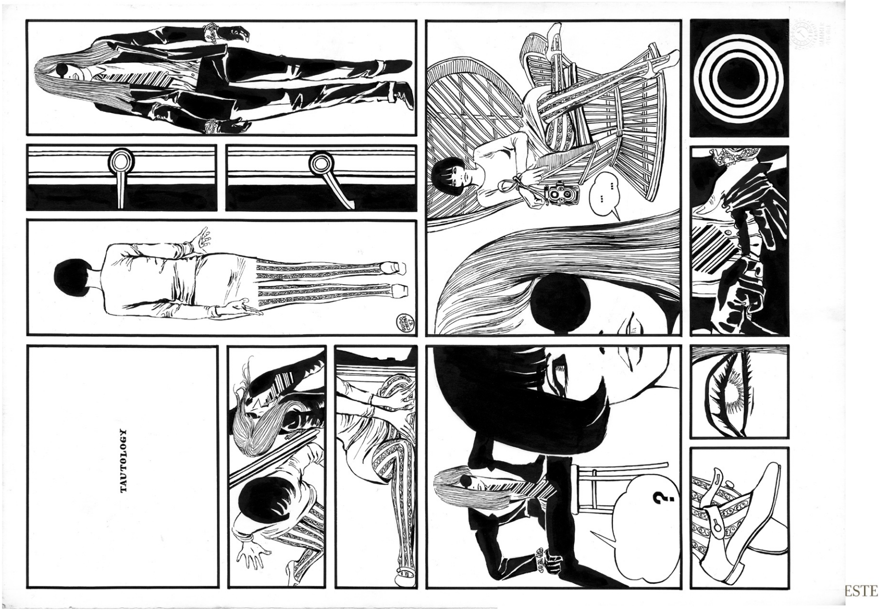
"La dimostrazione nella logica è solo un mezzo meccanico per riconoscere piú facilmente la tautologia ove questa è complicata."

[Wittgenstein(1922), 6.1262]



Ludwig Wittgenstein

Vienna 1889–Cambridge 1951


TAUTOLOGY
ESTE

- mutua riducibilità dei problemi di tautologicità e soddisfacimento

- mutua riducibilità dei problemi di tautologicità e soddisfacimento
- tre esercizi sul soddisfacimento di disgiunzioni

Scaletta

- mutua riducibilità dei problemi di tautologicità e soddisfacimento
- tre esercizi sul soddisfacimento di disgiunzioni
- test (manuale) di tautologicità di un'implicazione

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- mutua riducibilità dei problemi di tautologicità e soddisfacimento
- tre esercizi sul soddisfacimento di disgiunzioni
- test (manuale) di tautologicità di un'implicazione
- regole d'inferenza :
  - ⋆ istanziazione di schemi tautologici
  - ⋆ *modus [ponendo] ponens*

Scaletta

- mutua riducibilità dei problemi di tautologicità e soddisfacimento
- tre esercizi sul soddisfacimento di disgiunzioni
- test (manuale) di tautologicità di un'implicazione
- regole d'inferenza : $\left\{ \begin{array}{l} \star \text{ istanziazione di schemi tautologici} \\ \star \text{ } \textit{modus [ponendo] ponens} \end{array} \right.$
- sistema deduttivo alla Hilbert

Un enunciato (proposizionale) α può essere

Un enunciato (proposizionale) α può essere

`VERO:` *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

Un enunciato (proposizionale) α può essere

VERO: *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

ASSURDO: se non è *mai* vero

Un enunciato (proposizionale) α può essere

VERO: *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

ASSURDO: se non è *mai* vero

SODDISFACIBILE: se è vero in almeno un caso

Un enunciato (proposizionale) α può essere

VERO: *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

ASSURDO: se non è *mai* vero

SODDISFACIBILE: se è vero in almeno un caso

TAUTOLOGICO: se è vero *sempre*

Un enunciato (proposizionale) α può essere

VERO: *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

ASSURDO: se non è *mai* vero

SODDISFACIBILE: se è vero in almeno un caso

TAUTOLOGICO: se è vero *sempre*

Per stabilire se α è tautologico, possiamo:

Un enunciato (proposizionale) α può essere

VERO: *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

ASSURDO: se non è *mai* vero

SODDISFACIBILE: se è vero in almeno un caso

TAUTOLOGICO: se è vero *sempre*

Per stabilire se α è tautologico, possiamo:

- passare a $\neg\alpha$

Un enunciato (proposizionale) α può essere

VERO: *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

ASSURDO: se non è *mai* vero

SODDISFACIBILE: se è vero in almeno un caso

TAUTOLOGICO: se è vero *sempre*

Per stabilire se α è tautologico, possiamo:

- passare a $\neg\alpha$
- stabilire se $\neg\alpha$ è assurdo

Un enunciato (proposizionale) α può essere

VERO: *una volta assegnati* i valori di verità alle sue lettere

ASSURDO: se non è *mai* vero

SODDISFACIBILE: se è vero in almeno un caso

TAUTOLOGICO: se è vero *sempre*

Per stabilire se α è tautologico, possiamo:

- passare a $\neg\alpha$
- stabilire se $\neg\alpha$ è assurdo
- ma se invece troviamo che $\neg\alpha$ è soddisfacibile, allora abbiamo un *controesempio* ad α

1. Indicare una condizione necessaria e sufficiente perché una disgiunzione di letterali sia tautologica

1. Indicare una condizione necessaria e sufficiente perché una disgiunzione di letterali sia tautologica

2. Mostrare che una DNF è assurda se e solo se ogni suo 'disgiunto' ha, fra i propri 'congiunti', due letterali complementari, cioè una lettera ℓ assieme alla sua negaz. $\neg\ell$

1. Indicare una condizione necessaria e sufficiente perché una disgiunzione di letterali sia tautologica
2. Mostrare che una DNF è assurda se e solo se ogni suo ‘disgiunto’ ha, fra i propri ‘congiunti’, due letterali complementari, cioè una lettera ℓ assieme alla sua negaz. $\neg\ell$
3. Dire allora se è pratico il seguente metodo per stabilire se un enunciato α è tautologico o no:
   - sintetizzare una DNF β equivalente a $\neg\alpha$
   - servirsi del criterio di cui al punto 2. per stabilire se β è assurdo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\, p \longrightarrow q \longrightarrow r \,) \longrightarrow (\, p \longrightarrow q \,) \longrightarrow p \longrightarrow r$$

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$$

$\ast$ TAVOLE DI VERITÀ: 8 righe da sviluppare (provateci!)

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
(& p & \rightarrow & (& q & \rightarrow & r &) &) & \rightarrow & (& (& p & \rightarrow & q &) & \rightarrow & (& p & \rightarrow & r &) &) \\
 & & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
(& p & \to & (& q & \to & r &) &) & \to & (& (& p & \to & q &) & \to & (& p & \to & r &) &) \\
 & & 1 & & & & & & & 0 & & & & & & & 0 & & & & & & \\
 & & 2 & & & & & & & 1 & & & & & & & 2 & & & & & &
\end{array}
$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
(& p & \to & (& q & \to & r &) &) & \to & (& (& p & \to & q &) & \to & (& p & \to & r &) &) \\
 & & 1 & & & & & & & 0 & & & & 1 & & & 0 & & & 0 & & & \\
 & & 2 & & & & & & & 1 & & & & 3 & & & 2 & & & 3 & & &
\end{array}$$

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p{\longrightarrow}q{\longrightarrow}r\,){\longrightarrow}(\,p{\longrightarrow}q\,){\longrightarrow}p{\longrightarrow}r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& p & \rightarrow & (& q & \rightarrow & r &) &) & \rightarrow & (& (& p & \rightarrow & q &) & \rightarrow & (& p & \rightarrow & r &) &) \\
 & & 1 & & & & & & & 0 & & & & 1 & & & 0 & & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & 2 & & & & & & & 1 & & & & 3 & & & 2 & & 4 & 3 & 4 & &
\end{array}$$

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p\to q\to r\,)\to(\,p\to q\,)\to p\to r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

(	p	$\to$	(	q	$\to$	r	)	)	$\to$	(	(	p	$\to$	q	)	$\to$	(	p	$\to$	r	)	)
		1							0			1		1		0		1	0	0		
		2							1			3		5		2		4	3	4		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p\rightarrow q\rightarrow r\,)\rightarrow(\,p\rightarrow q\,)\rightarrow p\rightarrow r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
(& p & \rightarrow & (& q & \rightarrow & r &) &) & \rightarrow & (& (& p & \rightarrow & q &) & \rightarrow & (& p & \rightarrow & r &) &) \\
 & & 1 & & & 0 & & & & 0 & & & & 1 & 1 & & 0 & & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & 2 & & & 6 & & & & 1 & & & & 3 & 5 & & 2 & & 4 & 3 & 4 & &
\end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\, p \rightarrow q \rightarrow r \,) \rightarrow (\, p \rightarrow q \,) \rightarrow p \rightarrow r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

(	p	$\rightarrow$	(	q	$\rightarrow$	r	)	)	$\rightarrow$	(	(	p	$\rightarrow$	q	)	$\rightarrow$	(	p	$\rightarrow$	r	)	)
	0	1			0				0				1	1		0		1	0	0		
	7	2			6				1				3	5		2		4	3	4		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio. Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p \rightarrow q \rightarrow r\,) \rightarrow (\,p \rightarrow q\,) \rightarrow p \rightarrow r$$

$\ast$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
(& p & \rightarrow & (& q & \rightarrow & r &) &) & \rightarrow & (& (& p & \rightarrow & q &) & \rightarrow & (& p & \rightarrow & r &) &) \\
 & \underline{\underline{0}} & 1 & & & 0 & & & & 0 & & & & 1 & 1 & & 0 & & \underline{\underline{1}} & 0 & 0 & & \\
 & 7 & 2 & & & 6 & & & & 1 & & & & 3 & 5 & & 2 & & 4 & 3 & 4 & &
\end{array}$$

Esercizio. Stabilire che i seguenti due enunciati sono tautologie:

$$p \longrightarrow q \longrightarrow p$$
$$(\, p \longrightarrow q \longrightarrow r \,) \longrightarrow \big((\, p \longrightarrow s \,) \longrightarrow q' \big) \longrightarrow (\, p \longrightarrow q \longrightarrow r \,)$$

Esercizio. Stabilire che i seguenti due enunciati sono tautologie:

$$p \longrightarrow q \longrightarrow p$$
$$(\, p \longrightarrow q \longrightarrow r \,) \longrightarrow ((\, p \longrightarrow s \,) \longrightarrow q' \,) \longrightarrow (\, p \longrightarrow q \longrightarrow r \,)$$

$*$ OSSERVAZIONE: il 2^o enunciato è '*istanza*' del primo che possiamo dimostrare tautologico per *reductio ad absurdum:*

$$\begin{array}{ccccccc} p & \longrightarrow & (& q & \longrightarrow & p &) \\ \underline{\underline{1}} & 0 & & 1 & 0 & \underline{\underline{0}} & \\ 2 & 1 & & 3 & 2 & 3 & \end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio. Stabilire che i seguenti due enunciati sono tautologie:

$$p \to q \to p$$
$$(p \to q \to r) \to ((p \to s) \to q') \to (p \to q \to r)$$

∗ OSSERVAZIONE: il 2^o enunciato è '*istanza*' del primo che possiamo dimostrare tautologico per *reductio ad absurdum:*

$$\begin{array}{ccccccc} p & \to & (& q & \to & p &) \\ \underline{\underline{1}} & 0 & & 1 & 0 & \underline{\underline{0}} & \\ 2 & 1 & & 3 & 2 & 3 & \end{array}$$

∗ PERTANTO: anche il 2^o è una tautologia

Forse *qualunque* tautologia è *derivabile* (i.e., ottenibile) a partire da

- pochi schemi *tauto*logici, tramite
- istanziazione di tali schemi e
- impieghi della regola MP (*modus ponens*):

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \\ \alpha \rightarrow \gamma\end{array}}{\gamma} \quad \text{o anche} \quad \frac{\begin{array}{c}\alpha \rightarrow \gamma \\ \alpha\end{array}}{\gamma}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Questi gli *assiomi logici* proposti da Willard Van Orman Quine nel 1938:

$$(\beta \to \alpha) \to (\alpha \to \gamma) \to \beta \to \gamma$$

$$\alpha \to \bullet \to \alpha$$

$$\big((\alpha \to \bullet) \to \alpha\big) \to \alpha$$

$$\mathbf{f} \to \bullet$$

Stabilire che il calcolo che ha questi assiomi è *corretto* (‘*sound*’) richiede la verifica che sono davvero tautologie

i.	$\big(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\big) \rightarrow \big((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\big)$
ii.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
iii.	$\big((\alpha \rightarrow f) \rightarrow (\beta \rightarrow f)\big) \rightarrow \big(\beta \rightarrow \alpha\big)$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Diremo che la sequenza

$$\delta \quad = \quad \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

è una $\boxed{\textit{dimostrazione} \text{ di } \vartheta \text{ da } A}$ quando:

1) $\delta_h = \vartheta$;

2) per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un enunciato di $\mathbb{P}$ che o:

   ⋆ appartiene ad A, oppure

   ⋆ ricade in uno dei tre schemi del lucido precedente, oppure

   ⋆ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dimostriamo in 9 passi l'enunciato $f \longrightarrow p$ da $\emptyset$, come segue:

		Ax.			Prem.
1.	$f \longrightarrow (f \longrightarrow f)$	[ii]			
2.	$(f \longrightarrow (f \longrightarrow f)) \longrightarrow ((f \longrightarrow f) \longrightarrow (f \longrightarrow f))$	[i]	3.	$(f \longrightarrow f) \longrightarrow (f \longrightarrow f)$	[1, 2]
4.	$((f \longrightarrow f) \longrightarrow (f \longrightarrow f)) \longrightarrow (f \longrightarrow f)$	[iii]	5.	$f \longrightarrow f$	[3, 4]
6.	$(f \longrightarrow f) \longrightarrow ((p \longrightarrow f) \longrightarrow (f \longrightarrow f))$	[ii]	7.	$(p \longrightarrow f) \longrightarrow (f \longrightarrow f)$	[5, 6]
8.	$((p \longrightarrow f) \longrightarrow (f \longrightarrow f)) \longrightarrow (f \longrightarrow p)$	[iii]	9.	$f \longrightarrow p$	[7, 8]

Questo lo schema d’assioma proposto da Jan Łukasiewicz nel 1936 (e ‘sdoganato’ da Larry Wos nel 1999)

$$\Big(\big(\beta \to \bullet\big) \to \big(((\alpha \to \mathbf{f}) \to \gamma \to \mathbf{f}) \to \bullet\big) \to \alpha\Big) \to \bullet \to (\alpha \to \beta) \to \gamma \to \beta$$

Basta da solo!! (Un altro ‘solitario’ leggermente piú semplice fu scoperto da Carey Arthur Meredith nel 1952)

Il primo risultato di *completezza* (i.e., “ogni tautologia è derivabile dagli assiomi logici”) dovuto ad Emil Leon Post, è del 1920

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ludwig J. J. Wittgenstein.
Tractatus Logico-Philosophicus. 1922.
http://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf.