

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale  
ingegneria meccanica

parte 6  
analisi macchinario rotante

# Macchinario rotante

La maggior parte delle macchine industriali ha organi rotanti!

Lo studio della loro dinamica si differenzia in base alle dimensioni e dal regime di funzionamento

Si considera acquisito il concetto di squilibrio statico / dinamico / di coppia (meccanica applicata alle macchine)



# Macchinario rotante

Si definisce un ROTORE un corpo sospeso tramite una serie di cerniere cilindriche che gli permettono di ruotare liberamente attorno ad un asse! (statore..non si muove)

Si immagina che l'asse di rotazione sia fisso nello spazio (non è vero nelle macchine semoventi automobili, aerei, navi..)

Si immagina che il rotore sia equilibrato (asse rotazione coincide asse principale d'inerzia), o se non lo è lo squilibrio sia piccolo e le deformazioni relative piccole

Si immagina che il rotore sia assial-simmetrico (le equazioni son più semplici, e non serve lavorare con un sistema di rif solidale al rotore)

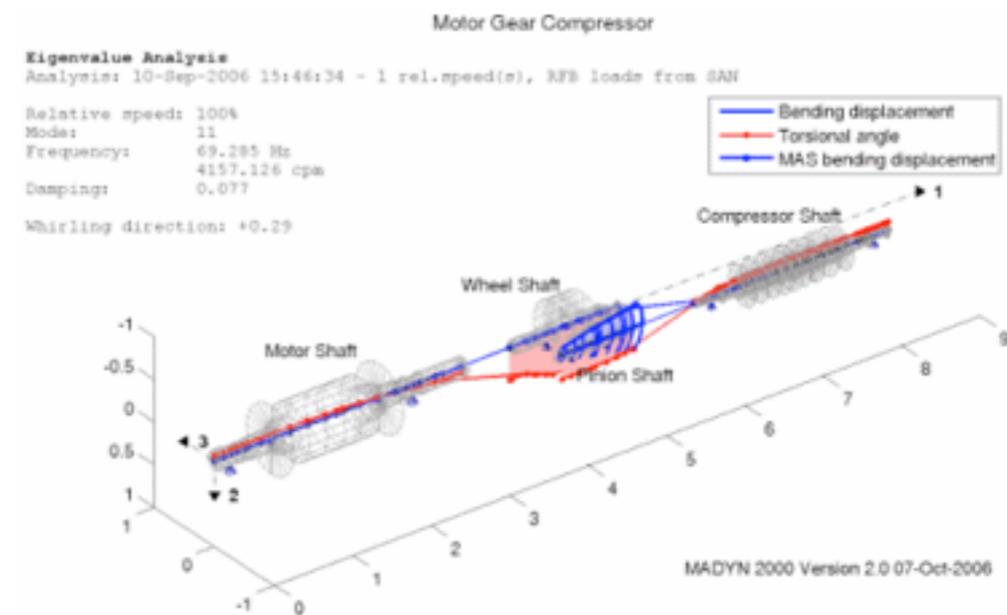
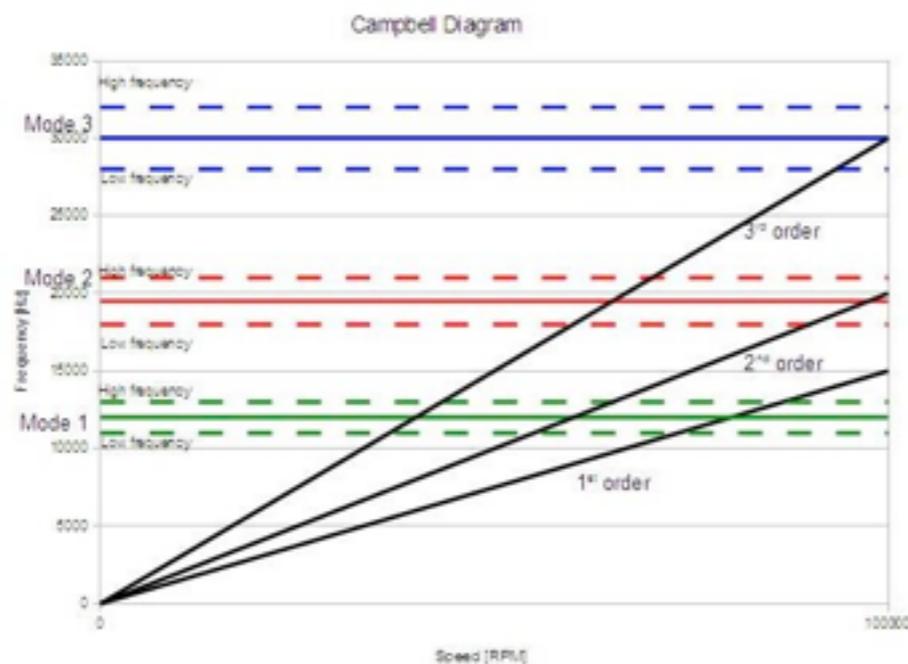
Si immagina che il rotore sia “mosso” dall'esterno

# Macchinario rotante - diagramma di Campbell

Si possono immaginare due condizioni di funzionamento:  
a velocità costante (o poco variabile es. alternatore elettrico)  
a velocità variabile (transitorio es. motore automobile)

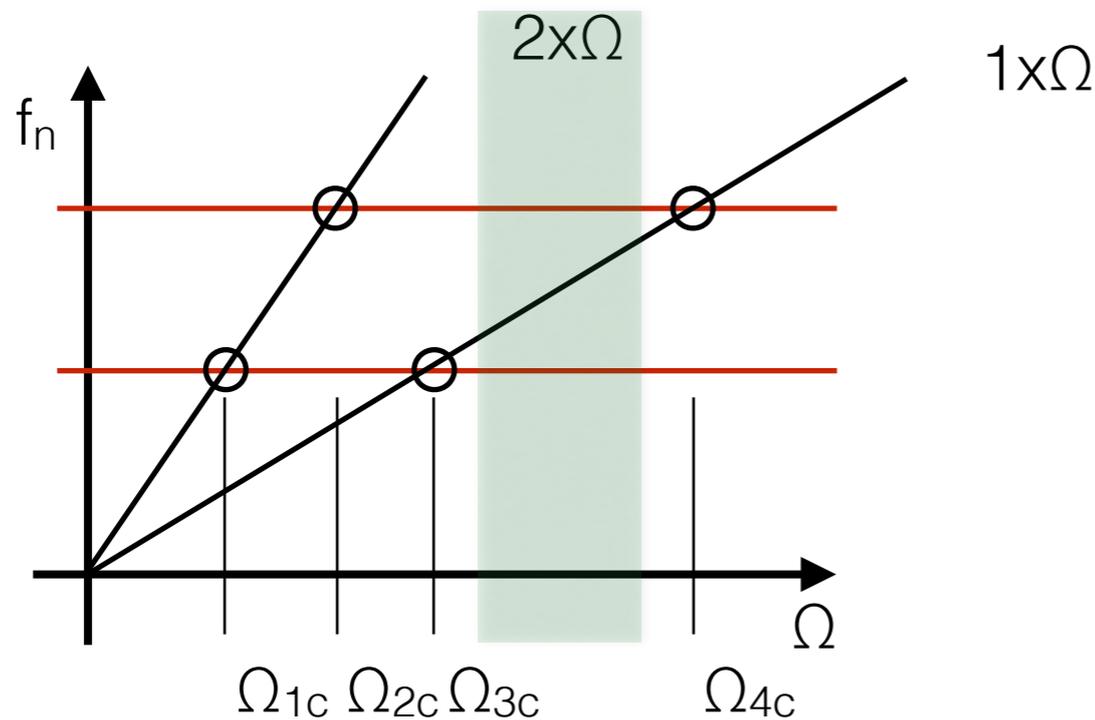
Il rotore è esteso e continuo ed avrà un certo numero di frequenze naturali..  
si vuole fare in modo che il/i regimi di funzionamento, siano più lontani possibili  
da tali frequenze... (amplificazione delle deformate...vibrazioni...rotture)

Si utilizza il diagramma di Campbell che rappresenta contemporaneamente  
la velocità del rotore e le sue risonanze (flessionali, torsionali, forward, backward,..)



# Macchinario rotante - diagramma di Campbell

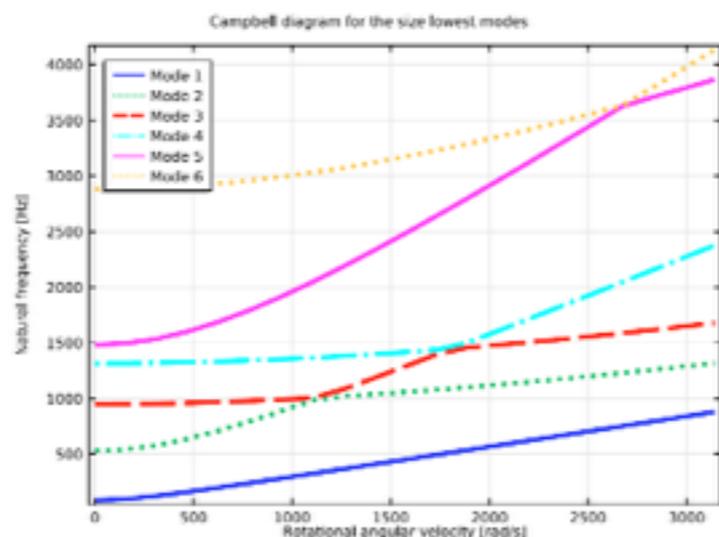
L'intersezione tra le rette rappresentanti la velocità del rotore  $\Omega$  e le sue armoniche con le rette rappresentanti le frequenza naturali del sistema sono dette velocità critiche!



Nel caso specifico si riportano  $f_n$  indipendenti da  $\Omega$ , ma non è sempre questo il caso..

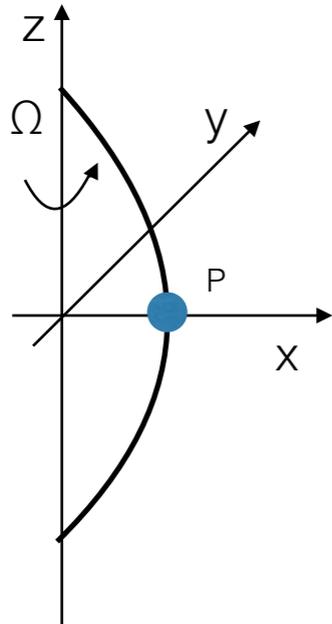
Non tutte le critiche sono critiche! dipende dal valore di smorzamento associato!

NB alle velocità critiche il rotore non vibra, ma ruota deformato! diventando la sorgente di eccitazione periodica della parte statica della macchina!!



# Macchinario rotante - rotore di Jeffcott

Nelle due direzioni coordinate..  $\begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0 \\ m\ddot{y} + ky = 0 \end{cases}$



..o con la rappresentazione complessa..

Punto P si muove sul piano xy, descritto dal vettore rotante  $z = x + jy$

$m\ddot{z} + kz = 0$  soluzione di tentativo..  $\begin{cases} z = z_0 e^{j\omega t} \\ z_0 = x_0 + jy_0 \end{cases}$   
condizioni iniziali..

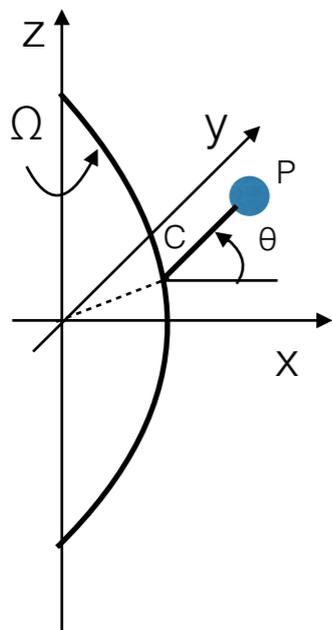
$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$z = Z_1 e^{j\sqrt{k/m}t} + Z_2 e^{-j\sqrt{k/m}t}$$

due soluzioni una positiva ed una negativa...

Forward Whirl / Backward Whirl

Z1 e Z2 dipendono dalle CI!



Nel caso di rotore bilanciato non ha molto senso ma nel caso di rotore sbilanciato, ci dice da che parte ruota lo sbilanciamento rispetto alla rotazione del rotore!

# Macchinario rotante - rotore di Jeffcott

$$\begin{cases} m[\ddot{x} - e\dot{\theta}^2 \cos\theta - e\ddot{\theta} \sin\theta] + kx = 0 \\ m[\ddot{y} - e\dot{\theta}^2 \sin\theta + e\ddot{\theta} \cos\theta] + ky = 0 \end{cases}$$

con  $e$  eccentricità della massa  $m$

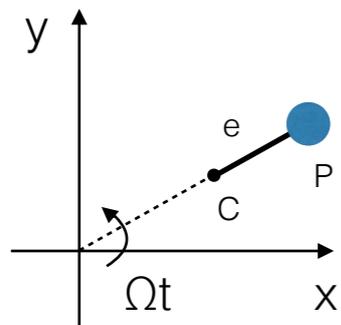
$$m\ddot{z} + kz = me(\dot{\theta}^2 - j\ddot{\theta})e^{j\theta}$$

Nel caso particolare di velocità angolare del rotore considerata costante  $\Omega = \dot{\theta}$  l'angolo  $\theta$  può essere espresso come  $\Omega t = \theta$  risulta allora..

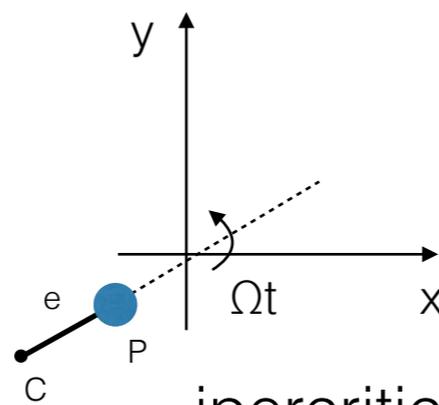
$$m\ddot{z} + kz = me\Omega^2 e^{j\Omega t}$$

$$z_0 = e \frac{\Omega^2}{\omega_{cr}^2 - \Omega^2}$$

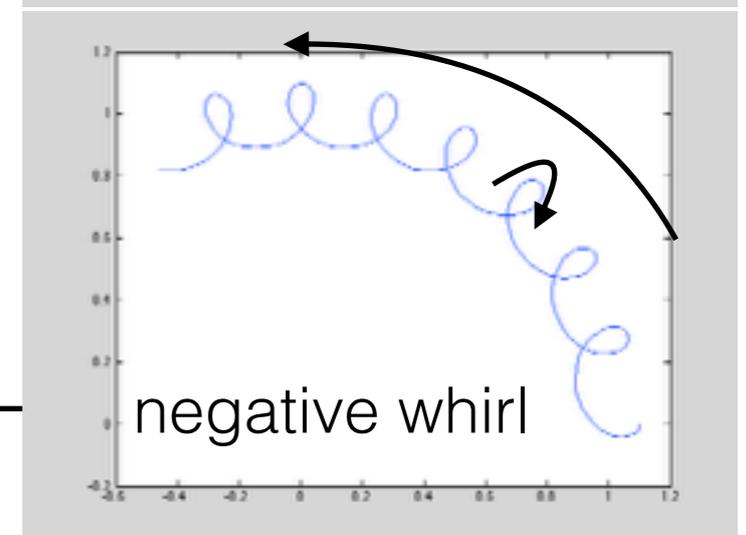
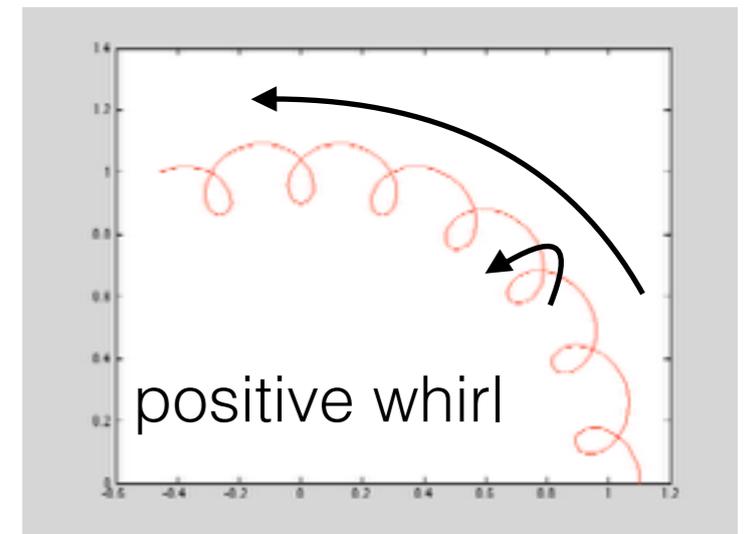
soluzione giù vista...



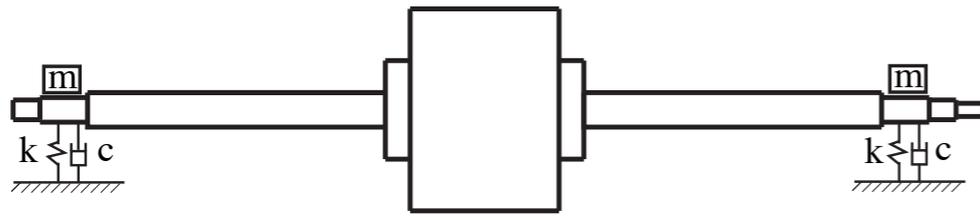
subcritica...



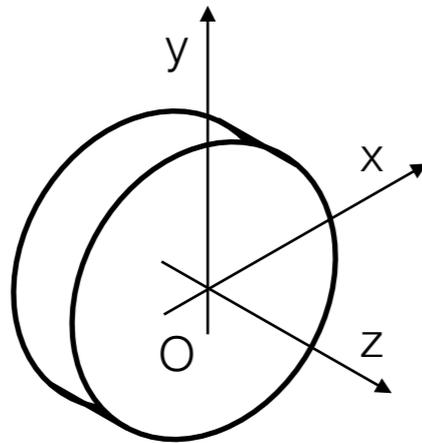
ipercritica...  
(autocentratura)



# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili



Bisogna aggiungere i Momenti Giroscopici..



Derivano..dalla conservazione del momento angolare del sistema..

..e sono perpendicolari all'asse di rotazione del rotore!

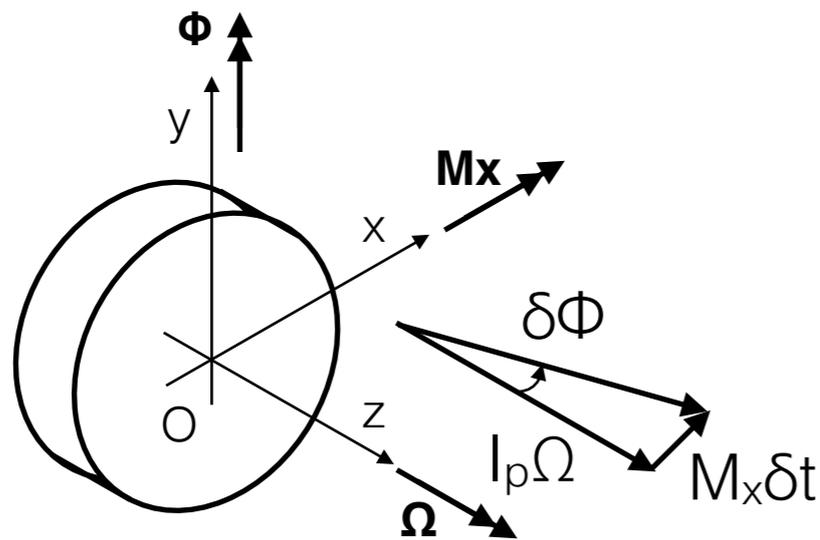
(vale la regola della mano destra!!)

Supponiamo il rotore giri con una velocità angolare  $\Omega$  e che abbia un momento d'inerzia polare  $I_p$  ed un momento diametrale d'inerzia  $I_d$ ...

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

Quando ruota, il momento angolare del rotore sarà  $I_p\Omega$ ..

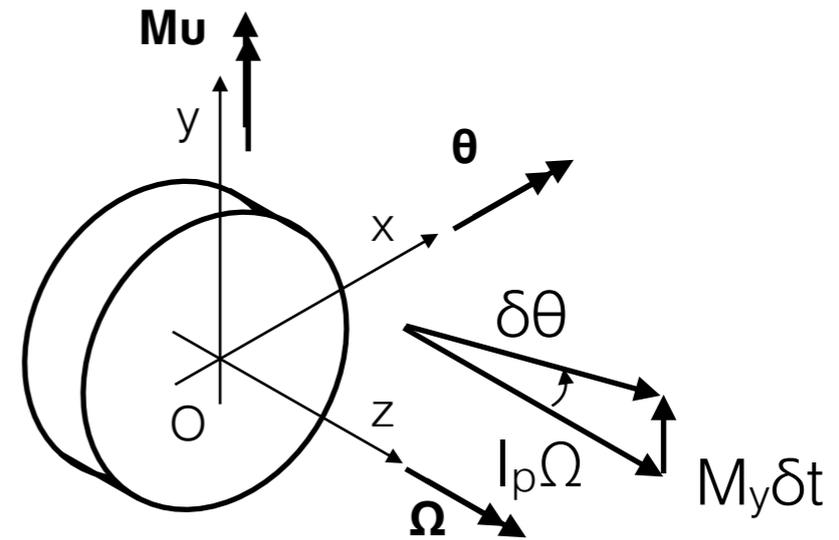
..supponiamo il disco ruoti in un  $\delta t$  attorno all'asse y con velocità  $\dot{\phi} = \frac{\delta\phi}{\delta t}$   
Il momento angolare ruoterà di una quantità  $\delta\phi$  generando un momento  $M_x$



$$M_x \delta t = I_p \Omega \delta\phi \quad \text{per } \delta t \text{ che tende a zero...}$$

$$M_x = I_p \Omega \dot{\phi} \quad I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} = M_x$$

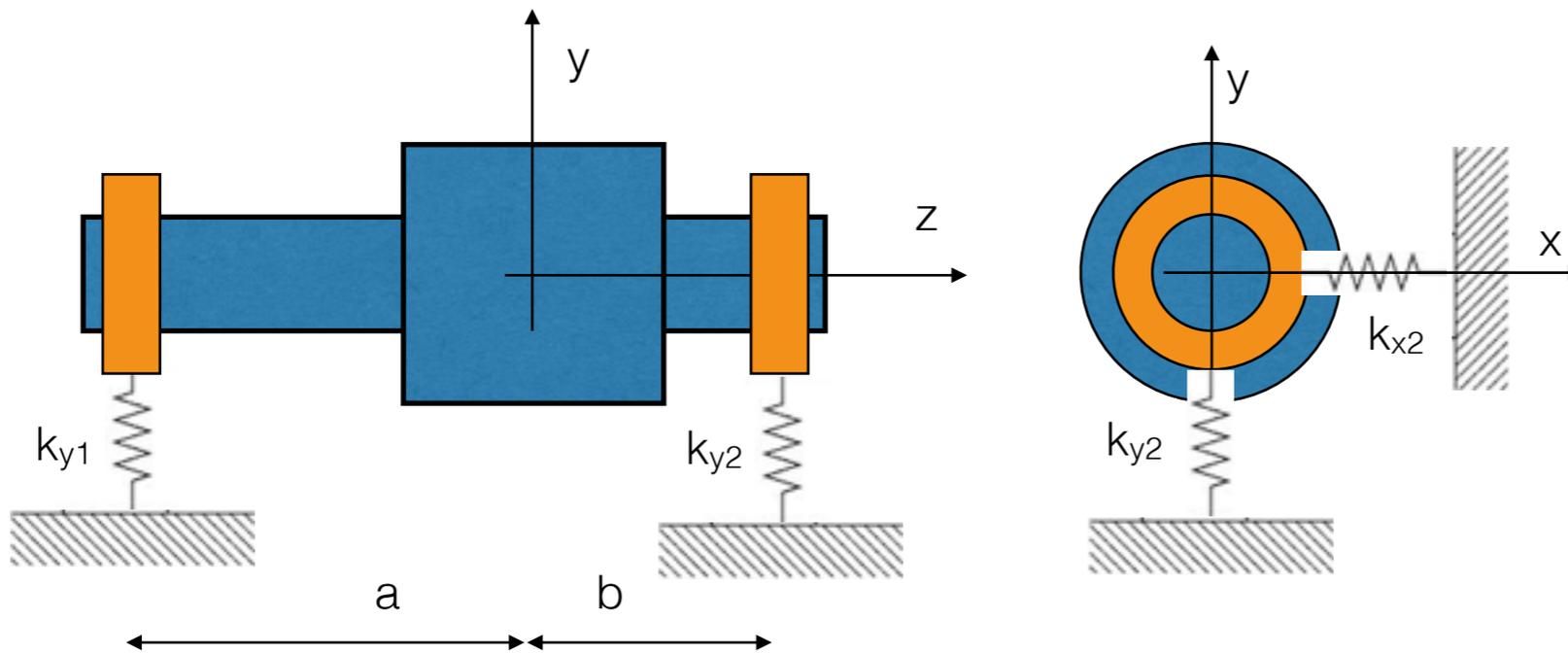
..supponiamo il disco ruoti in un  $\delta t$  attorno all'asse x con velocità  $\dot{\theta} = \frac{\delta\theta}{\delta t}$   
Il momento angolare ruoterà di una quantità  $\delta\theta$  generando un momento  $M_y$



$$-M_y \delta t = I_p \Omega \delta\theta$$

$$M_y = I_p \Omega \dot{\theta} \quad I_d \ddot{\theta} - I_p \Omega \dot{\theta} = M_y$$

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili



..supponiamo che i cuscinetti non abbiano rigidità angolare e si possano muovere in direzione orizzontale e verticale..

$\theta$  rotazione attorno asse x  
 $\phi$  rotazione attorno asse y

$$\begin{cases}
 m\ddot{x} + k_{x1}(x - a\phi) + k_{x2}(x - b\phi) = 0 \\
 m\ddot{y} + k_{y1}(y + a\theta) + k_{y2}(y - b\theta) = 0 \\
 I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} + ak_{y1}(y + a\theta) - bk_{y2}(y - b\theta) = 0 \\
 I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} + ak_{x1}(x - a\phi) - bk_{x2}(x + b\phi) = 0
 \end{cases}$$

Equilibrio forze in dir x

Equilibrio forze in dir y

Equilibrio momenti attorno  $\theta$

Equilibrio momenti attorno  $\phi$

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

..riordinando..

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 & 0 & -ak_{x1} + bk_{x2} \\ 0 & k_{y1} + k_{y2} & ak_{y1} - bk_{y2} & 0 \\ 0 & ak_{y1} - bk_{y2} & a^2k_{y1} + b^2k_{y2} & 0 \\ -ak_{x1} + bk_{x2} & 0 & 0 & a^2k_{x1} + b^2k_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..matrice momenti giroscopici

..semplificando..

$$\begin{cases} k_{xT} = k_{x1} + k_{x2} & k_{yT} = k_{y1} + k_{y2} \\ k_{xC} = -ak_{x1} + bk_{x2} & k_{yC} = -ak_{y1} + bk_{y2} \\ k_{xR} = a^2k_{x1} + b^2k_{x2} & k_{yR} = a^2k_{y1} + b^2k_{y2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..equazioni generali.. accoppiate!

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

Guardiamo alcuni casi..

supporti isotropi / no effetto giroscopico

$$k_{xT} = k_{yT} = k_T \quad I_p \Omega = 0$$

1 senza accoppiamento elastico (es a=b)

$$k_{xC} = k_{yC} = k_C = 0$$

2 con accoppiamento elastico

$$k_{xC} \neq k_{yC} \neq 0$$

3 supporti isotropi / con effetto giroscopico

supporti anisotropi / con effetto giroscopico

$$k_{xT} \neq k_{yT} \neq 0$$

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

## Caso 1

..si riduce drasticamente la complessità del sistema..

..equazioni disaccoppiate!

..con l'usuale soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_R \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = X_o e^{st} \\ y = Y_o e^{st} \\ \theta = \theta_o e^{st} \\ \phi = \phi_o e^{st} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} & \text{bounce mode} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} & \text{tilt mode} \end{cases}$$

**NB in realtà ci sono 4DOF  
=> 8 radici... a due a due  
complesse e coniugate**

in realtà ci sono 4 soluzioni a due a due complesse coniugate per le traslazioni e per le rotazioni... se ne riportano solo due..

NB non è detto che il bounce venga prima del tilt..dipende dal valore delle rigidezze, masse ed inerzie!

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

## Caso 2

..in questo caso c'è una dissimmetria del rotore..  
 ..con l'usuale soluzione di primo tentativo

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (ms^2 + k_T) X_0 + k_C \phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T) Y_0 - k_C \theta_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R) \theta_0 - k_C Y_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R) \phi_0 + k_C X_0 = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right\} \text{ a 2 a 2 accoppiate..}$$

**da 1&4..**

$$X_0 = -\frac{k_C \phi_0}{(ms^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \phi_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C = 0$$

**da 2&3..**

$$Y_0 = \frac{k_C \theta_0}{(ms^2 + k_T)} = \frac{(I_d s^2 + k_R) \theta_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C = 0$$

$$s^4 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

le radici di questa equazione sono :

$$s^2 = -\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right)^2 + \frac{k_C^2}{mI_d}} = -\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) \pm \gamma$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} - \gamma} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} + \gamma} \end{array} \right.$$

**NB in realtà ci sono 4DOF  
=> 8 radici... a due a due  
complesse e coniugate**

I modi associati a tali autovalori sono accoppiati e con l'usuale metodo..

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{i=1,3} = \frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_C} = -\frac{k_C}{m s_i^2 + k_T} \quad \begin{pmatrix} Y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}_{i=2,3} = \frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_C} = \frac{k_C}{m s_i^2 + k_T}$$

I modi sono identici ma si sviluppano su piani diversi...

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

## Caso 3

..aggiungendo i momenti giroscopici..  
 ..con l'usuale soluzione di primo tentativo  
 ..senza accoppiamento elastico... $k_c=0$ ..

**NB in realtà ci sono 4DOF  
 => 8 radici... a due a due  
 complesse e coniugate**

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dalle 1 e 2} \\ \text{dalle 3 e 4} \end{array}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_d s^2 + k_R) \theta_0 + I_p \Omega s \phi_0 = 0 \\ -I_p \Omega s \theta_0 + (I_d s^2 + k_R) \phi_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$(I_d s^2 + k_R)^2 + (I_p \Omega s)^2 = 0$$

$$I_d s^2 + k_R = \pm I_p \Omega s$$

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$

$$I_d s^2 \mp I_p \Omega s + k_R = 0$$

$$\omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$

..le radici dipendono da  $\Omega$  !

..nel diagramma di Campbell,  
 le freq. naturali non son  
 più rette orizzontali, ma curve!!

# Macchinario rotante - rotore rigido su supporti flessibili

## Caso 3

..aggiungendo i momenti giroscopici..

..con l'usuale soluzione di primo tentativo

..con accoppiamento elastico

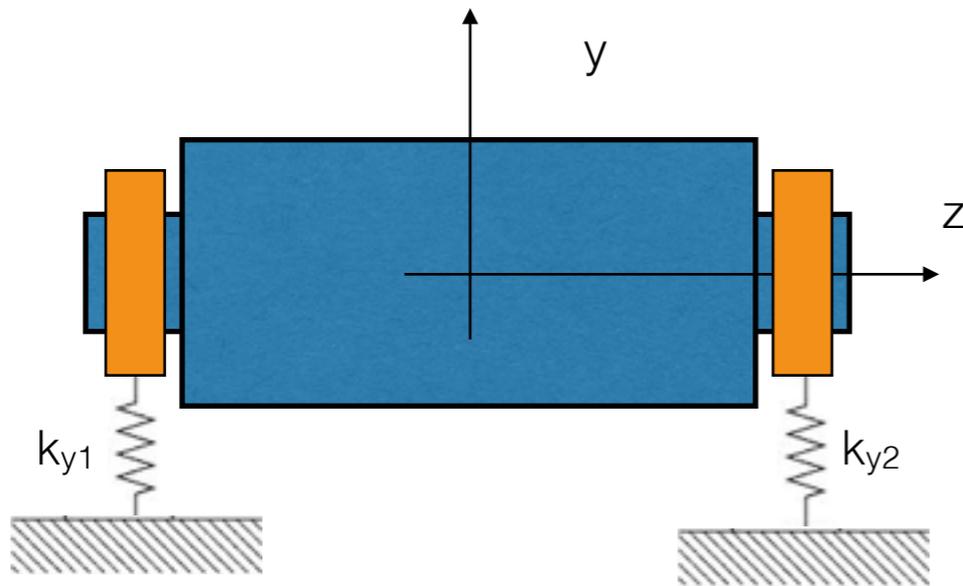
$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (ms^2 + k_T) X_0 + k_C \phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T) Y_0 - k_C \theta_0 = 0 \\ -k_C Y_0 + (I_d s^2 + k_R) \theta_0 + I_p \Omega \phi_0 = 0 \\ k_C X_0 - I_p \Omega \theta_0 + (I_d s^2 + k_R) \phi_0 = 0 \end{array} \right.$$

..da 1 e 2 si determina  $\Phi_0$  e  $\theta_0$  che si sostituiscono in 3 e 4..

.. 3 e 4 in  $X_0$  e  $Y_0$  vengono utilizzate per determinare l'equazione caratteristica in  $s$

$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_p}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

# Macchinario rotante - esempio 1



## Rotore

lunghezza  $L=0.5\text{m}$   
 raggio  $r=0.2\text{m}$   
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$   
 $k_x=k_y=1\text{MN/m}$

## CI

$X_0=1\text{mm}$   
 $Y_0=0.5\text{mm}$   
 $V_{x_0}=30\text{mm/s}$

Frequenze naturali ? Risposta rotore?

$$m = \frac{\rho \pi D^2 L}{4} = 122.68 \text{ kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134 \text{ kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625 \text{ kgm}^2$$

$$k_T = k_{x_1} + k_{x_2} = 2000 \text{ kNm}$$

$$k_C = -a k_{x_1} + b k_{x_2} = 0 \text{ kNm}$$

$$k_R = a^2 k_{x_1} + b^2 k_{x_2} = 125 \text{ kNm}$$

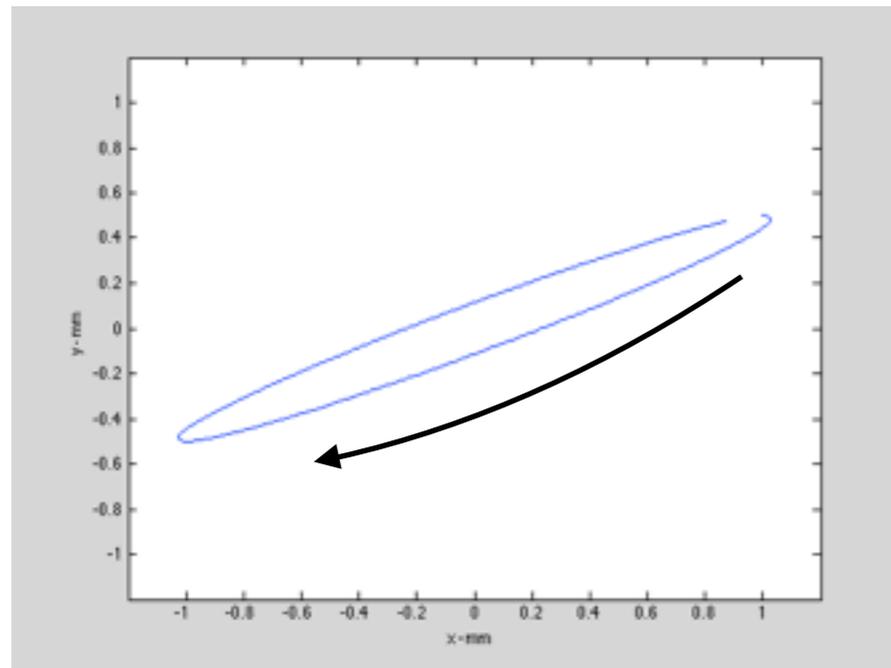
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} = 208.97 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$

# Macchinario rotante - esempio1

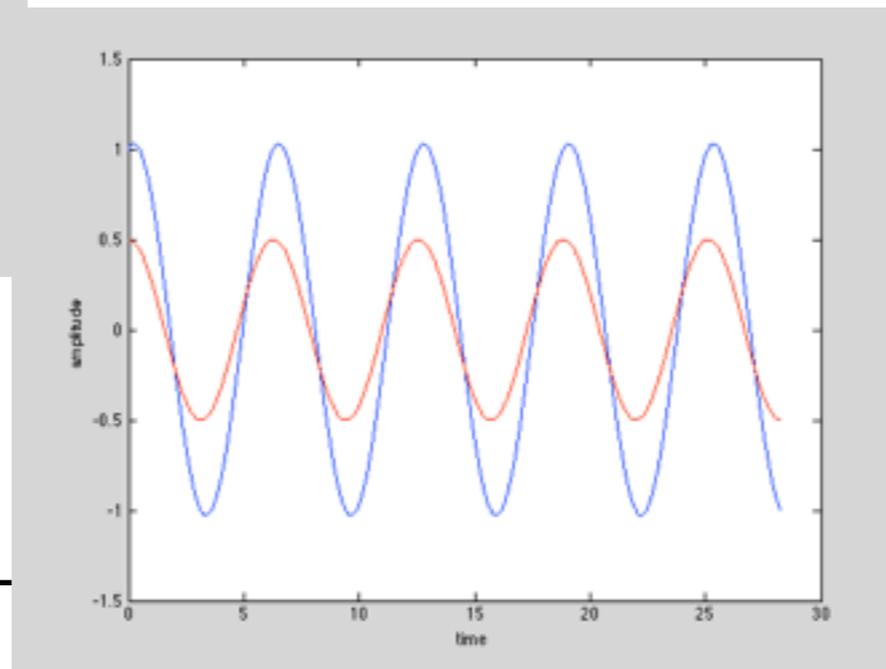
$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t) \\ y = B_1 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - A_2 \omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ \dot{y} = B_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

..con la sostituzione dei valori numerici si ottiene..



$$\begin{cases} x = \left(\frac{30}{\omega_1}\right) \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \\ y = \frac{1}{2} \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$



# Macchinario rotante - esempio2

## Rotore

..lo stesso rotore ma differente rigidezza ai cuscinetti ( $k_{xi}=k_{yi}$ )

$$k_1 = 1 \text{ MN/m}$$

$$k_2 = 1.3 \text{ MN/m}$$

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2300 \text{ kNm}$$

$$k_C = -ak_{x1} + bk_{x2} = 75 \text{ kNm}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 143.75 \text{ kNm}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right)^2 + \frac{k_C^2}{mI_d}} 16.236 \text{ rad}^2 / \text{s}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} - \gamma} = 135.08 \text{ rad / s} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} + \gamma} = 225.21 \text{ rad / s} \end{array} \right.$$

# Macchinario rotante - esempio3

## Rotore

..lo stesso rotore che ruota a 4000 rpm con i cuscinetti uguali al caso 1

$$k_x = 1 \text{ MN/m}$$

$$k_y = 1 \text{ MN/m}$$

$$\Omega = 4000 \frac{2\pi}{60} = 418.88 \text{ rad / s}$$

$$k_T = 2000 \text{ kNm}$$

$$k_C = 0 \text{ kNm}$$

$$k_R = 125 \text{ kNm}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad / s}$$

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 168.85 \text{ rad / s}$$

$$\omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 258.61 \text{ rad / s}$$

uguali al caso 2

$$k_1 = 1 \text{ MN/m}$$

$$k_2 = 1.3 \text{ MN/m}$$

$$k_T = 2300 \text{ kNm}$$

$$k_C = 75 \text{ kNm}$$

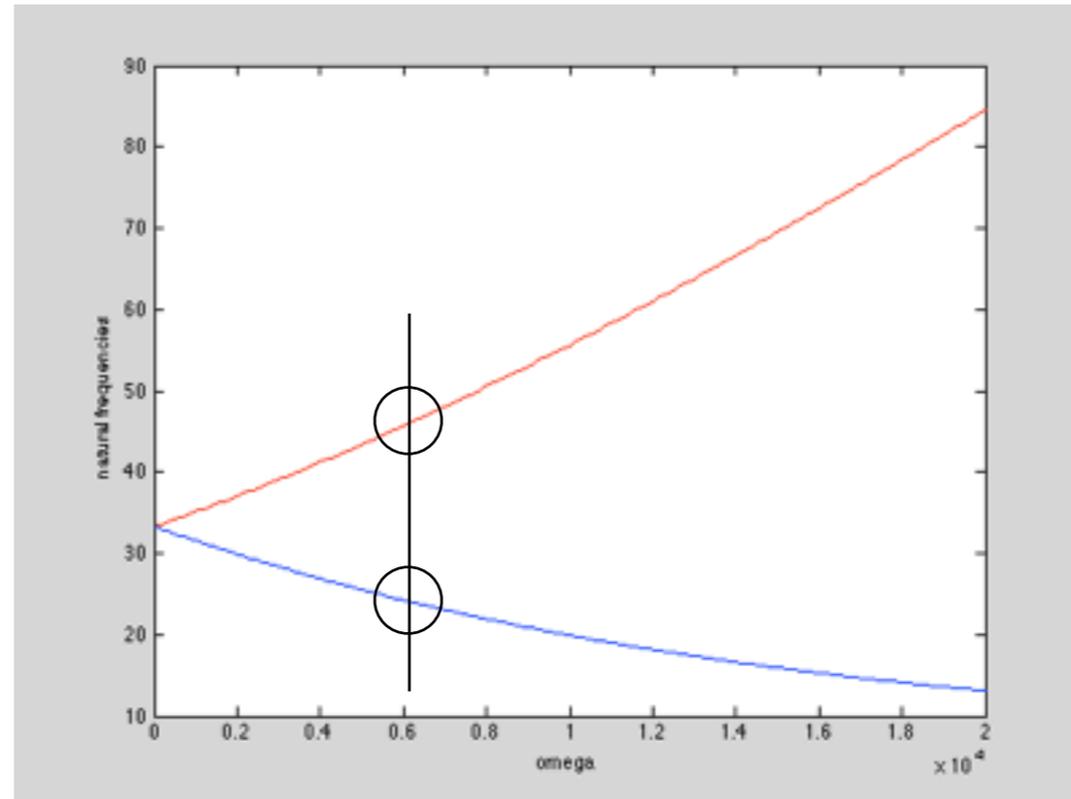
$$k_R = 143.75 \text{ kNm}$$

$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_p}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

$$s^4 \mp j 89.76 s^3 + 68966 s^2 \mp j 1682800 s + 925.48 \times 10^6 = 0$$

# Macchinario rotante - esempio3

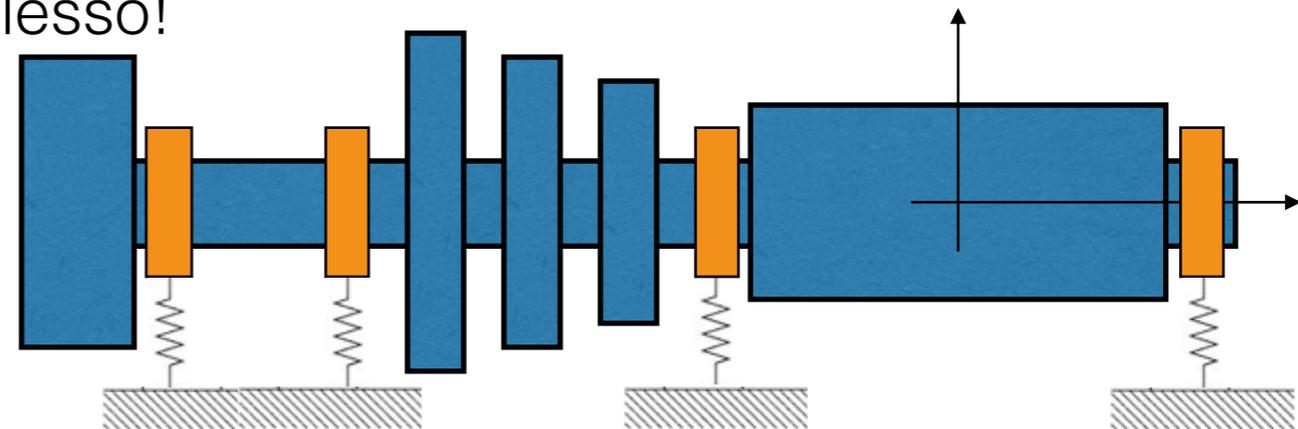
..le frequenze  $\omega_3$   $\omega_4$  variano al variare di  $\Omega$ ..



Forward Whirl

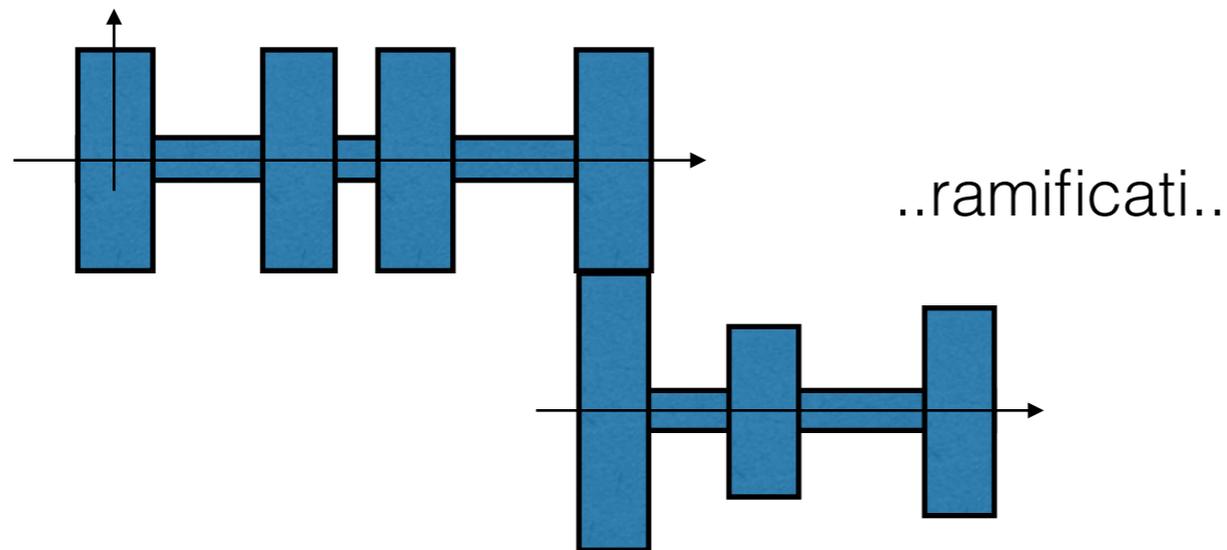
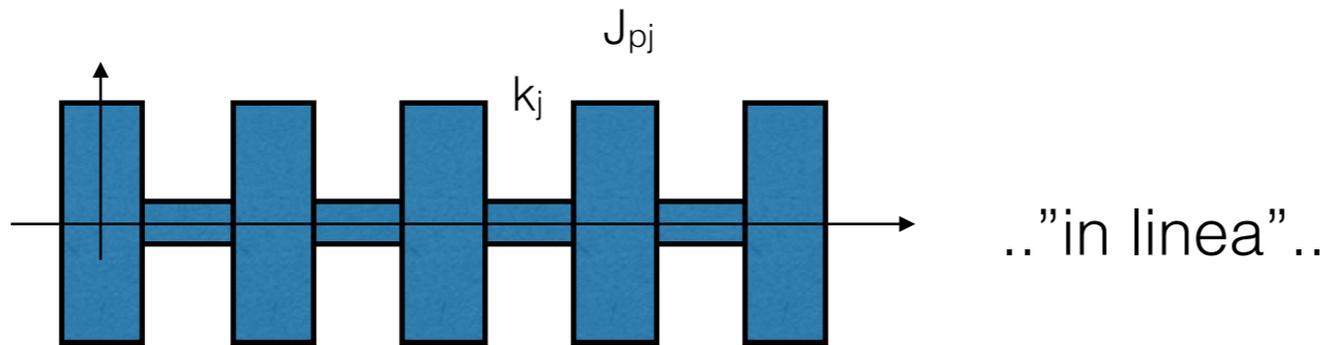
Backward Whirl

al variare del rotore (numero di dischi, flessibilità albero, condizioni di vincolo, anisotropia, smorzamento, effetti giroscopici,...) il diagramma di Campbell si fa più complesso!  
..resta uno strumento indispensabile!



# Macchinario rotante - torsionali

..in questo caso si suppone che l'asse della macchina non si fletta, ma i vari "dischi" ruotino reciprocamente tra loro..



..la rigidezza dei tronconi..

$$k_j = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{L}$$

..formule approssimate...  
"Blevins 1979"

# Macchinario rotante - torsionali

$$[m] = \begin{bmatrix} J_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{pN} \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_{t1} & -k_{t1} & 0 & 0 \\ -k_{t1} & k_{t1} + k_{t2} & -k_{t2} & 0 \\ 0 & -k_{t2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -k_{tN} & k_{tN} \end{bmatrix}$$

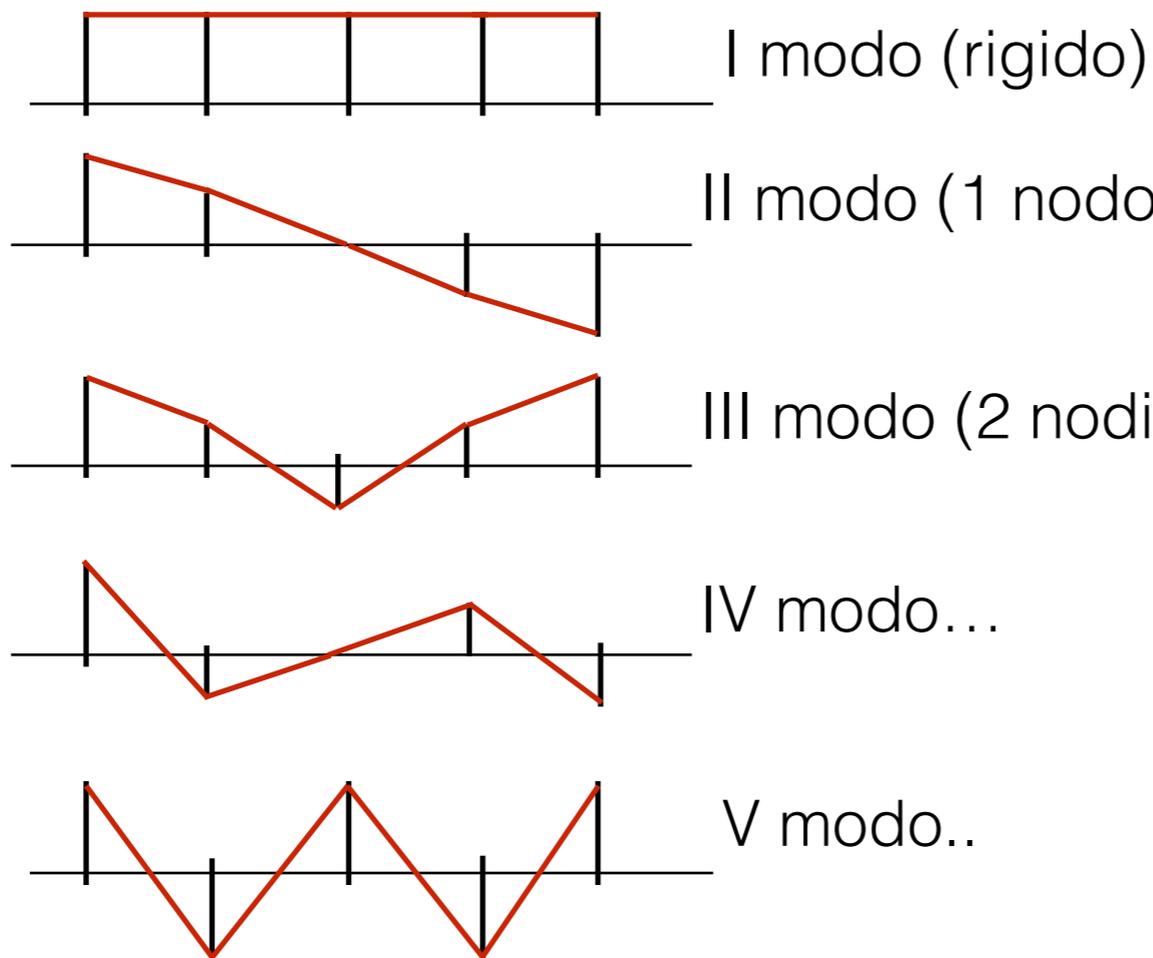
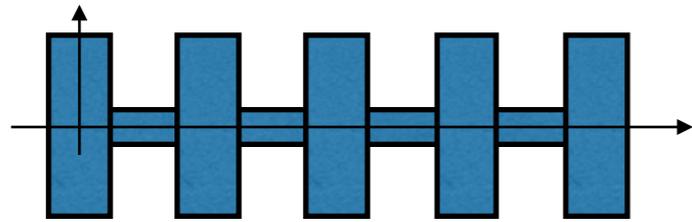
..problema agli autovalori...(spesso senza smorzamento, oppure localizzato nei giunti..non proporzionale!)

..N dischi..2N autovalori..N autovettori distinti

..se il rotore non è vincolato al mondo esterno..modo di corpo rigido!

..se N è il modo che si considera, ci sono (N-1) nodi nella deformata!

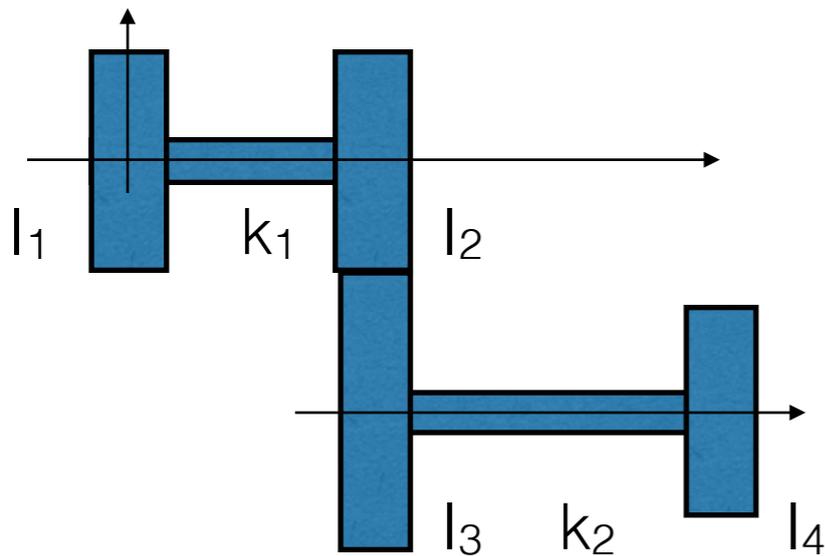
# Macchinario rotante - torsionali



Esistono diversi metodi iterativi per il calcolo delle vibrazioni torsionali..

Holzer..  
Myklestad..  
Prohl...

# Macchinario rotante - torsionali



..siano \$R\_2\$ ed \$R\_3\$ i raggi delle ruote 2 e 3 che ruotano senza strisciare..  
 ..\$N\_2\$ ed \$N\_3\$ i rispettivi numeri dei denti..  
 \$\gamma\$ il rapporto di trasmissione \$N\_2/N\_3\$ oppure \$R\_2/R\_3\$  
 I quattro volani non sono indipendenti!  
 le velocità tangenziali di \$I\_2\$ e \$I\_3\$ sono uguali!

$$\dot{\theta}_3 = -\gamma \dot{\theta}_2 \quad \text{- perché cambia il verso di rotazione!}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{23} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2 (\theta_3 - \theta_4) = T_3 + R_3 F_{23} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2 (\theta_4 - \theta_3) = T_4 \end{array} \right.$$

sostituendo

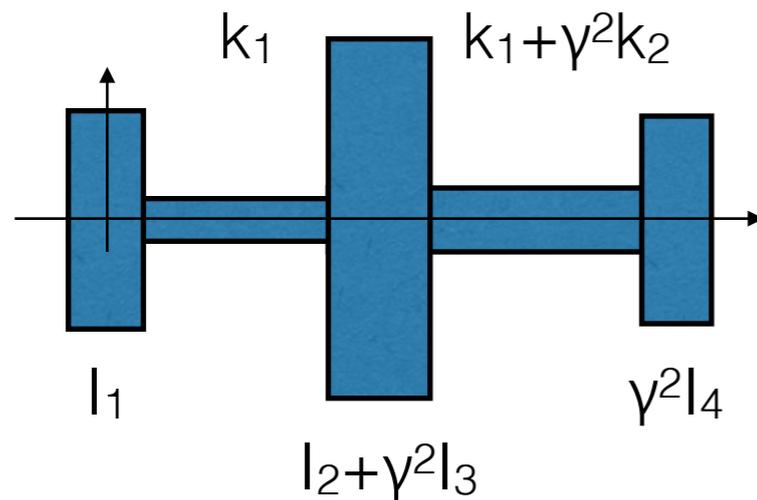
$$\theta_3 = -\gamma \theta_2$$

$$\theta_4 = -\gamma \theta_3$$

e sottraendo \$\gamma[3]-[2]\$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ (I_2 + \gamma^2 I_3) \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) + \gamma^2 k_2 (\theta_2 - \theta_3') = T_2 - \gamma T_3 \\ \gamma^2 I_4 \ddot{\theta}_3' + \gamma^2 k_2 (\theta_3' - \theta_2) = -\gamma T_4 \end{array} \right.$$

# Macchinario rotante - torsionali



..ottenendo il modello “in linea” equivalente..

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + \gamma^2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + \gamma^2 k_2 & -\gamma^2 k_2 \\ 0 & -\gamma^2 k_2 & \gamma^2 k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 - \gamma T_3 \\ -\gamma T_4 \end{Bmatrix}$$

..esiste una formulazione matriciale per i sistemi ramificati più complessi che porta alla scrittura equazioni per di sistemi “in linea” equivalenti..  
(matrice forze interne, vincoli e rapporti di trasmissione)

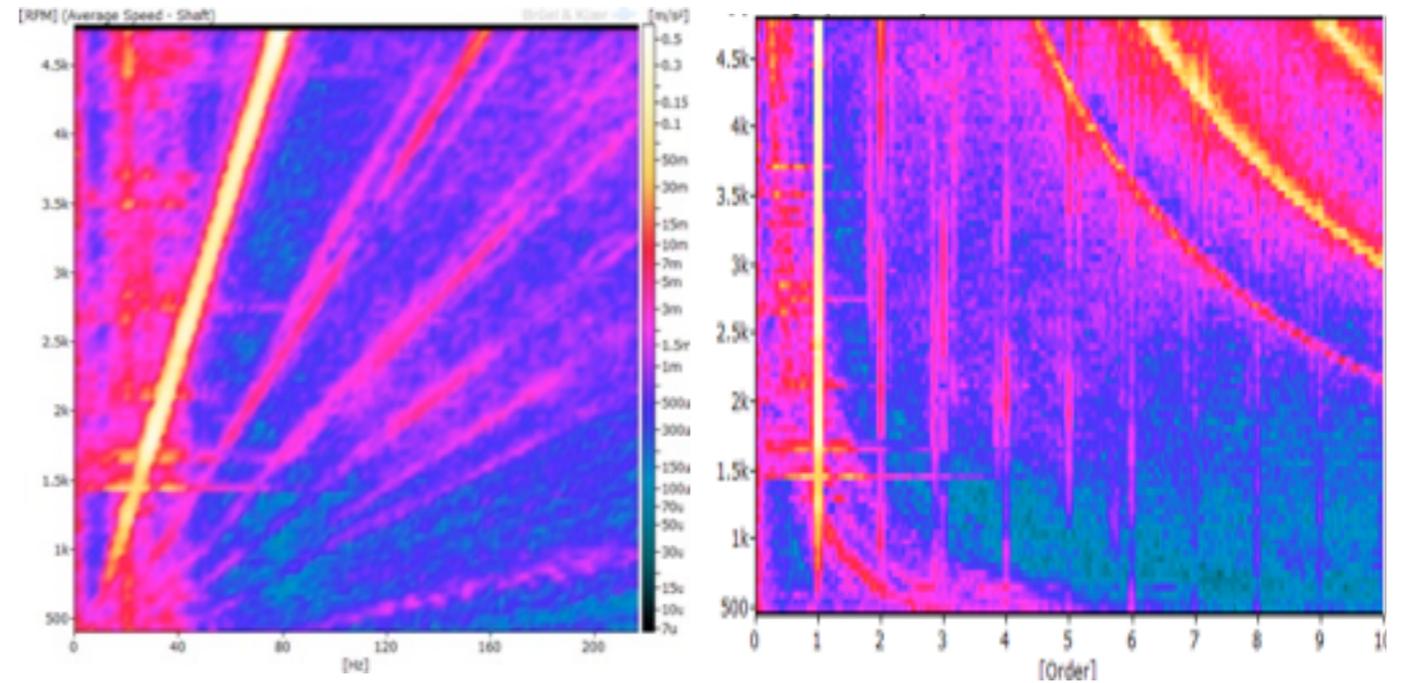
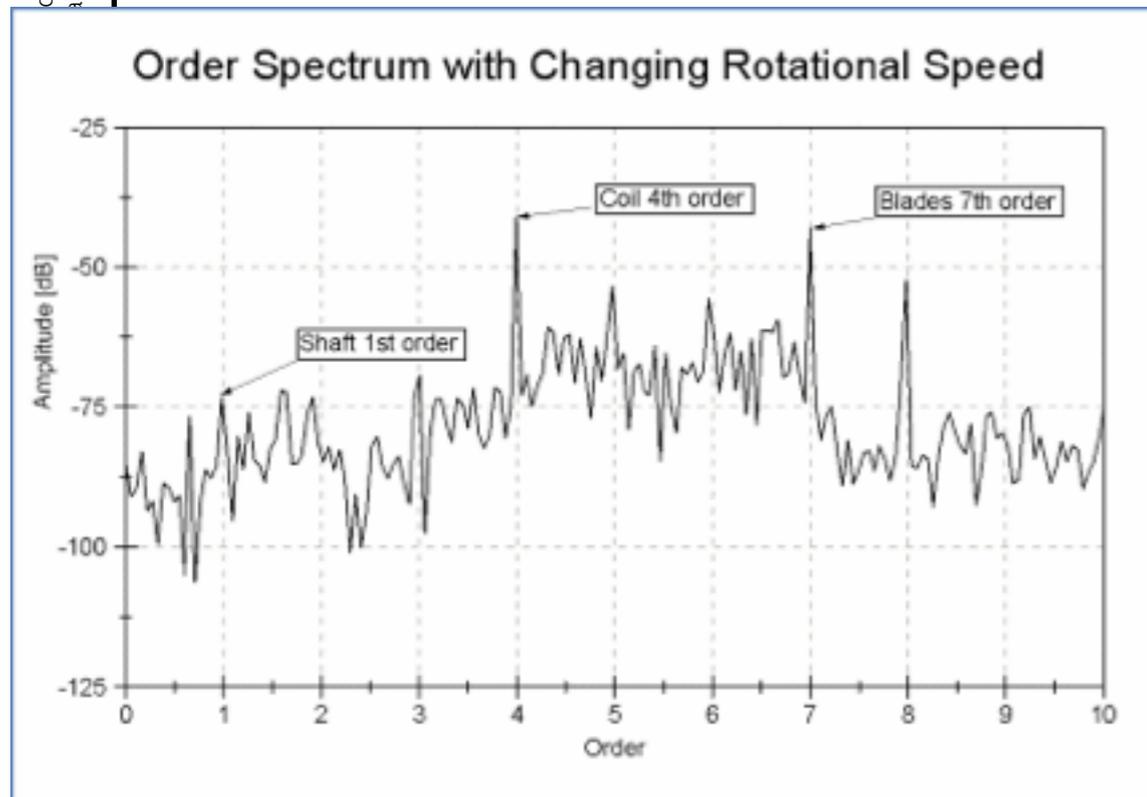
..analogamente ai sistemi lineari... si calcolano anche le risposte forzate!!

# Macchinario rotante - analisi agli ordini

Le macchine rotanti hanno generalmente due modalità di funzionamento:  
 a regime costante (es. alternatore / turbina produzione elettricità)  
 a regime variabile (es. motore autoveicolo)..

..in entrambi i casi è interessante tracciare l'andamento nel tempo il livello (RMS) delle componenti armoniche delle forze che agiscono su queste..  
 (le vibrazioni che si generano e che bisogna controllare dipendono da queste forze!)

..effettuando l'analisi agli ordini!  
 (ricordiamo il legame tra il regime di funzionamento e le risonanze del sistema)



# Macchinario rotante - analisi agli ordini

Un ordine è un fenomeno che si presenta un certo numero di volte all'interno di un giro completo del rotore..

ad esempio..

lo squilibrio avrà un periodicità 1x

l'eccitazione delle palette una periodicità 7x

l'eccitazione elettrica una periodicità 4x

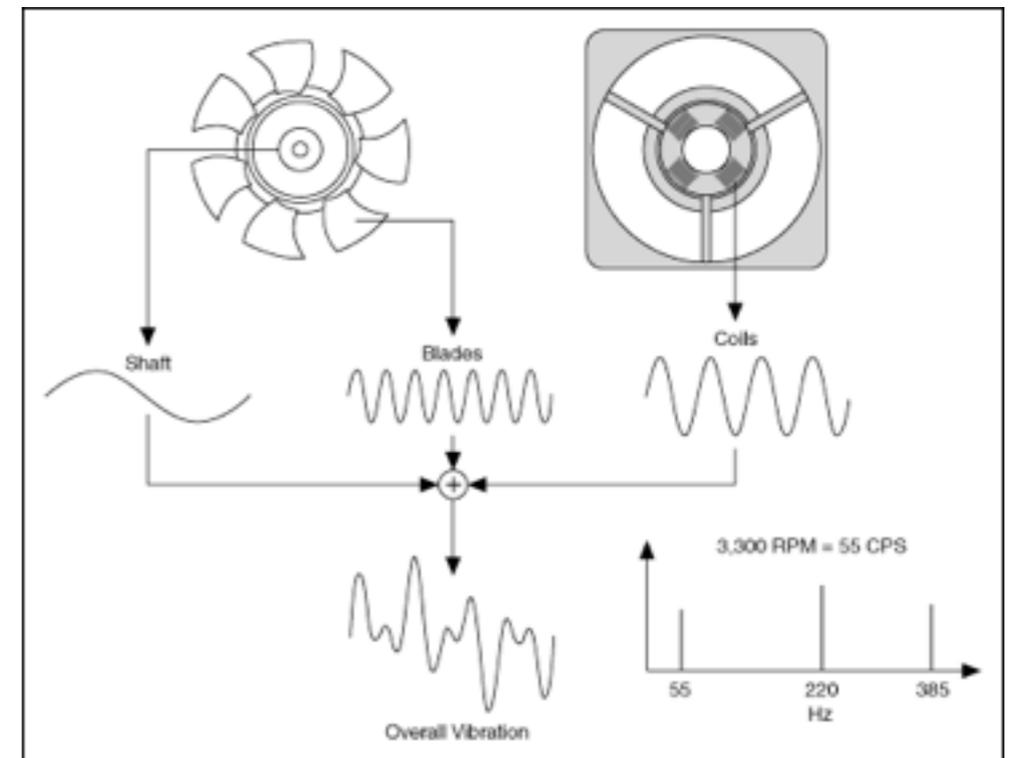
...indipendentemente dalla velocità di rotazione del ventilatore!

indipendentemente dalle risonanze del sistema!

**NB** gli ordini possono non essere numeri interi!

rapporto di trasmissione 1:2.3

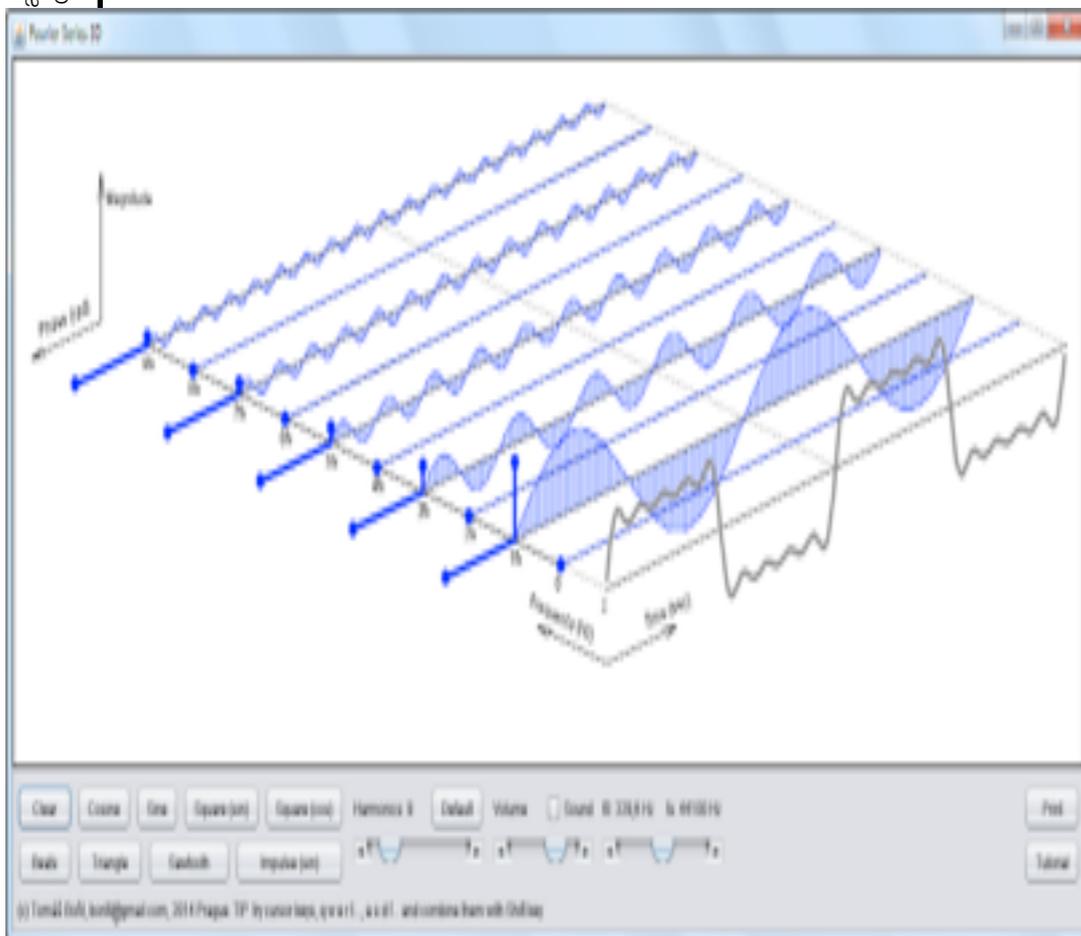
ci saranno gli ordini x2.3 x4.6 x6.9...



# Macchinario rotante - analisi agli ordini

Solitamente il segnale vibrazione misurato su una macchina, viene campionato a brevi intervalli di tempo equispaziati per fare l'analisi di Fourier e trovarne lo spettro in frequenza..(..more on this later on..)

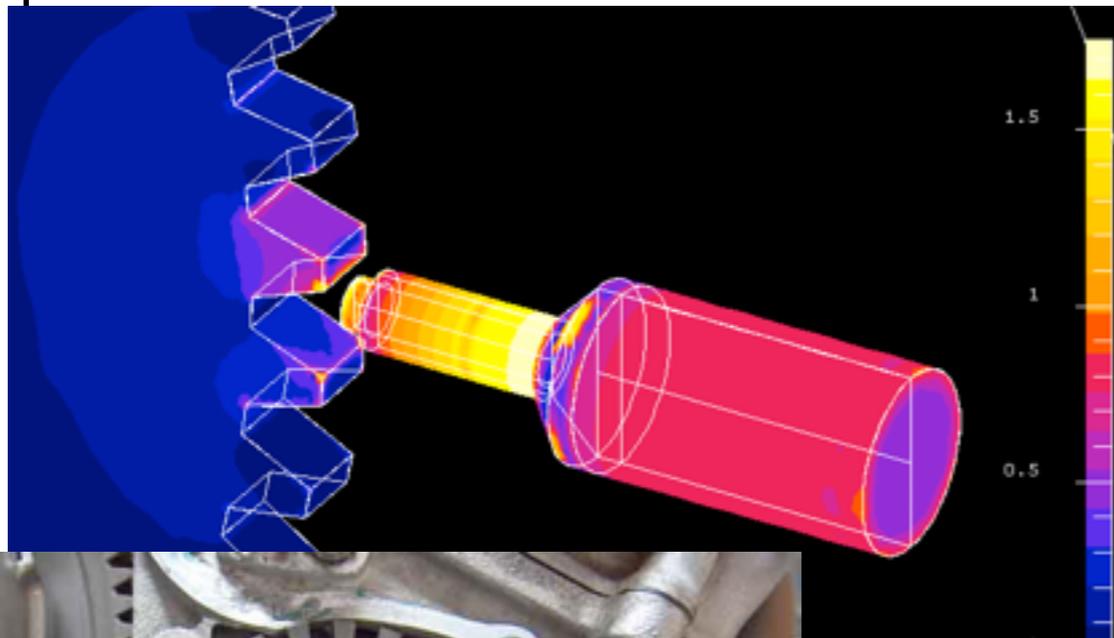
Se la velocità della macchina è variabile il contenuto in frequenza del segnale cambia..(cambia lo spettro)  
e contemporaneamente cambia anche il numero di campioni per rotazione del rotore..(cambia la risoluzione)



Si vuole misurare la velocità istantanea del rotore (tachimetrica)  
e si vuole eliminare l'influenza delle variazioni di velocità  
(ricampionamento nel dominio dell'angolo)

# Macchinario rotante - analisi agli ordini

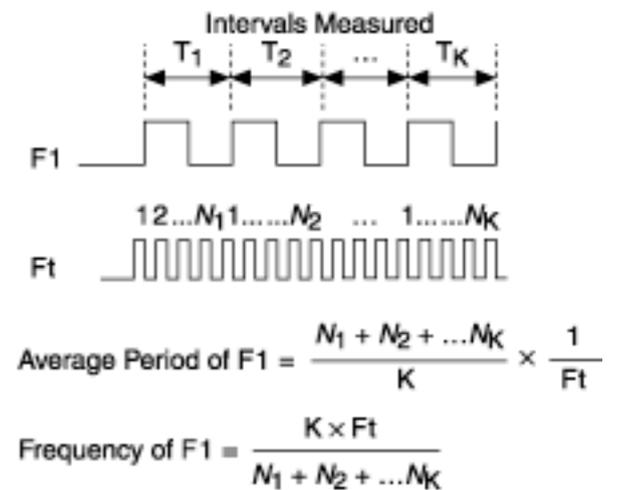
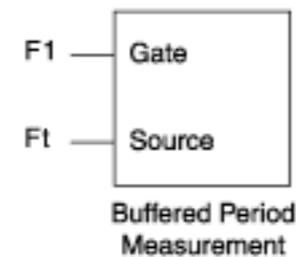
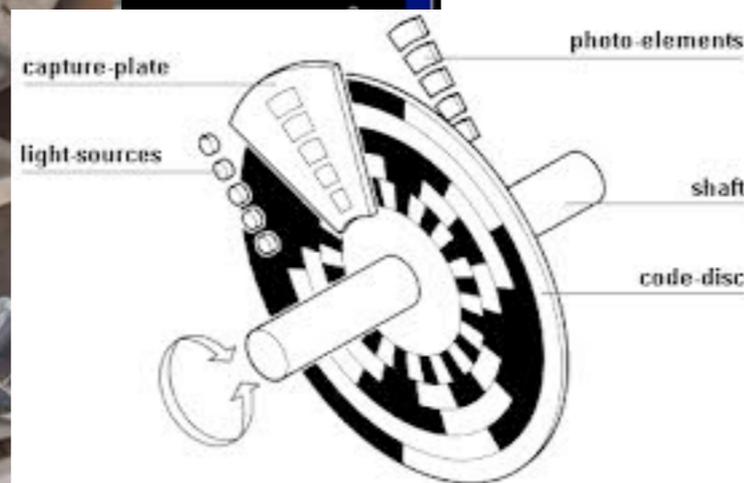
Tachimetrica: si misura l'intervallo di tempo tra due impulsi successivi di un trasduttore



Sensori Induttivi, Capacitivi, Ottici, Counter...

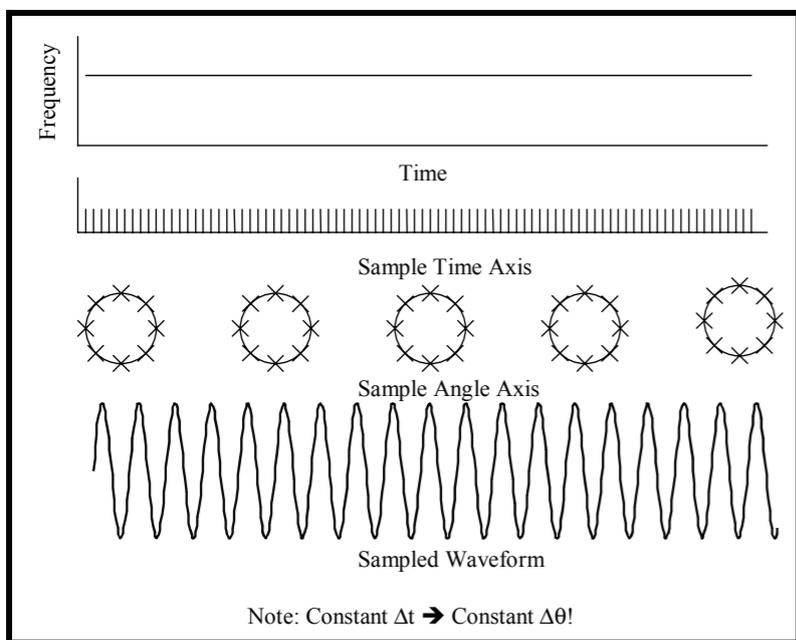
$$v_r(t) = \frac{60}{N_p (t_2 - t_1)}$$

$N_p$  numero di impulsi per giro

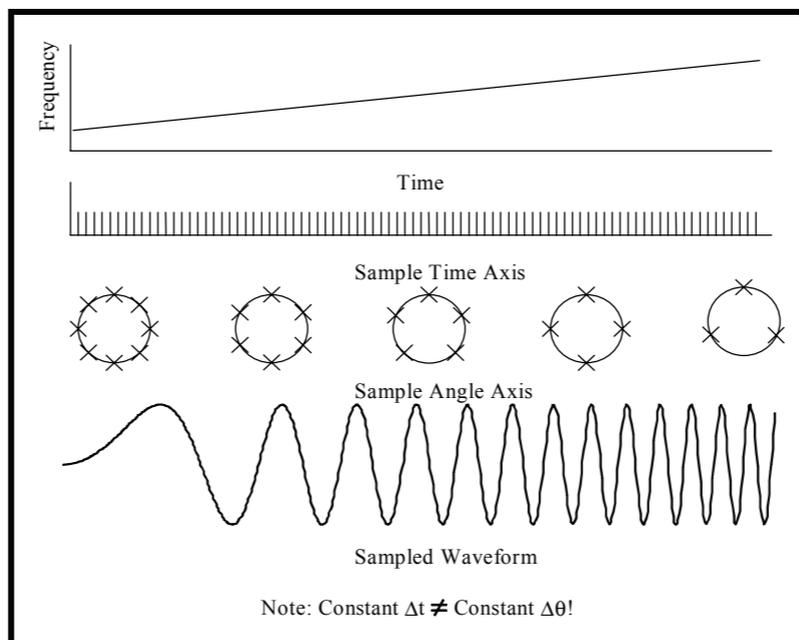


# Macchinario rotante - analisi agli ordini

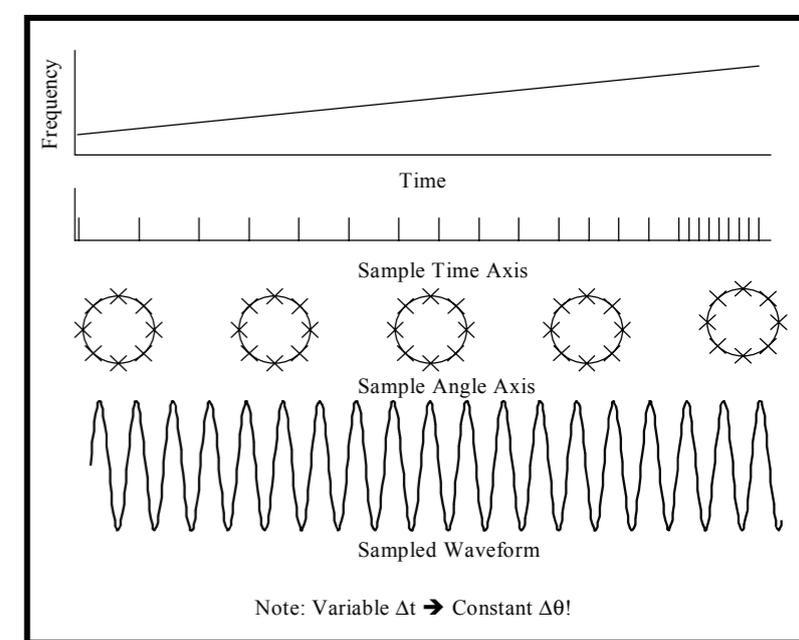
Ricampionamento nel dominio dell'angolo: si fa in modo che in un giro, indipendentemente dalla sua durata di questo ci siano N campioni  $\Delta t \rightarrow \Delta \theta$



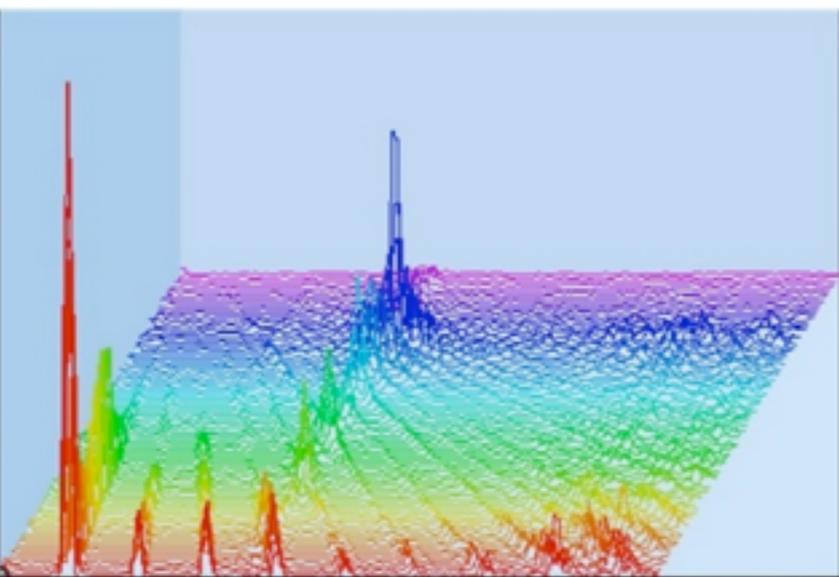
RPM costante tempo



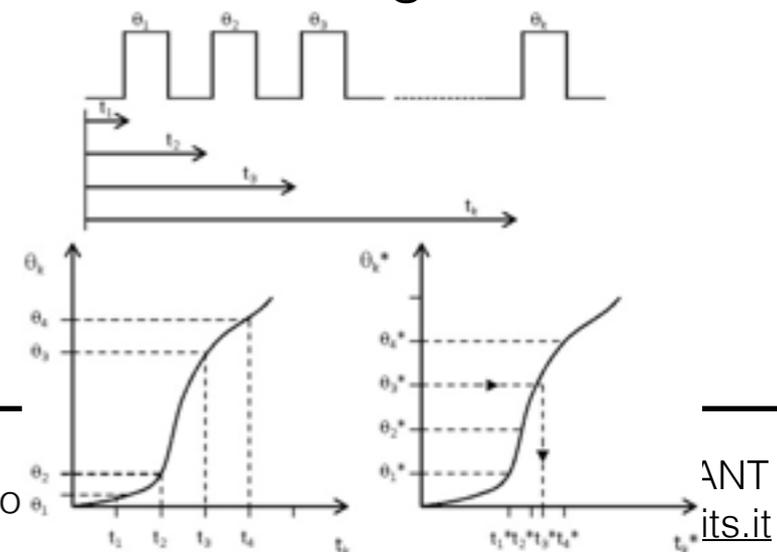
RPM variabile tempo



RPM variabile angolo

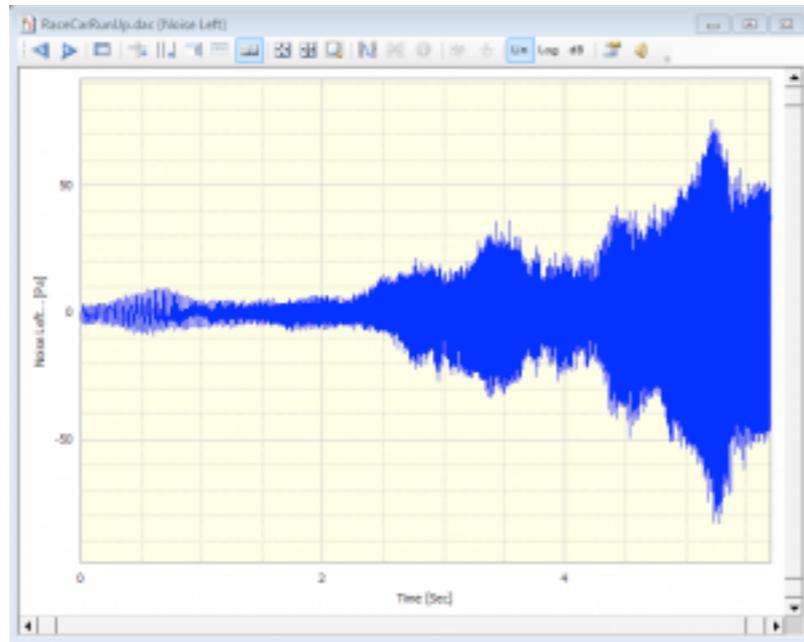


..interpolazione dei segnali accelerometrici..

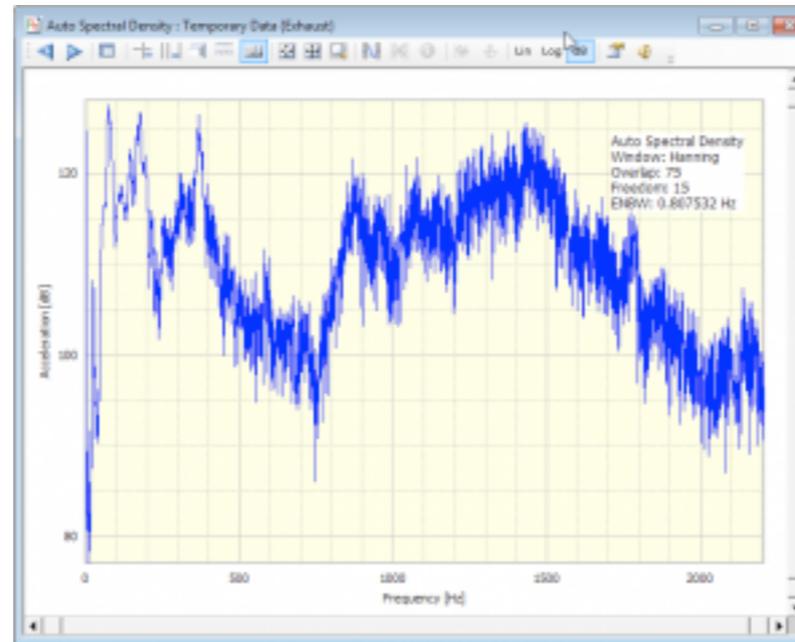


# Macchinario rotante - analisi agli ordini

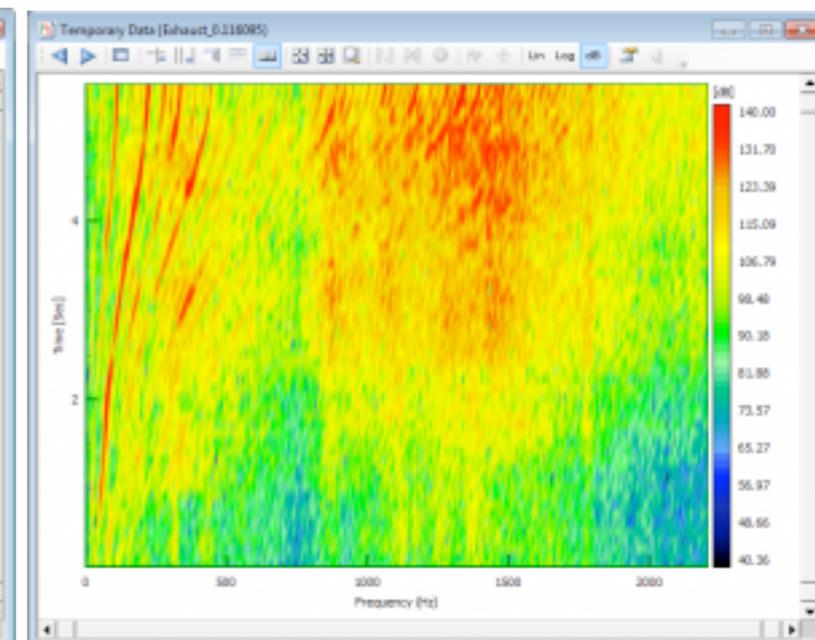
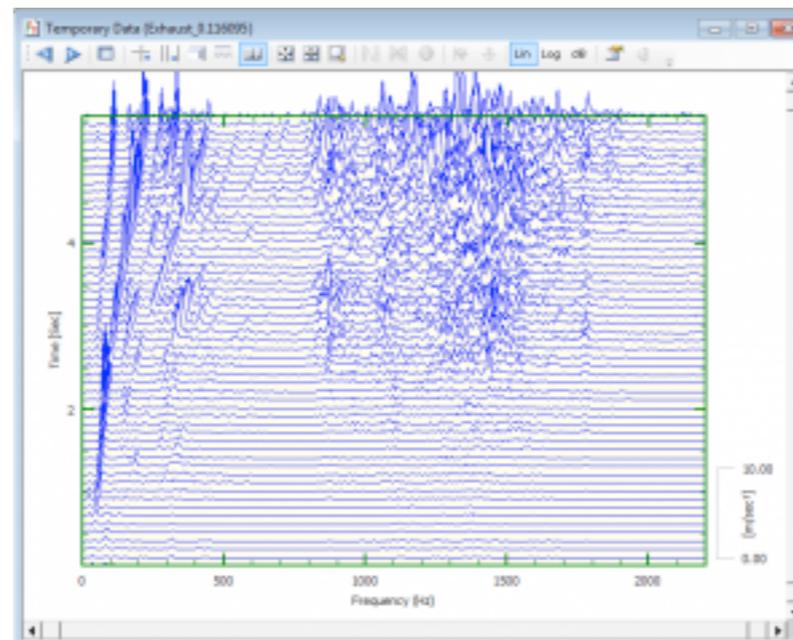
Segnale nel tempo..  
run up di un macchinario



Segnale in frequenza..  
diversi contributi in frequenza... spettro rumoroso

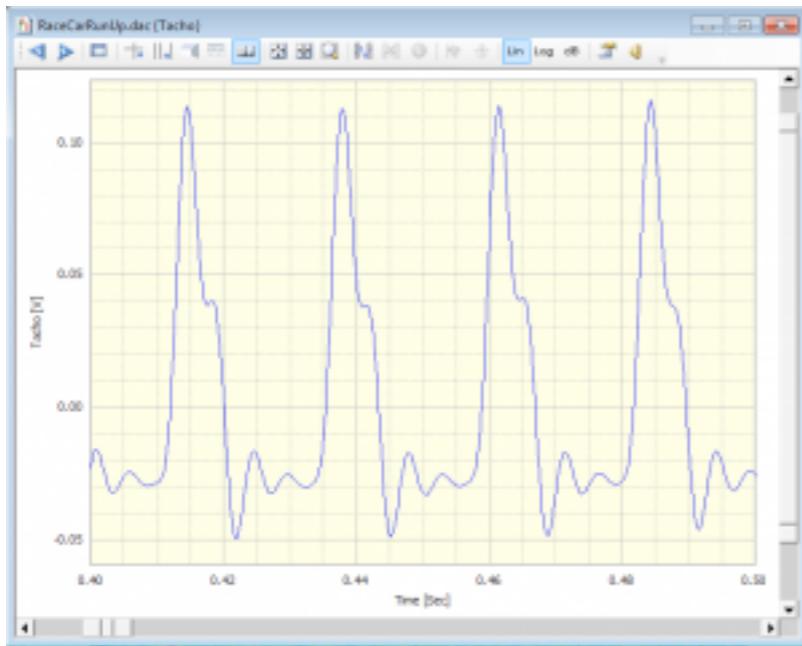


Segnale in frequenza..  
(STFT)  
al variare di RPM varia  
il contenuto spettrale

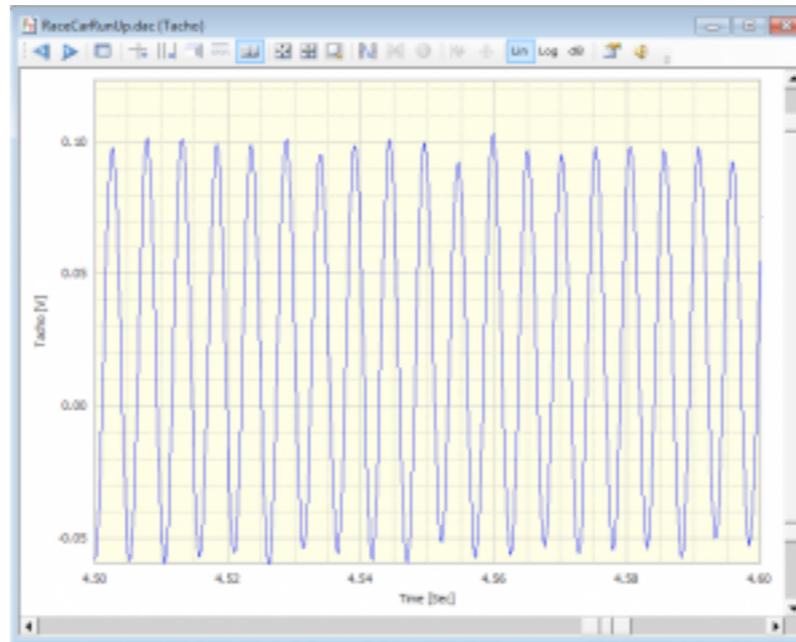


# Macchinario rotante - analisi agli ordini

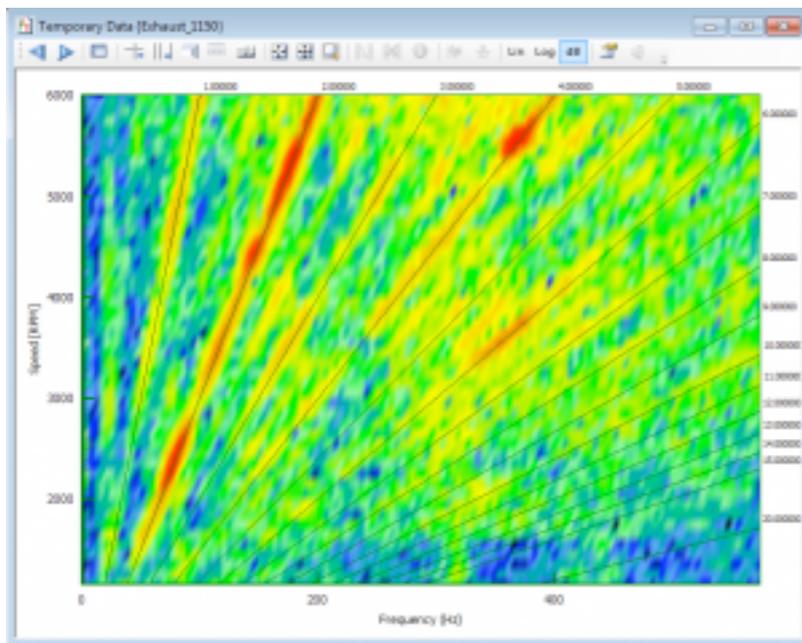
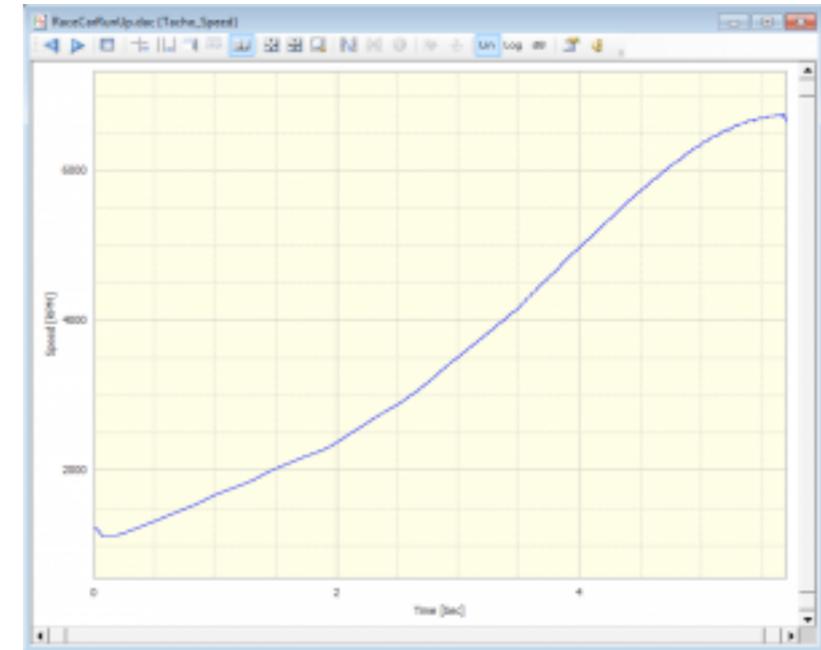
Tachimetrica a bassa velocità



Tachimetrica a alta velocità



Profilo di velocità



Nello spettrogramma si vede cambiare frequenza e ampiezza dell'ordine in funzione della velocità

