Cenno sull'unificazione insiemistica e su una sua applicazione

Eugenio G. Omodeo

a.a. 2015/16

Consideriamo un *mini-linguaggio insiemistico* i cui costrutti sono:

costante $\emptyset$;

variabili $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ *(ad infinitum)* che spaziano sull'universo—qui dato per intuitivamente noto—di tutti gli insiemi;[1]

operatore diadico $\boxed{\bullet \ \mathsf{con} \ \bullet}$ che designa l'*aggiunta* di un elemento (operando di destra) a un'insieme (operando di sinistra);

relatore diadico $\boxed{\bullet \ = \ \bullet}$ di *uguaglianza* (il criterio di uguaglianza fra insiemi è che gli elementi devono essere gli stessi).

Utilizzando la costante, le variabili e l'operatore di aggiunta—piú le parentesi, per rendere non ambigua la lettura—, formiamo espressioni insiemistiche chiamate TERMINI. Interponendo il relatore di uguaglianza fra due termini, scriviamo un'EQUAZIONE.

In assenza di parentesi, il con andrà associato a sinistra; cosí, per esempio, il termine

$$\emptyset \ \mathsf{con} \ \emptyset \ \mathsf{con} \ \emptyset$$

designerà l'insieme $\{\emptyset\}$, <u>non</u> l'insieme $\{\{\emptyset\}\}$.

Esercizio 1. Dimostrare che è falsa l'uguaglianza

$$\emptyset \ \mathsf{con} \ \emptyset \ \mathsf{con} \ \emptyset \quad = \quad \emptyset \ \mathsf{con} \ (\emptyset \ \mathsf{con} \ \emptyset) \quad .$$

Esercizio 2. È risolubile l'equazione $\mathsf{X}_1 = \emptyset \ \mathsf{con} \ \mathsf{X}_1$?

[1] Si tratta di insiemi annidati, per formare i quali non è indispensabile l'impiego di 'ur-elementi').

Abbreviazioni:

Portiamo la consueta notazione utilizzante le graffe all'interno del nostro linguaggio artificiale, come espediente abbreviativo:

$$\begin{array}{rcl} \{\, s_{n+1}, s_n, \ldots, s_1 \mid s_0 \,\} & =_{\text{Def}} & s_0 \ \mathsf{con}\ s_1 \ \mathsf{con}\ \cdots \ \mathsf{con}\ s_{n+1}\ ; \\ \{\, s_n, \ldots, s_1 \,\} & =_{\text{Def}} & \emptyset \ \mathsf{con}\ s_1 \ \mathsf{con}\ \cdots \ \mathsf{con}\ s_n\ . \end{array}$$

Esercizio 3. Consideriamo un sistema (congiuntivo) di equaz. insiemistiche

$$\begin{cases} s_0 & = & d_0\ , \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_m & = & d_m\ , \end{cases}$$

dove $s_0, \ldots, s_m$ e $d_0, \ldots, d_m$ sono termini del nostro linguaggio. È possibile condensare tale sistema in una singola equazione?

1 Unificazione insiemistica

Il problema di stabilire se un sistema di equazioni insiemistiche abbia o no soluzione è stato affermativamente risolto nel 1990 da Agostino Dovier ed Enrico Pontelli; ma sarà vero che quando un sistema ammette soluzione, ne ammette sempre una di *massima generalità possibile*?

Esercizio 4. Risolvere l'equazione

$$\{\, \mathsf{X}_1\,,\ \mathsf{X}_2 \,\} \;=\; \{\, \emptyset\,,\ \mathsf{X}_2\,,\ \mathsf{X}_1 \,\}\,,$$

indicando anche una soluzione di minima generalità possibile.

Esercizio 6. Modellare il rompicapo noto come 'Peg solitaire' (vedi figura ed `https://en.wikipedia.org/wiki/Peg_solitaire`) come un'equazione insiemistica.

2 Da CNF-SAT all'unificazione insiemistica

Consideriamo un'istanza del problema di stabilire se un enunciato della logica proposizionale dato in forma normale <u>con</u>giuntiva,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j} \ ,$$

sia soddisfacibile o meno.

Questa può venir riscritta come un'istanza del nostro problema di unificazione, come segue.

Cominciamo col considerare le lettere proposizionali distinte $q_1, \ldots, q_\kappa$ che figurano nell'enunciato; a ognuna di queste q_h associamo due variabili insiemistiche P_h, N_h, scegliendo $P_1, \ldots, P_\kappa, N_1, \ldots, N_\kappa$ a due a due distinte.

Poniamo

$$L_{ij} \quad = \quad \begin{cases} P_h & \text{quando} \quad \ell_{ij} = \ \ q_h \ , \\ N_h & \text{quando} \quad \ell_{ij} = \neg q_h \ . \end{cases}$$

Traduciamo l'enunciato nell'equazione

$$\begin{aligned} \Big\{ & \{ \emptyset \, , \ L_{1,1} \ldots , L_{1,m_1} \} \, , \\ & \qquad\quad \cdots \\ & \{ \emptyset \, , \ L_{n,1} \ldots , L_{n,m_m} \} \, , \\ & \{ P_1 \, , \ N_1 \} , \ldots , \{ P_\kappa \, , \ N_\kappa \} \Big\} \quad = \quad \Big\{ \{ \emptyset \, , \, \{ \emptyset \} \} \Big\} \, . \end{aligned}$$

Esercizio 6. Mostrare che l'enunciato $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}$ con cui siamo partiti è soddisfacibile se e solo se l'eq. insiemistica in cui lo abbiamo tradotto ha soluzione.