LEZIONE 13-14

Equilibrio radiale nelle macchine assiali

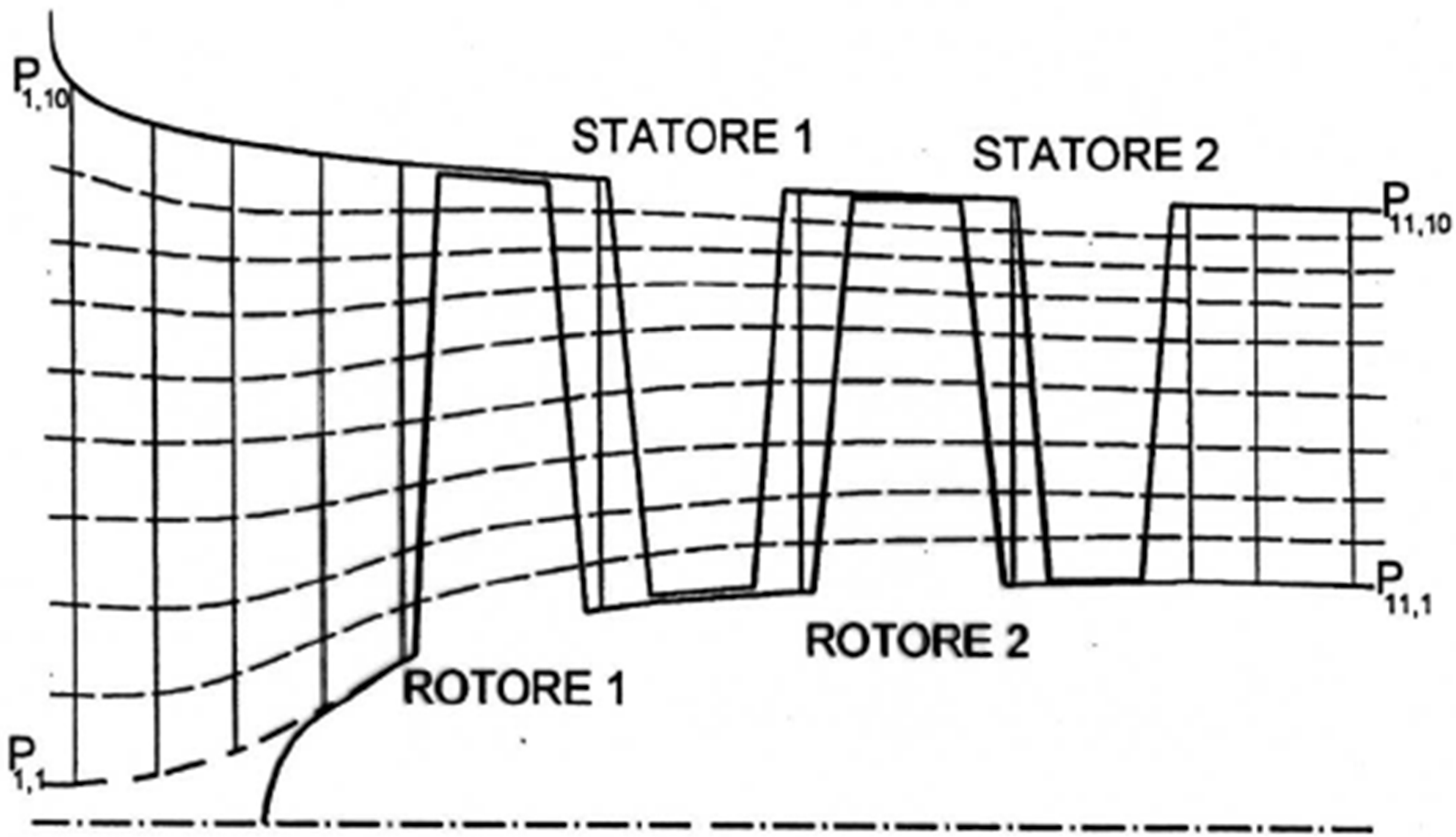
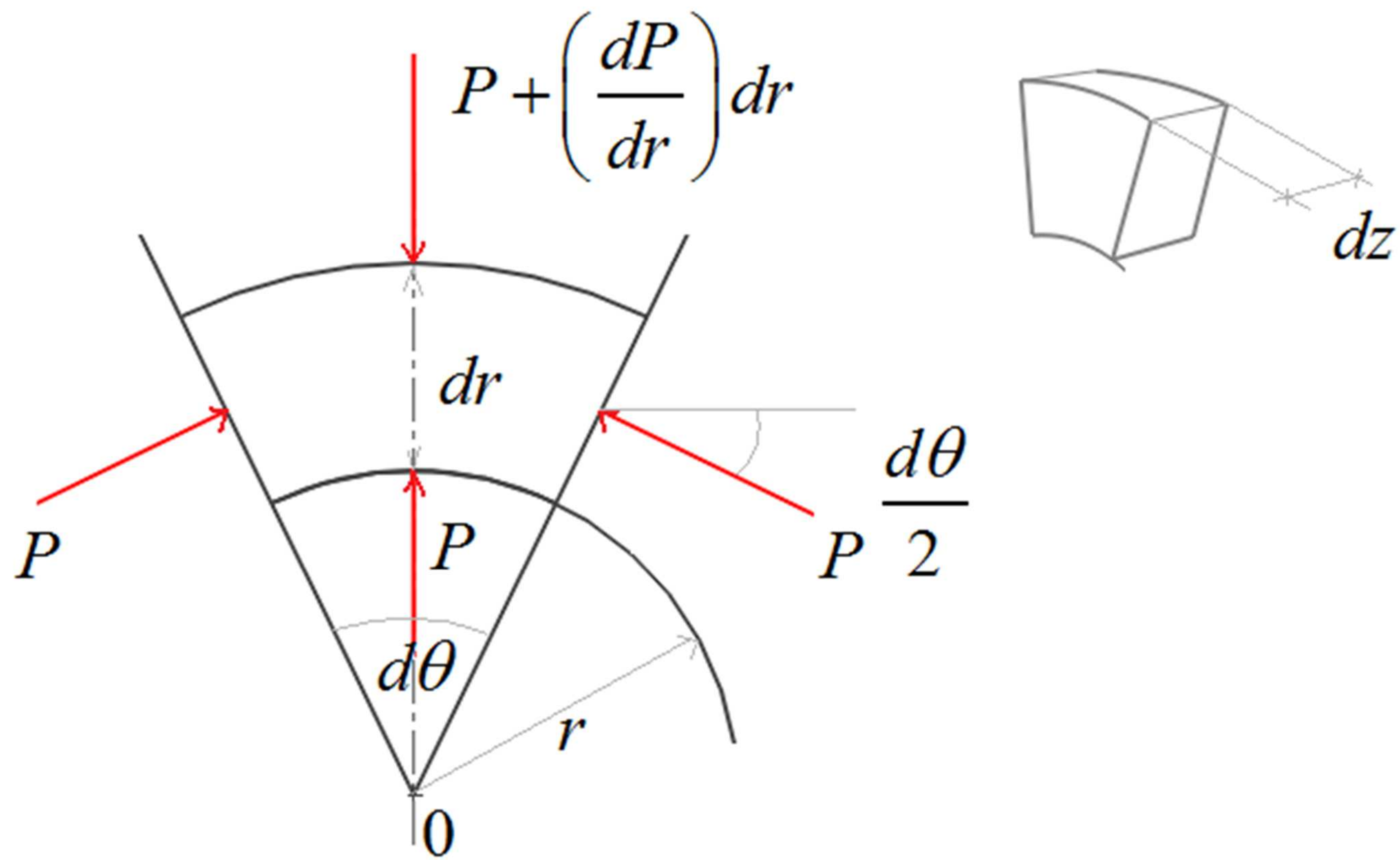
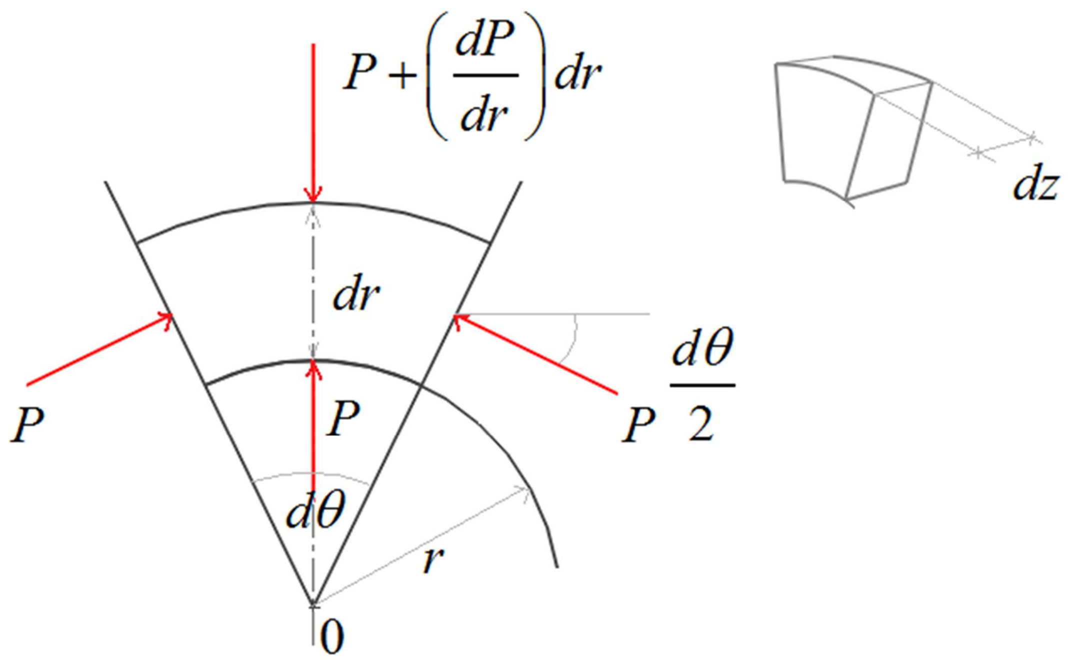


Figura 5.31: *Reticolo di calcolo quasi-3D per un compressore assiale bistadio*

Equilibrio radiale nelle macchine assiali



Equilibrio radiale nelle macchine assiali



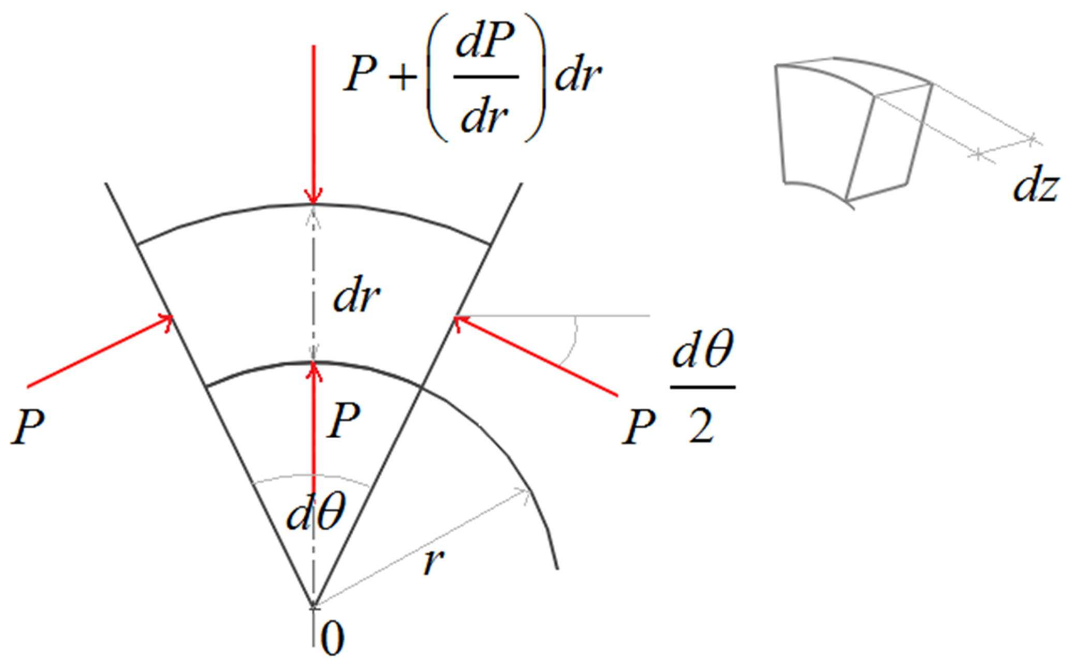
$$\left(p+\frac{dp}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta dz - prd\theta dz - 2pdrdzsen\frac{d\theta}{2} =$$

trascurando i termini di ordine superiore e considerando:

$$sen\frac{d\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2}$$

$$= r\frac{dp}{dr}drd\theta dz$$

Equilibrio radiale nelle macchine assiali



Forza centrifuga sull'elemento:

$$\rho r d\theta dr dz \cdot \frac{V_t^2}{r}$$

Da cui:

$$\rho r d\theta dr dz \cdot \frac{V_t^2}{r} = r \frac{dp}{dr} dr d\theta dz \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{V_t^2}{r} \qquad \boxed{1}$$

Equilibrio radiale nelle macchine assiali

Entalpia di Ristagno:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = h + \frac{1}{2}\left(V_t^2 + V_a^2\right)$$

Flusso cilindrico:

$$V_r = 0$$

Da cui differenziando lungo il raggio:

$$\frac{dh_0}{dr} = \frac{dh}{dr} + V_t \frac{dV_t}{dr} + V_a \frac{dV_a}{dr} \qquad \boxed{2}$$

Equilibrio radiale nelle macchine assiali

per il 1 principio:

$$T\,ds = dh - \frac{1}{\rho}dp$$

Da cui differenziando lungo il raggio:

$$\frac{dh_0}{dr} = \frac{dh}{dr} + V_t\frac{dV_t}{dr} + V_a\frac{dV_a}{dr} \qquad \boxed{2}$$

$$\frac{dh_0}{dr} = \underbrace{T\frac{ds}{dr} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}}_{\frac{dh}{dr}} + V_t\frac{dV_t}{dr} + V_a\frac{dV_a}{dr}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{V_t^2}{r} \qquad \boxed{1}$$

$$\frac{dh_0}{dr} = T\frac{ds}{dr} + \frac{V_t^2}{r} + V_t\frac{dV_t}{dr} + V_a\frac{dV_a}{dr}$$

Equilibrio radiale nelle macchine assiali

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

Equilibrio radiale nelle macchine assiali

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

Con questa equazione possiamo affrontare due problemi tipici:

1) *Problema "diretto" (o problema di verifica)* : nota la geometria di una macchina e la distribuzione radiale dell'angolo α determinare la distribuzione radiale di tutte le grandezze del flusso e termodinamiche;

2) *Problema "inverso" (o problema di progetto)* : assegnata una certa distribuzione di una grandezza fluidodinamica o termodinamica trovare qual'è la geometria della schiera che la realizza.

Equilibrio radiale nelle macchine assiali

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$\dfrac{dh_0}{dr}=0$ Impone h_0 costante lungo il raggio

$\dfrac{ds}{dr}=0$ Impone dissipazione costante lungo il raggio

Equilibrio radiale nelle macchine assiali

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$$V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right) = 0 = \frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr}$$

$$V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right) = 0$$

Vortice Libero

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$$\boxed{\left(V_t \cdot r\right) = \text{cost}} \rightarrow V_t \cdot r = V_{ti} \cdot r_i$$

$$\rightarrow \boxed{V_a = \text{cost}}$$

Vortice Libero

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$$h_0 = \cos t$$

$$h + \frac{V^2}{2} = h_i + \frac{V_i^2}{2}$$

$$h = h_i + \frac{V_i^2 - V^2}{2}$$

$$\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{1}{2h_i}\left(V_{ti}^2 - V_t^2 + \cancel{V_a^2} - \cancel{V_a^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{V_{ti}^2}{2h_i}\left(1 - \frac{V_t^2}{V_{ti}^2}\right)$$

Vortice Libero

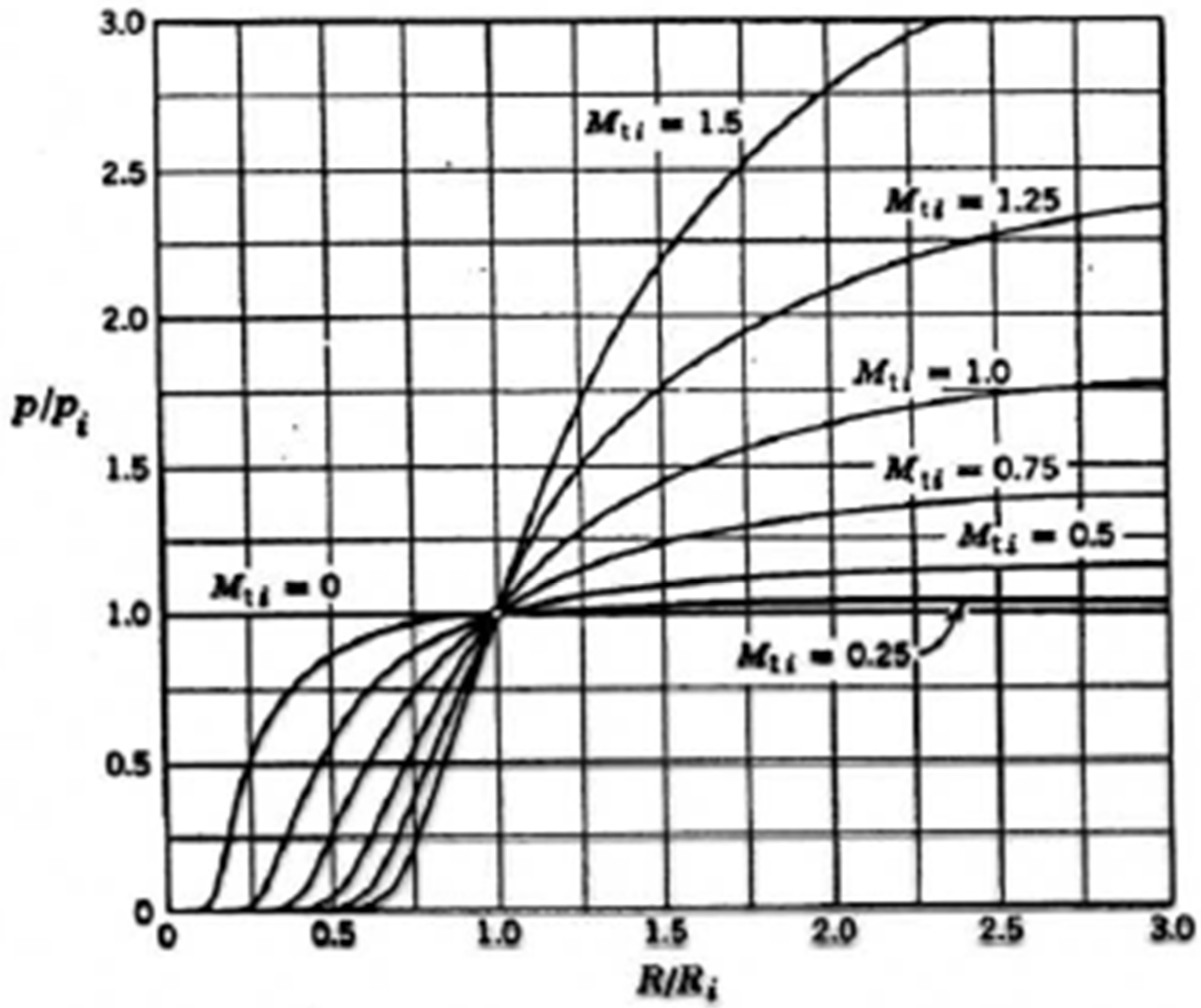
$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$$V_t \cdot r = V_{ti} \cdot r_i \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_t}{V_{ti}} = \frac{r_i}{r}$$

$$\boxed{\frac{h}{h_i} = 1 + \frac{V_{ti}^2}{2h_i}\left(1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right)}$$

Vortice Libero



$$M_{ti} = \frac{V_{ti}}{a_i}$$

a 5.23: *Pressione in funzione del raggio per un flusso a vortice libero*

Vortice Libero

- r aumenta, p aumenta
- Mti aumenta, p aumenta
- assegnato Mti esiste un valore di r per il quale si annulla la pressione si annulla, condizione fisicamente non possibile

Vortice Forzato (moto rigido)

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$$\boxed{\frac{V_t}{r} = \mathrm{cost}}$$

$$\frac{V_t}{r} = \frac{V_{ti}}{r_i} \qquad \rightarrow \qquad V_t = V_{ti}\frac{r}{r_i}$$

Vortice Forzato (moto rigido)

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a\frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(\frac{V_a^{\,2}}{2}\right) + \frac{V_{ti}}{r_i}\frac{d}{dr}\left(\frac{V_{ti}}{r_i}r^2\right) = 0}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V_a^{\,2}}{2}\right) = -2\left(\frac{V_{ti}}{r_i}\right)^2 \cdot r$$

$$\left(\frac{V_a^{\,2}}{2}\right) = -2V_{ti}^{\,2}\left(\frac{r}{r_i}\right)^2 + C$$

Vortice Forzato (moto rigido)

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = V_a \frac{dV_a}{dr} + \frac{V_t}{r}\frac{d}{dr}\left(V_t \cdot r\right)}$$

$$\boxed{\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = 0}$$

$$V_a = V_{ai}$$

$$r = r_i$$

$$\Rightarrow C = \frac{V_{ai}^2}{2} + V_{ti}^2$$

$$\frac{V_{ti}}{V_{ai}} = tg\alpha_i$$

$$\boxed{\left(\frac{V_a}{V_{ai}}\right)^2 = 1 - 2\tan^2\alpha_i \left[\left(\frac{r}{r_i}\right)^2 - 1\right]}$$