meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 1
elementi base

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Elementi fondamentali

Massa : dove si immagazzina l'energia potenziale o l'inerzia

Smorzatore : dove si dissipa l'energia
(normalmente trasformata da meccanica a termica)

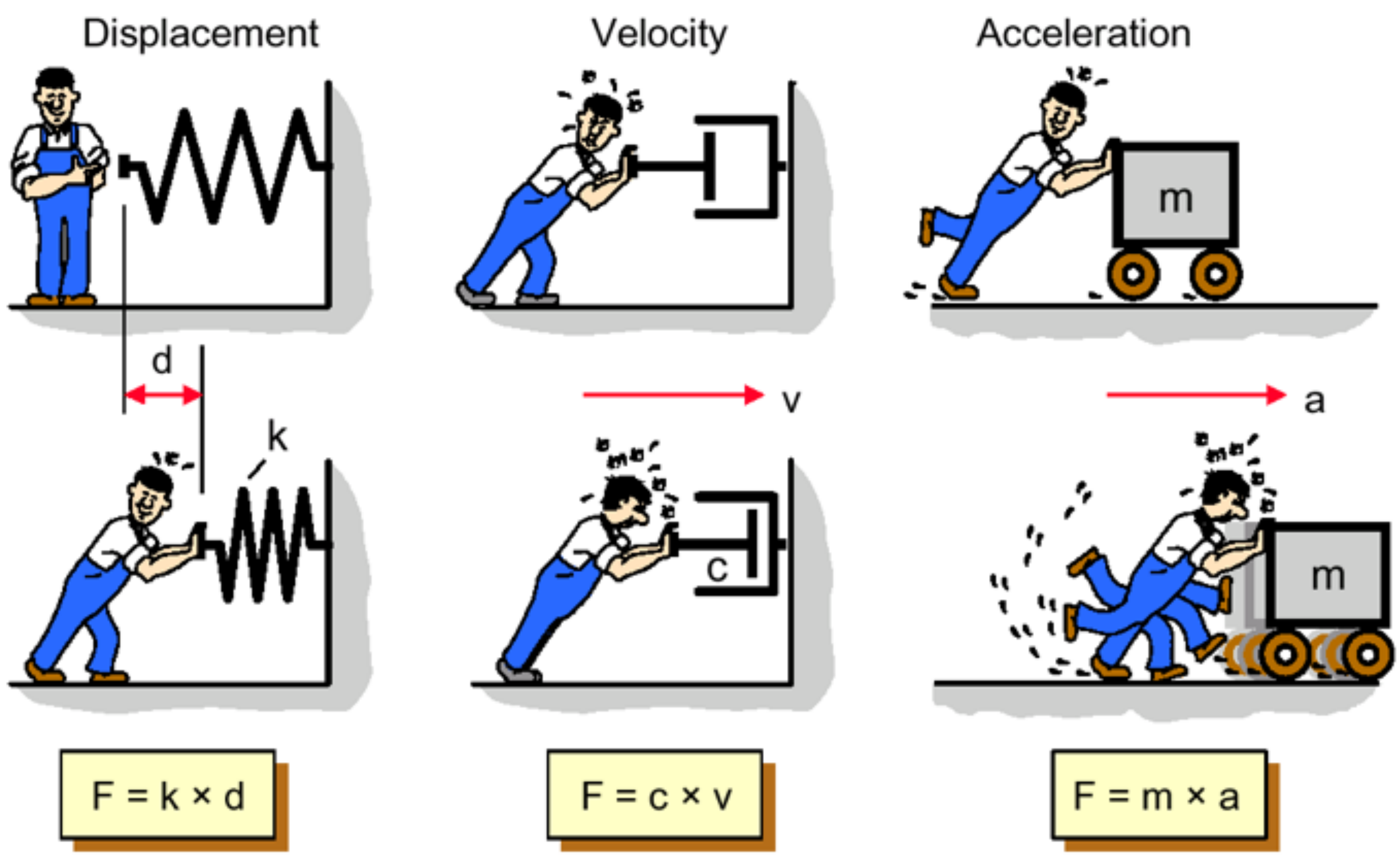
Rigidezza : dove si immagazzina l'energia elastica

Forzanti : ciò che causa le vibrazioni
(interne: condizioni iniziali/contorno, esterne, forze e momenti)

..IDEALI! una proprietà alla volta e solo quella!

$m=0$
$c=0$
$k=150kN/m$

Elementi fondamentali e grandezze



Massa - Inerzia [kg], [kgm²]

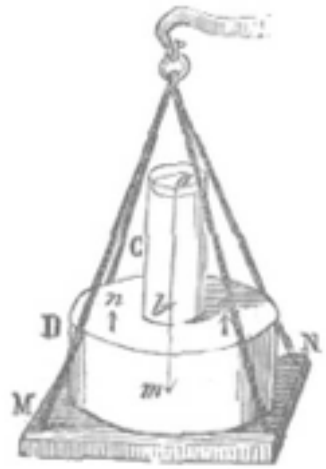


Fig. 49.

Ricordarsi tutti
i GDL (DOF)!

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \text{1 DOF}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \qquad \text{3 DOF}$$

..abituatevi a considerare analizzare risolvere
sistemi con TRASLAZIONI e ROTAZIONI!

Smorzatore - meccanismi dissipativi [Ns/m], [Ns/rad]

Diversi modelli matematici che rappresentano vari meccanismi dissipativi.. derivano equazioni del moto più o meno complesse!

Viscoso $f_d = c\dot{x}$

es. ammortizzatori veicolo (olio/gas)

opposizione fase con vel

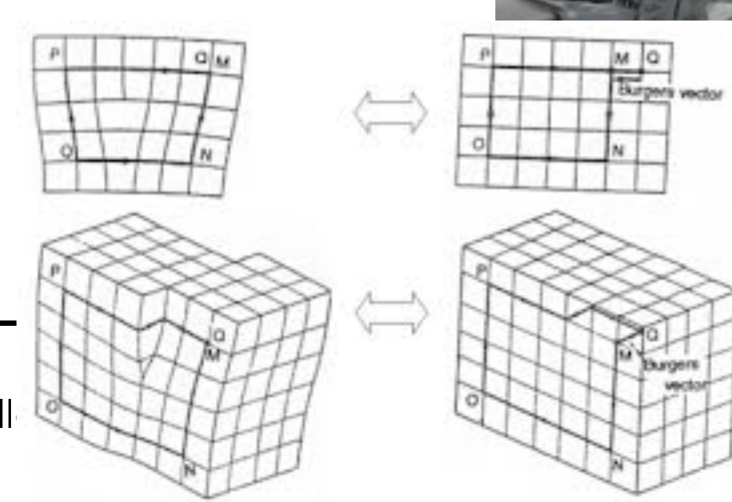
Coulumbiano $f_d = -\mu mg\,sign(\dot{x})$

es. smorzatori attrito edilizia / lavatrici

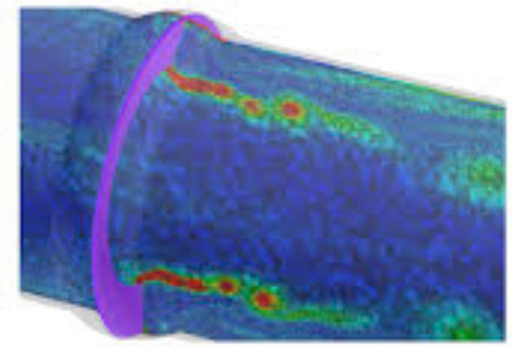
fase con vel/prop spost

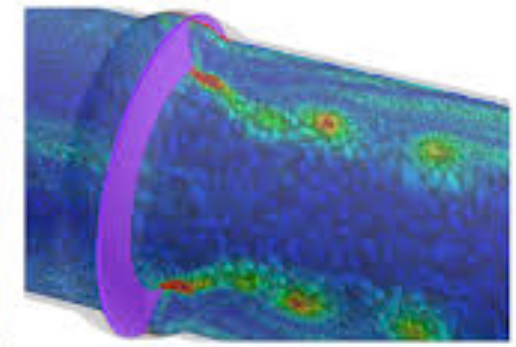
Strutturale/isteretico $f_d = jhx$

es. cricche, dislocazioni, giochi



Smorzamento





Fluidodinamico

$$f_d = d\dot{x}^2$$

es. moto nei fluidi

Frazionale

$$f_d = jA\frac{\partial^r x}{\partial t^r}$$

es. gomme / elastomeri
feltri

Magnetrorealogico / combinati

es. ammortizzatori

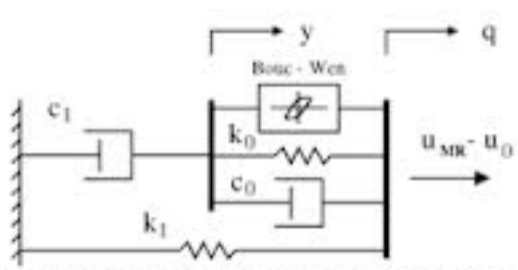
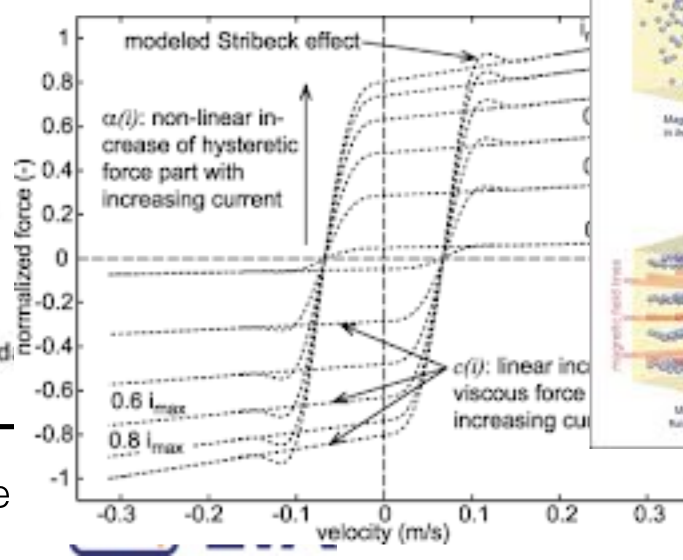
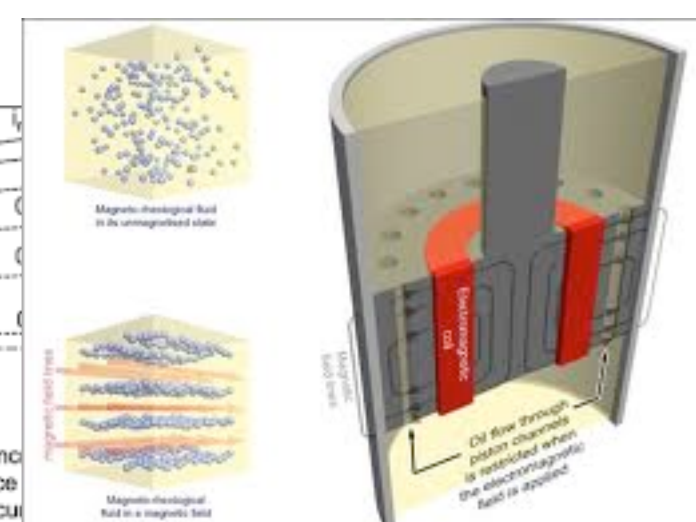


Figure 4. The modified Bouc-Wen model of the MR d





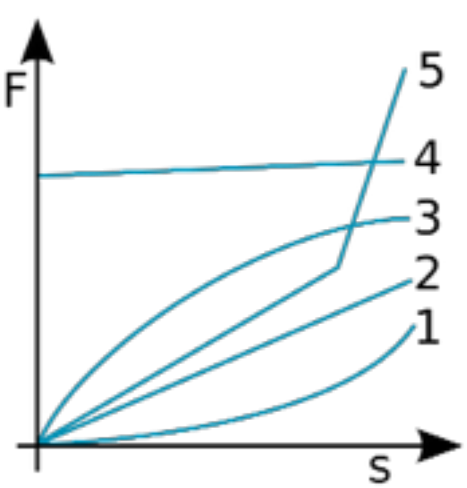
Luigi BREGANT
bregant@units.it

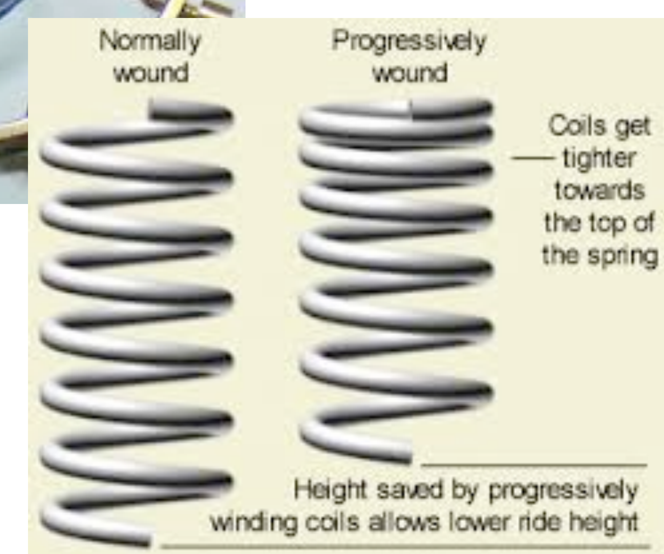
Rigidezza - meccanismi elastici [N/m], [N/rad]

Lineari $f_s = kx \qquad f_s = k\theta$

(caratteristica)

Non Lineari, Bilineari, Progressive (Hardening, Softening),…





Rigidezza

Equivalenza sistemi di molle!

Molle in serie
$$\frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_r}$$

..da sapere come si arriva qui!

Molle in parallelo
$$k_e=k_1+k_2+\ldots+k_r$$

..abituatevi a considerare analizzare risolvere sistemi con TRASLAZIONI e ROTAZIONI!

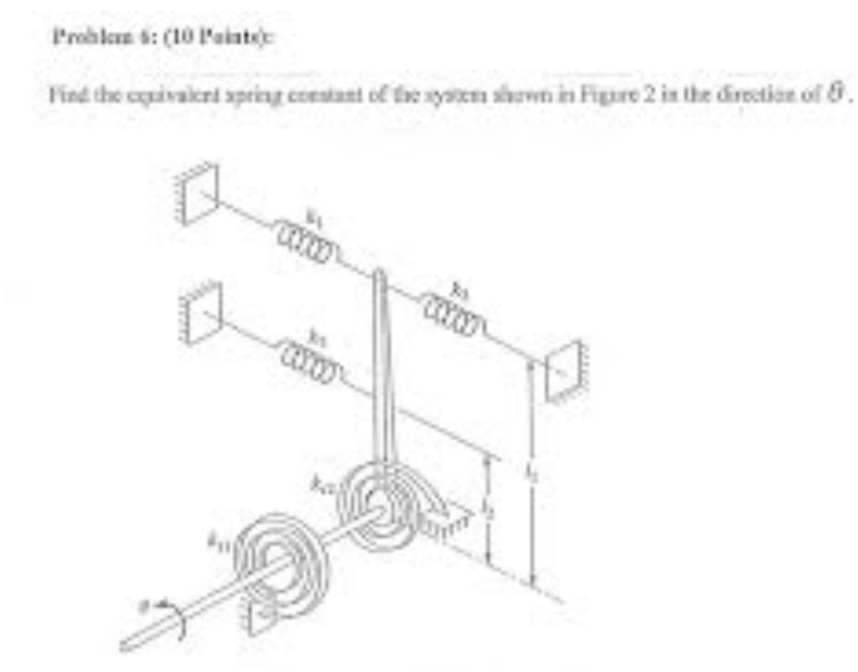


Figure 2 System involving two torsional springs and three linear springs

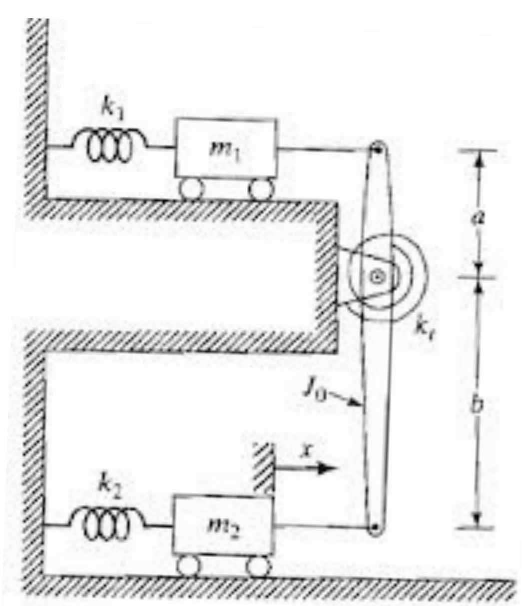
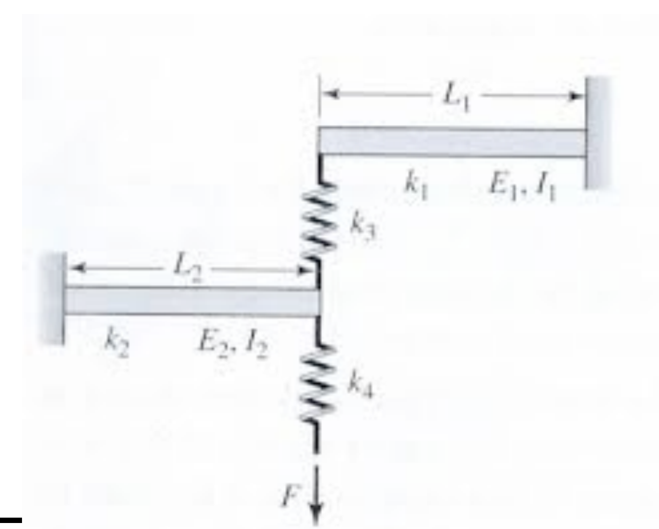
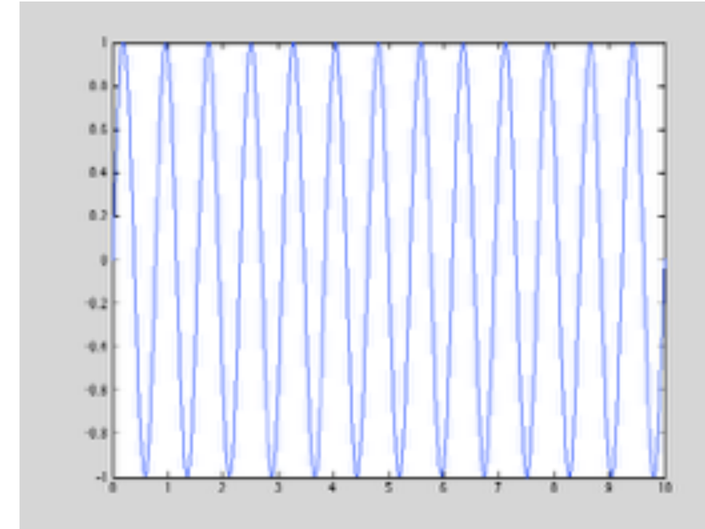


FIGURE 1.76 Rocker arm assembly.



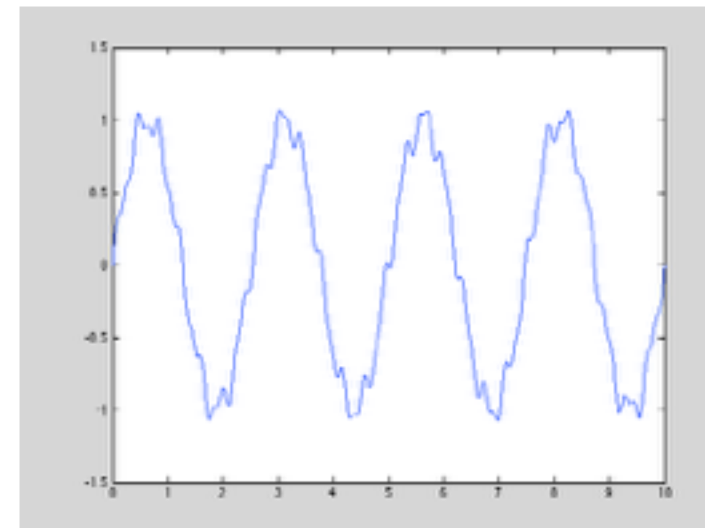
Forzanti

a=sin(2*pi*1.3*t);



Armoniche semplici

es. squilibrio residuo



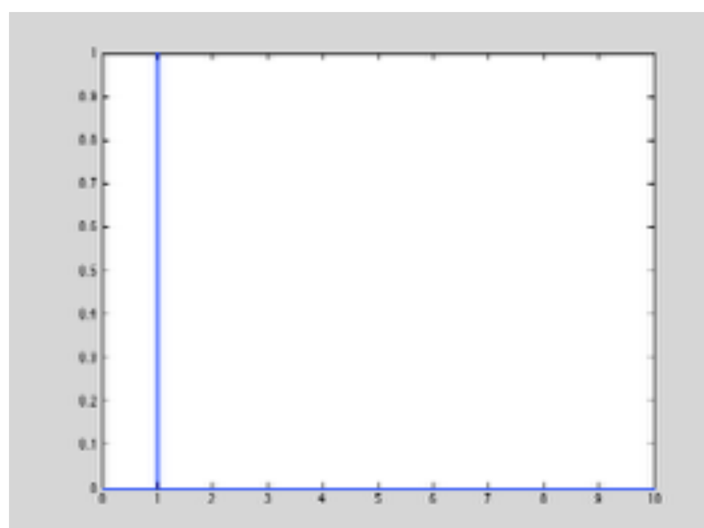
Armoniche complesse

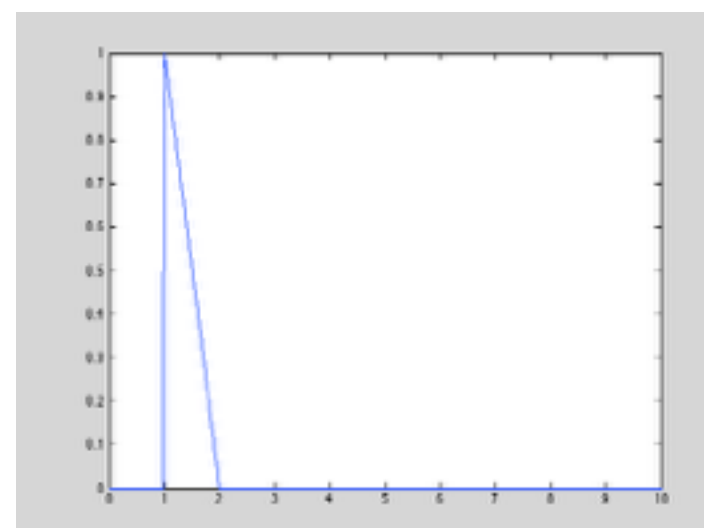
es. combustione

a=sin(2*pi*0.4*t)+0.09*sin(2*pi*2.7*t)+0.05*sin(2*pi*5.1*t);

Impulsive

es. impatto, esplosione





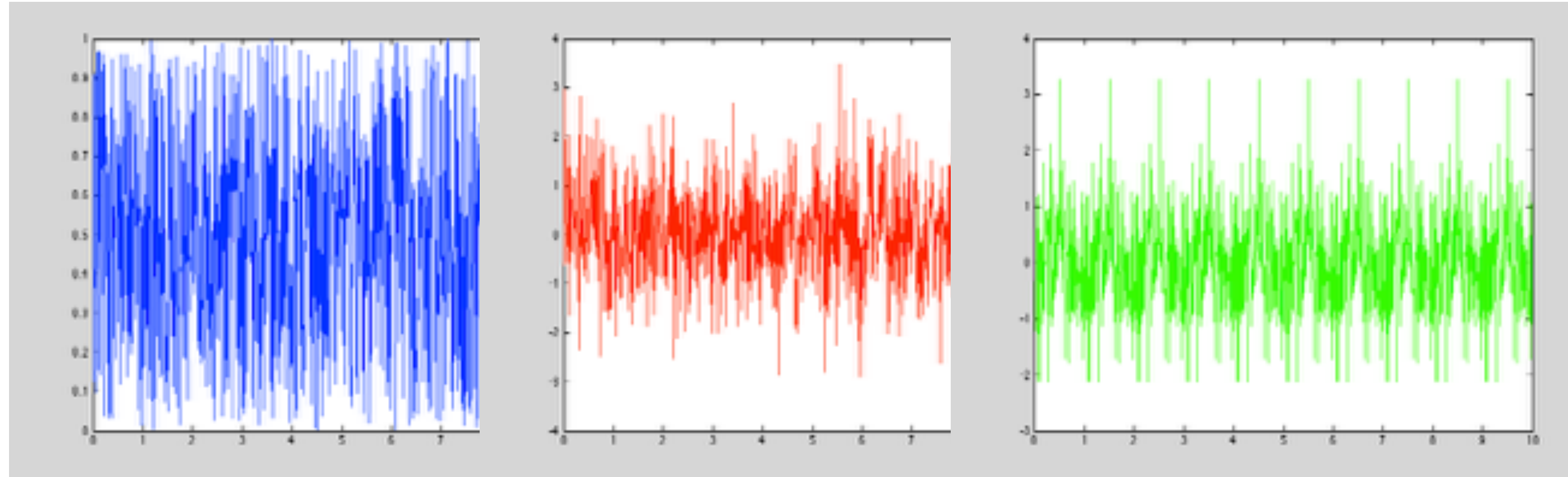
a=[zeros(1,100) ones(1,3) zeros(1,898)];

a=[zeros(1,100) 1-t(1:100) zeros(1,801)];

Forzanti

Random

es. rugosità asfalto



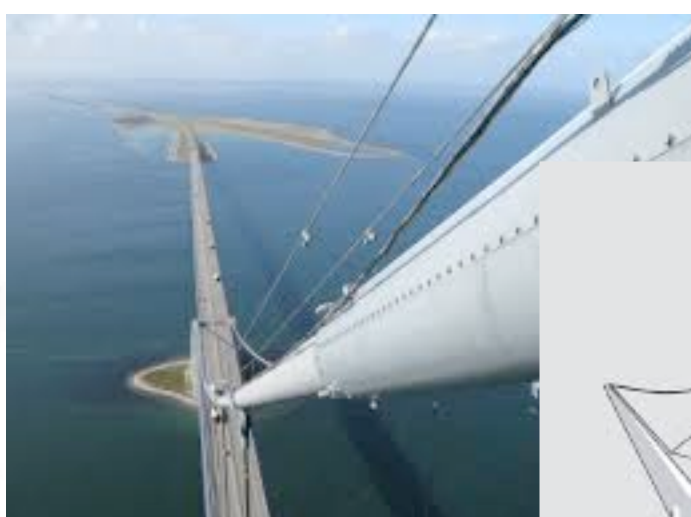
a=rand(1,size(t,2));

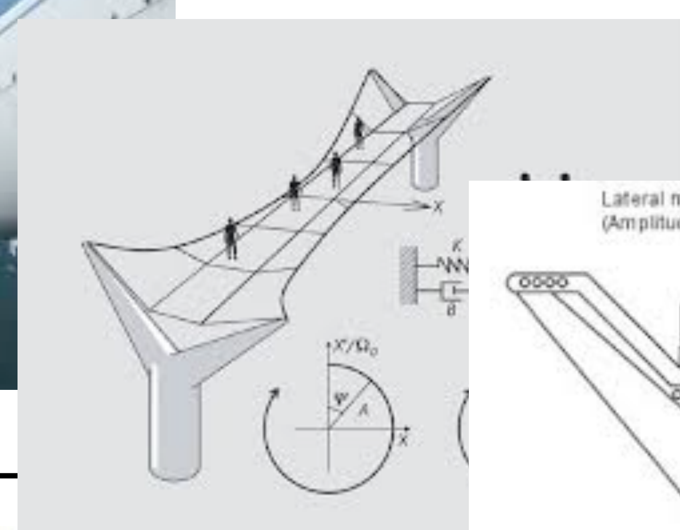
a=randn(1,size(t,2));

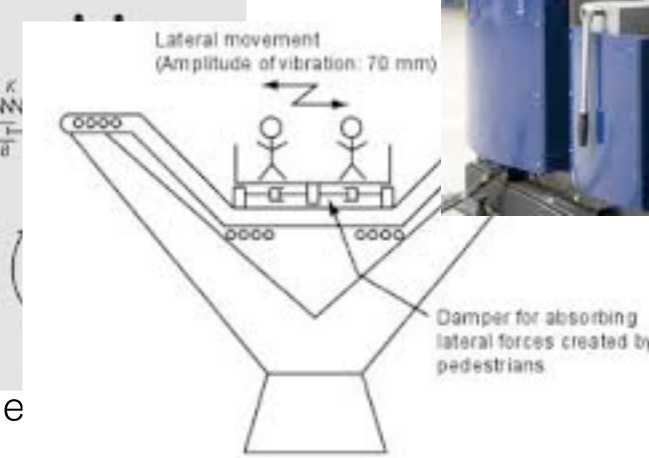
a=randn(1,100);
a=[a a a a a a a a a a];

Operazionali

es. vento, funzionamento impianto, traffico veicolare, pedoni,…





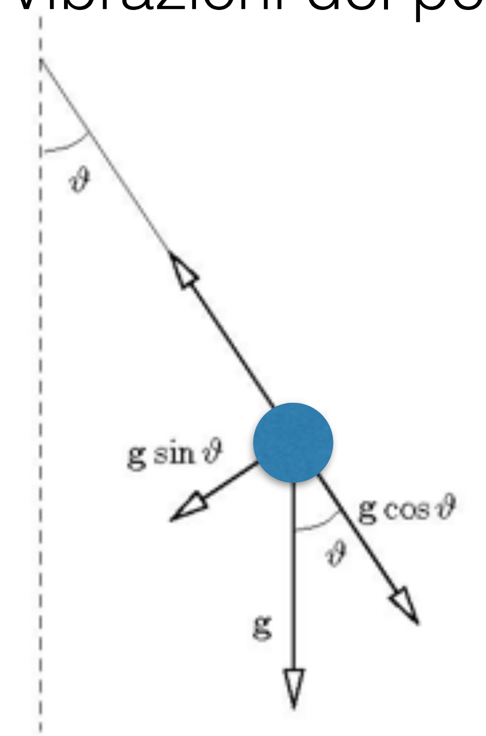


Luigi BREGANT
bregant@units.it

Linearizzazione

I sistemi reali NON sono lineari!, prima o poi
il legame tra le grandezze non è proporzionale!
..si linearizza per semplificare le equazioni del moto!

Vibrazioni del pendolo



$$\begin{cases} ma_c = T - mg\cos\theta \\ ma_t = -mg sen\theta \end{cases}$$

Moto Circolare: $\begin{cases} a_c = L\dot{\theta}^2 \\ a_t = L\ddot{\theta} \end{cases}$

$$\begin{cases} mL\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg sen\theta \end{cases}$$

divido per m, e riordino

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right) sen\theta = 0$$

equazione esatta

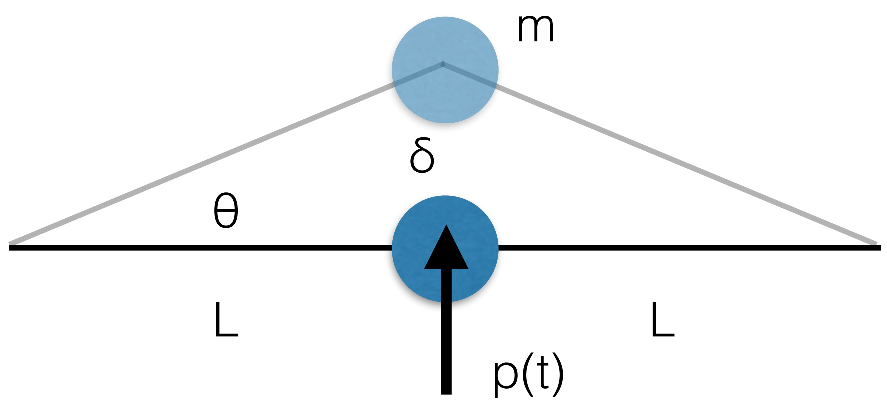
per piccoli spostamenti $sen\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

equazione approssimata

Linearizzazione

Vibrazioni fune tesa



Consideriamo la tensione di una fune
di sezione A, lunghezza L, modulo di Young E,
soggetta ad un allungamento δ

$$T = T_o + \left(\frac{AE}{L} \right) \delta \qquad \delta = \left(L^2 + u^2 \right)^{1/2} - L$$

$$m\ddot{u} + 2T \sin\theta = p$$

Eq. di equilibrio massa m,

$$\sin\theta = \frac{u}{\left(L^2 + u^2 \right)^{1/2}}$$

sostituendo:

$$m\ddot{u} + 2\left[T_0 + \left(\frac{AE}{L} \right) \left[\left(L^2 + u^2 \right)^{1/2} - L \right] \right] \left[\frac{u}{\left(L^2 + u^2 \right)^{1/2}} \right] = p$$

equazione esatta

Linearizzazione

..se considero l'ipotesi di piccoli spostamenti… $u << L$ e riordino l'equazione..

$$\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{mL}\right)u = \left(\frac{1}{m}\right)p$$

equazione approssimata lineare

..se approssimo l'allungamento con un'espansione (spostamenti un po' più grandi) e riordino l'equazione..

$$\delta = L\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{L}\right)^2\right] - L = \left(\frac{1}{2L}\right)u^2$$

$$\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{mL}\right)u + \left(\frac{AE}{mL^3}\right)u^3 = \left(\frac{1}{m}\right)p$$

equazione approssimata cubica

$+u^3$ ..hardening

$-u^3$ .. softening

..more later on..
Sistemi non lineari

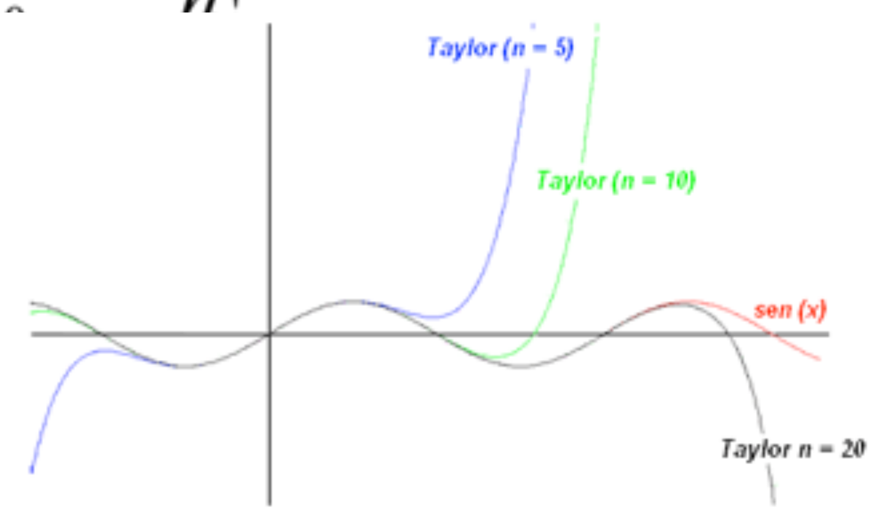
Luigi BREGANT
bregant@units.it

Linearizzazione

..piccoli spostamenti..
..espansioni in serie di Taylor / Maclaurin
..integrazione numerica

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f^{(n)}(x_0) + \ldots = \sum^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



..more later on..
Integrazione numerica

Linearizzazione

$$x(t) \rightarrow p(t)$$
$$y(t) \rightarrow q(t)$$

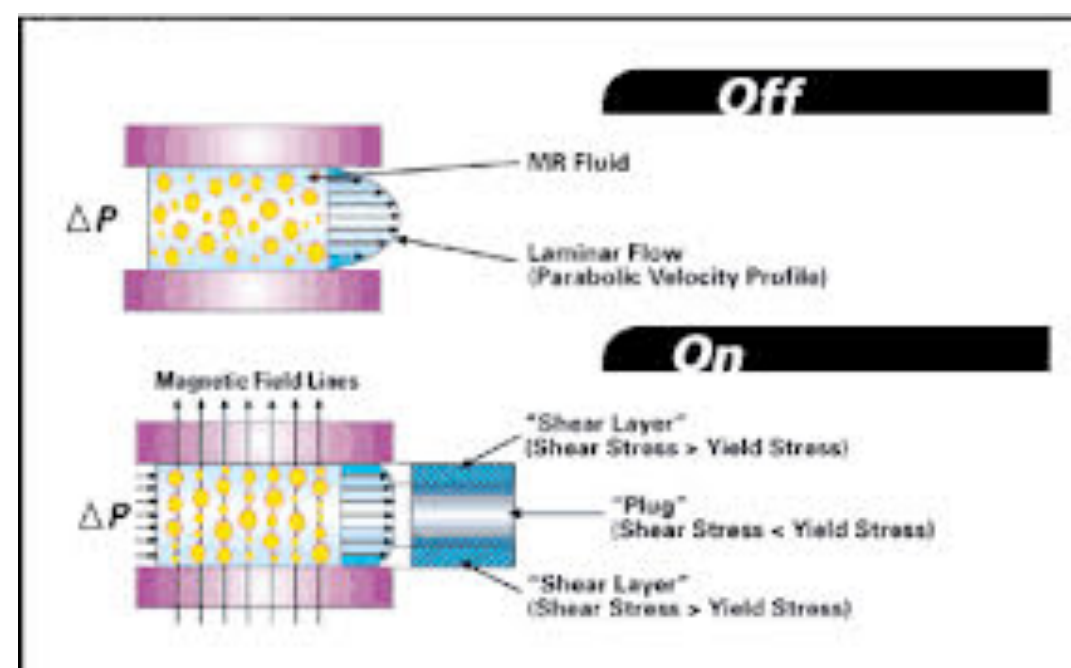
$$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow \alpha p(t) + \beta q(t)$$

..vale il principio di sovrapposizione degli effetti
..vale il teorema di Maxwell/reciprocità

Nel Corso di MDV si considerano sistemi a parametri costanti nel tempo! sistemi LTI

Massa variabile

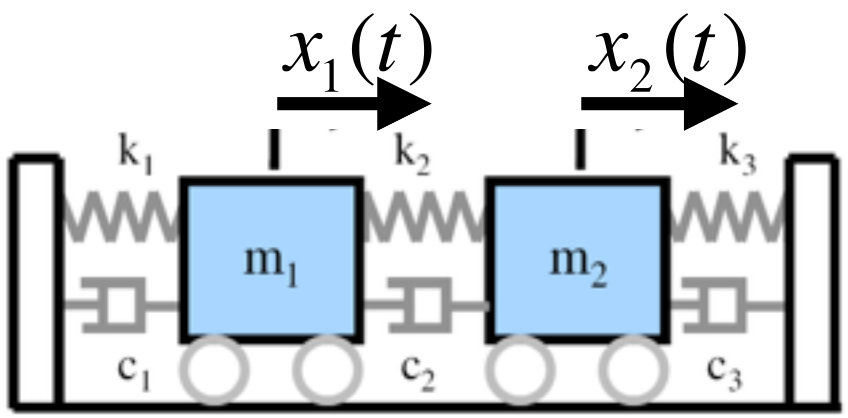
Materiali Magneto / Elettro reologici

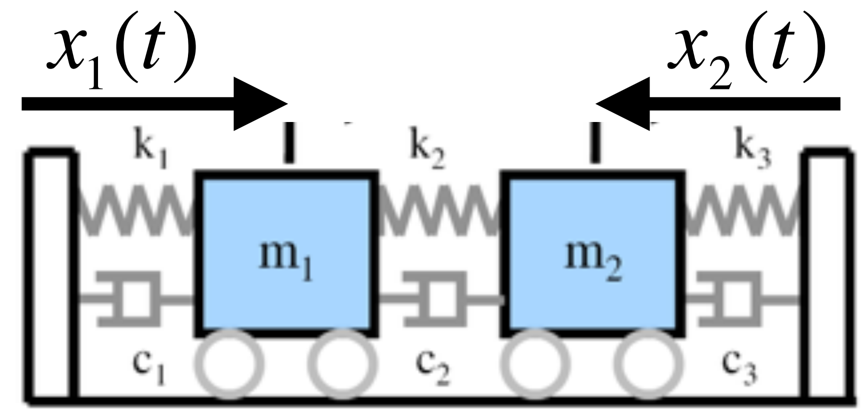


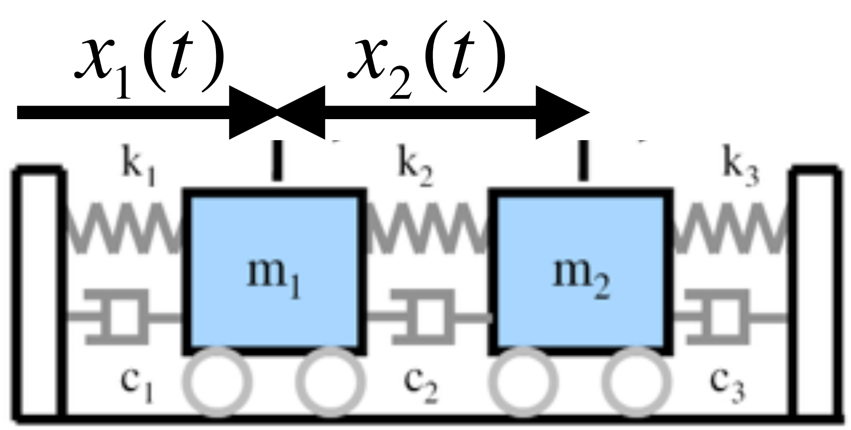
Università d
Dip. Ingegn
GANT
bregant@units.it

Coordinate

Minimo numero di informazioni in grado di descrivere completamente lo stato del sistema.. (ed in maniera più semplice possibile!)







..more later on..
Coordinate Accoppiate
Coordinate Modali

Coordinate

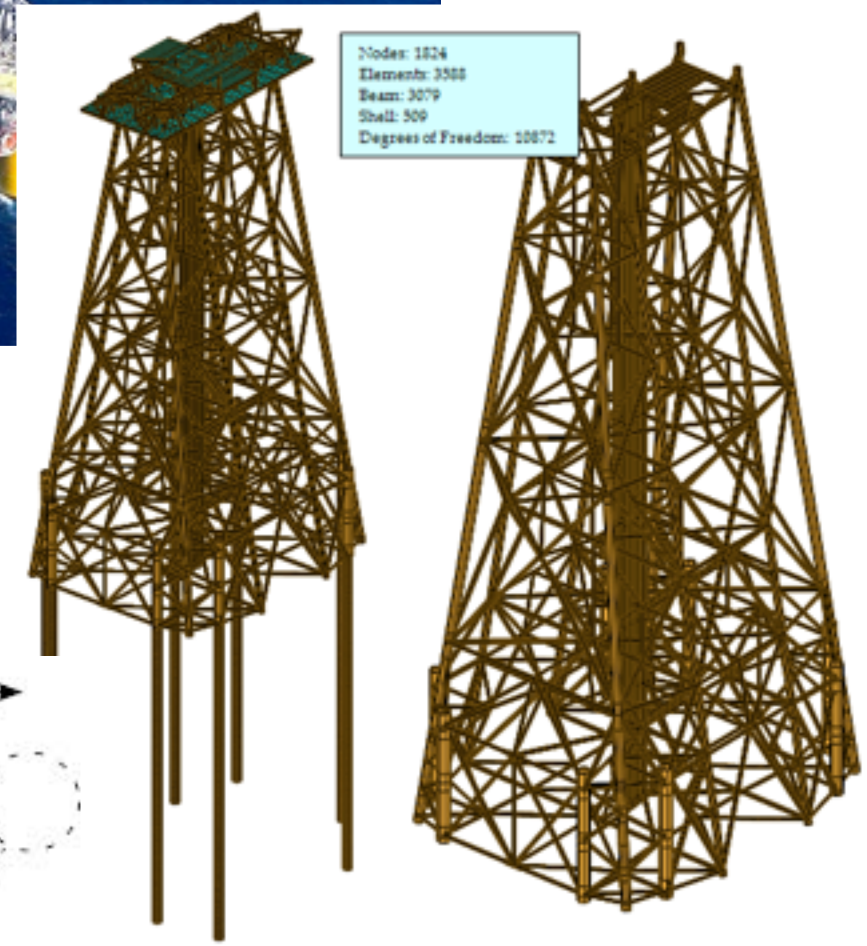
Sistemi Continui

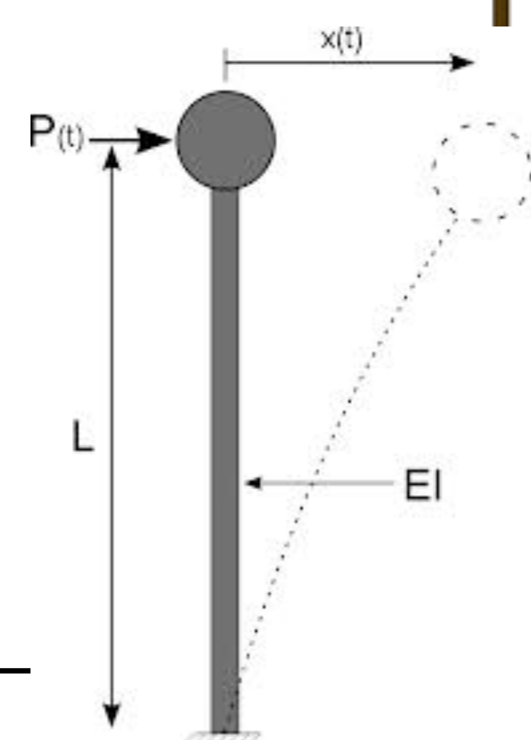
..semplificare!

Sistemi MDOF

..MDV

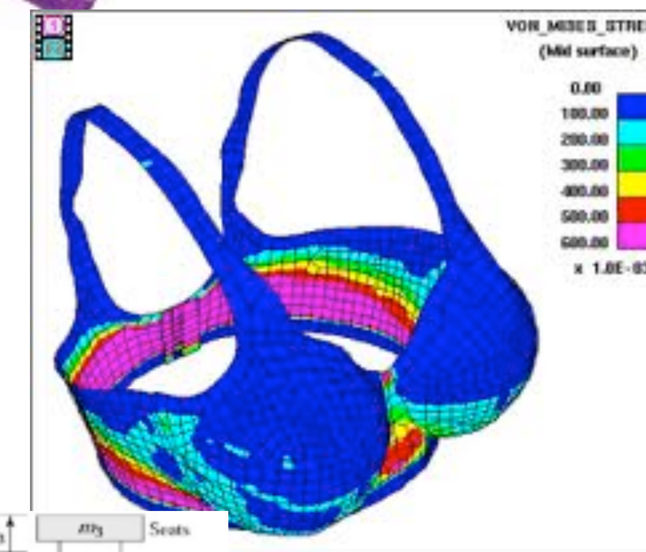
Sistemi SDOF





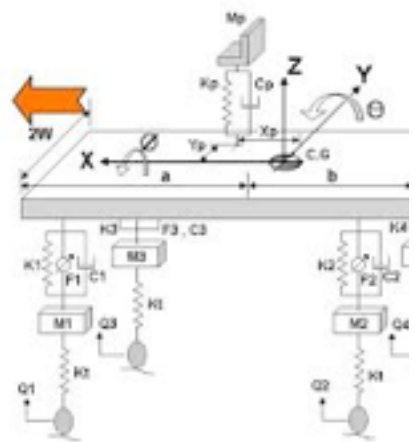
Coordinate

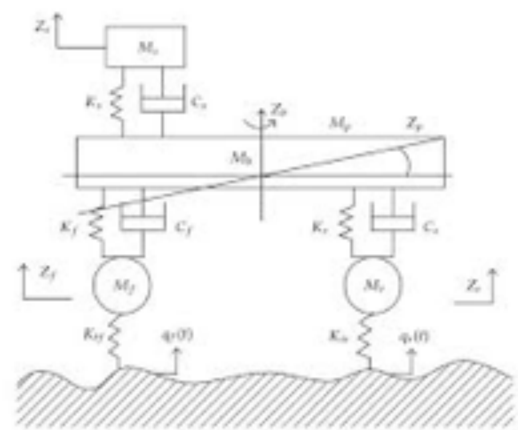
Sistemi Continui

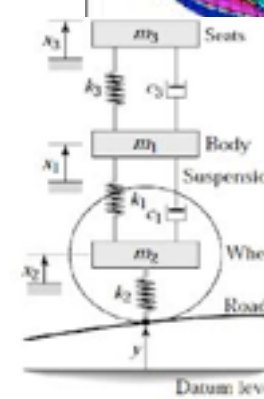


..semplificare!

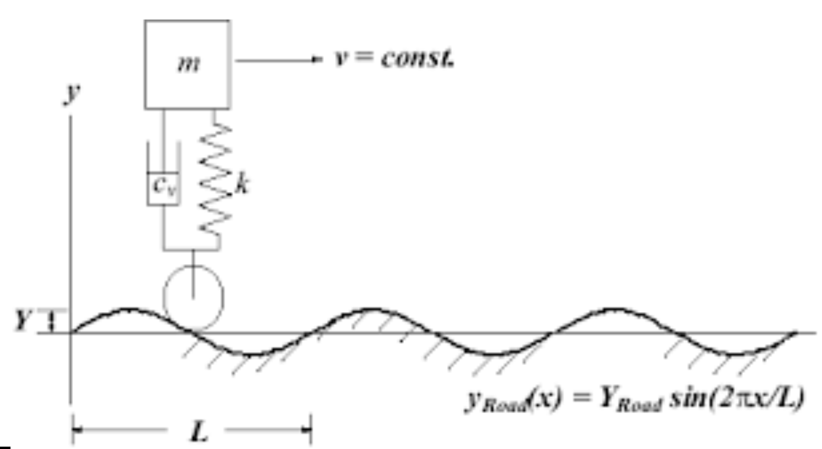
Sistemi MDOF







Sistemi SDOF



Luigi BREGANT
bregant@units.it