Come istituire una biiezione 'effettiva' fra le sequenze di parole (dell'alfabeto proposizionale) e i numeri naturali

Eugenio G. Omodeo

a.a. 2015/16

Cominciamo con porre gli elementi dell'*alfabeto proposizionale* in corrispondenza con gli interi positivi:

$$\underset{1}{(}\ ,\quad \underset{2}{)}\ ,\quad \underset{3}{\to}\ ,\quad \underset{4}{\mathsf{p}_0}\ ,\quad \underset{5}{\mathsf{p}_1}\ ,\quad \underset{6}{\mathsf{p}_2}\ ,\quad \underset{7}{\mathsf{p}_3}\ ,\quad \ldots$$

e associamo al numero 0 un simbolo 'fuori alfabeto': lo *spazio vuoto*.

Per il teorema fondamentale dell'aritmetica, dato un qualsiasi numero naturale d, possiamo scomporre il successivo $d+1$ cosí:

$$d+1 \;=\; \textstyle\prod_{i=1}^{k_d} p_i^{m_i}\,,$$

dove

$$p_1\,,\quad p_2\,,\quad p_3\,,\quad p_4\,,\quad p_5\,,\quad p_6\,,\quad \ldots$$

è la successione $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ dei numeri *primi* disposti in ordine crescente e dove $m_{k_d} \neq 0$ vale quando $k_d \neq 0$. Pertanto in d possiamo 'leggere' una sequenza

$$w_0\,,\quad \ldots\,,\quad w_{\ell_d}$$

di parole w sull'alfabeto proposizionale, intercalate da singoli spazi vuoti.

A partire dalla scomposizione univoca di $d+1$ descritta sopra, possiamo ottenerne infinite, una per ogni numero naturale h:

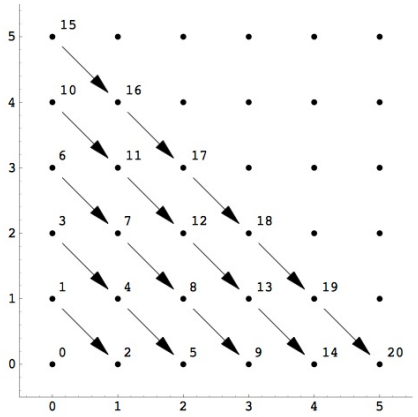
$$d+1 \;=\; \textstyle\prod_{i=1}^{k_d+h} p_i^{m_i}\,,\quad \text{semplicemente ponendo } m_{k_d+1} = \cdots = m_{k_d+h} = 0.$$

Ciò rappresenta l'inserimento di h parole vuote dopo w_{ℓ_d}.

All'inverso, qualsiasi sequenza W di parole è individuata da quell'unica coppia $\langle d, h\rangle$ in cui possiamo leggere W nel modo accennato sopra.

A questo punto abbiamo istituito una corrispondenza biunivoca fra le sequenze di parole e le coppie di numeri naturali; a sua volta, ogni coppia di naturali può essere codificata con un naturale singolo tramite la corrispondenza di Cantor (vedi figura):

$$\langle d, h\rangle \quad \mapsto \quad \frac{(d+h)^2 + 3\,d + h}{2}\,.$$



Ora posso proporvi un nuovo esercizio dello stesso tipo, ma piú impegnativo: Ideare un procedimento che controlli *che* $A \vdash \vartheta$ vale nella logica proposizionale standard $\mathbb{P}$, e che fornisca come certificazione una catena di passaggi d'inferenza che porti dalle premesse A alla conclusione ϑ. Notate il '*che*': non vi sto chiedendo che il procedimento stabilisca 'se $A \vdash \vartheta$ valga o meno'. Quindi, nel caso che $A \nvdash \vartheta$, il procedimento può dilungarsi all'infinito.

'standard'?

Quanto ad A , potete assumere che sia un insieme finito dato esplicitamente o, piú in generale, che per ogni enunciato α si possa stabilire, tramite apposito algoritmo "***decisore***", se α appartenga o meno ad A. Sotto l'ipotesi piú generale, A potrebbe anche essere infinito.

Come controllare *che* $A \vdash \vartheta$ nella logica $\mathbb{P}$

Soluzione dell'esercizio. Consideriamo un insieme $A \subseteq \mathcal{P}$ tale che per ogni enunciato α si possa stabilire, tramite apposito algoritmo, se α appartenga o

meno ad A (un esempio scontato è $A = \emptyset$). Sia dato inoltre un enunciato ϑ.

Ecco come si può controllare—purché ciò corrisponda al vero—che, ai sensi della nozione di DIMOSTRABILITÀ della logica $\mathbb{P}$, vale

$$A \vdash \vartheta \ .$$

Per $d = 1, 2, 3, 4, \ldots$

- si ottenga da d la corrispondente sequenza $w_0, \ldots, w_{\ell_d}$ di parole sull'alfabeto proposizionale (cone w_{ℓ_d} non vuota);
- si accerti che ciascuna di tali parole appartenga a $\mathcal{P}$ e, in caso contrario, si passi subito al d successivo; altrimenti
- si accerti se l'ultima di tali parole soddisfi l'identità

  $$w_{\ell_d} = \vartheta$$

  e, se cosí non è, si passi subito al d successivo; altrimenti
- si accerti che per ciascuna w_j vale almeno una delle tre condizioni:
  - w_j appartiene ad A,
  - w_j ricade in uno schema d'assioma logico,
  - w_j risulta da due passi w_h, w_k tali che $h < j$ e $k < j$, tramite *modus ponens*;

  se qualche w_j viola tutte e tre queste condizioni, si passi al d successivo; altrimenti
- arrivando qui, siamo sicuri che tutti i controlli hanno avuto successo; dunque interrompiamo il ciclo segnalando che $A \vdash \vartheta$ in $\mathbb{P}$.

e la 'certificazione' dov'è?

Si osservi che il metodo appena visto non è in grado di *decidere* ma solo di *semi-decidere*. Dunque la sua prestazione è incomparabilmente peggiore, per lo meno quando A è un insieme finito, di quella di un metodo SEMANTICO, che invece delle dimostrazioni consideri direttamente gli assegnamenti di valore di verità, per accertare se $A \models \vartheta$ valga *o meno*. (E quando A è infinito? Viene comunque in aiuto la compattezza; ma anche la semantica può condurci, in questo caso, a un procedimento perpetuo...).