UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche "Bruno de Finetti"

Statistica

Probabilità elementari

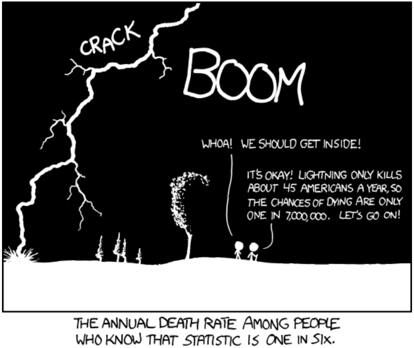
Francesco Pauli

A.A. 2016/2017

Perché difficile?

Studi psicologici hanno mostrato che, mediamente, la nostra intuizione si inganna facilmente quando ragioniamo su problemi che riguardano la probabilità o la statistica.

- La prima intuizione è spesso scorretta.
- È difficile convincersi che l'intuizione è sbagliata: ciò richiede uno sforzo logico-matematico.
- (E occorre conoscere la matematica che serve.)

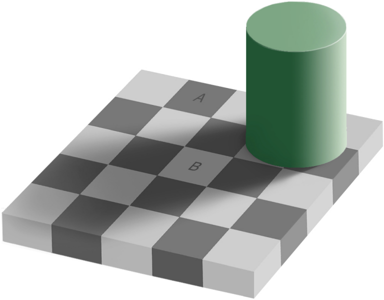


www.xkcd.com

Ci si mette al riparo dagli inganni?

Cioè, studiando probabilità e statistica si diventa immuni dall'intuizione?

- Probabilmente no!
- È un po' come avviene per le illusioni ottiche: anche quando ci viene detto che i quadrati A e B hanno lo stesso colore, continuiamo a vederli di colore diverso.
- L'intuizione e potente.

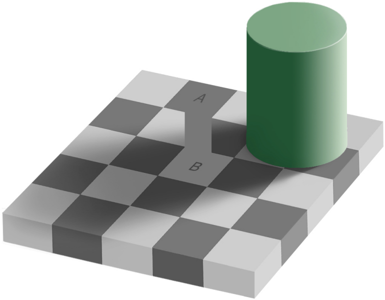


Saremo in grado, però, di capire quando la situazione è ingannevole.

Ci si mette al riparo dagli inganni?

Cioè, studiando probabilità e statistica si diventa immuni dall'intuizione?

- Probabilmente no!
- È un po' come avviene per le illusioni ottiche: anche quando ci viene detto che i quadrati A e B hanno lo stesso colore, continuiamo a vederli di colore diverso.
- L'intuizione e potente.



Saremo in grado, però, di capire quando la situazione è ingannevole.

Indice

Storia della probabilità

Lo sviluppo della matematica è molto antico

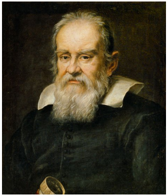
- Il primo sistema di numerazione posizionale (babilonese) risale a ~ 3000AC
- Elementi di Euclide ~ 300AC;
- numeri arabi: $\sim 100 - 400$DC

E la probabilità?

- L'incertezza era rilevante (già) allora, i numerosi oracoli a disposizione lo provano.
- Anche il gioco d'azzardo era un passatempo comune.
- Eppure, nessuno sviluppa il calcolo delle probabilità,
- anzi, era comune sbagliare, ad esempio le vincite comunemente pagate tra giocatori di astragalo (antenato del dado) non erano coerenti, il risultato maggiormente premiato non era il meno probabile.

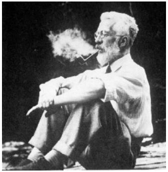
La culla della probabilità

- Il calcolo delle probabilità muove i primi passi nel XVI secolo sulla spinta della necessità.
- In particolare, la necessità di migliori strategie nel gioco dei dadi.
  - Cardano (1501) sbarca il lunario giocando a dadi, viene pubblicato postumo il *Liber de ludo aleae*, sulle strategie nel gioco d'azzardo (baro compreso).
  - Galillei (1583) su richiesta del Granduca di Toscana, scrive sulla probabilità nel gioco dei dadi.
  - Pascal (1654) in uno scambio epistolare con Fermat sviluppa il triangolo e l'idea di speranza matematica, il problema che si posero era come si dovesse dividere la posta in palio in un gioco qualora questo venisse interrotto.



Probabilità e scienza

- È alla fine del XVIII secolo che i metodi probabilistici cominciano a essere impiegati per scopi meno frivoli
  - teoria degli errori in fisica: Bernoulli, Laplace, De Moivre.
  - in particolare in astronomia, dove si studia il moto dei pianeti e l'errore di misura è particolarmente rilevante: Gauss 1820.
- Dal tardo XIX secolo si comincia a parlare anche di statistica
  - nelle scienze sociali con Quetelet,
  - nell'antropologia con Galton,
  - nella genetica con Fisher, che nel XX secolo sviluppa il moderno metodo statistico.



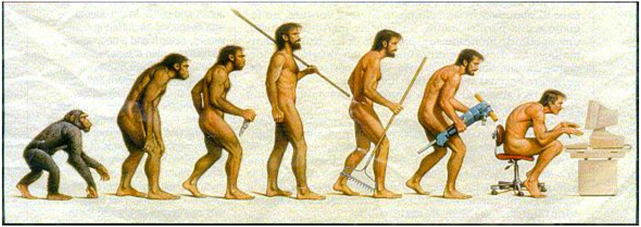
Oggi

Oggi, il calcolo delle probabilità pervade molti campi scientifici

- fisica quantistica,
- farmaceutica,
- genetica,

Inoltre, ha un ruolo in molte attività di ogni giorno

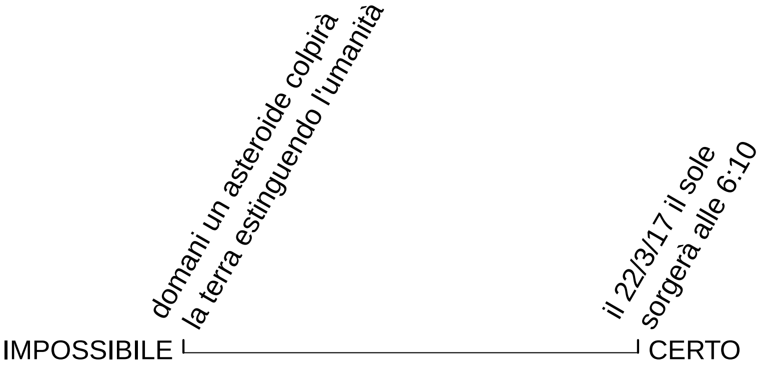
- ricerche su internet,
- previsioni del tempo,
- economia, finanza, assicurazioni.



http://www.ov-10bronco.net/users/merlin/Humor/

Probabilità, misura dell'incertezza

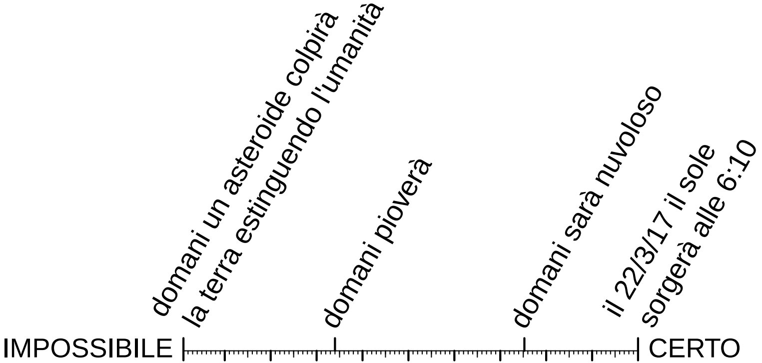
Immaginiamo una scala che va da impossibile a certo.



Gli eventi senza incertezza di solito sono banali (o eccessivamente drammatici).

Probabilità, misura dell'incertezza

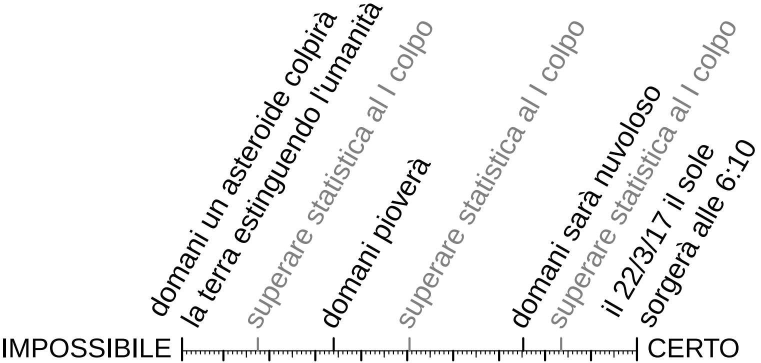
La maggior parte delle cose che ci succedono intorno sono incerte.



La maggior parte degli eventi sta nel mezzo.

Probabilità, misura dell'incertezza

La maggior parte delle cose che ci succedono intorno sono incerte.



Può essere più o meno facile graduarli.

Cos'è la probabilità

Probabilità

La probabilità di un evento è il grado di fiducia – espresso tra 0 e 1 – che un individuo ha nel verificarsi dell'evento.

Bruno De Finetti

Esempi di eventi sono

- domani piove,
- la Juventus vincerà il campionato quest'anno,
- è stato il maggiordomo (l'autore di un delitto, naturalmente).

(È un fatto che può verificarsi o meno – tertium non datur – solo che non lo sappiamo.)

Quale probabilità

- Dicendo che la probabilità è il 'grado di fiducia' abbiamo dato un'ottima definizione, che è però di scarso aiuto quando si tratta di determinare tale grado di fiducia.
- Qual è la probabilità che domani piova?
  - A occhio?
  - Piovosità media in marzo: 26%
  - OSMER
- In effetti, tutte le valutazioni vanno bene: sono opinioni, ciascuna legittima, magari qualcuna più ragionevole o più informata.

Quale probabilità (continua)

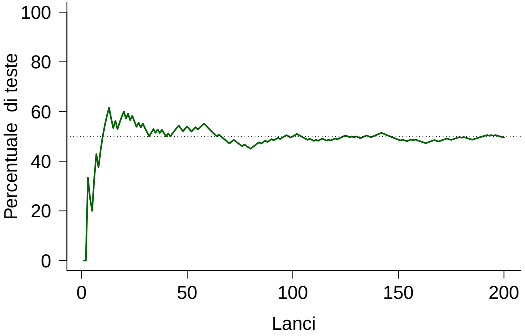
- In effetti, non si possono dare regole generali per assegnare una probabilità.
- Tale assegnazione è, in molti casi, estremamente complessa, ad esempio l'OSMER, per un evento tutto sommato banale come 'domani piove', impiega modelli meteorologici complessi e combina molte informazioni.
- Vedremo, nel seguito, dei metodi statistici per stimare una probabilità con un certo tipo di informazioni.
- Per intanto, vedremo alcuni casi in cui l'assegnazione è semplice e intuitiva.
- In tali situazioni sarà agevole capire anche alcune regole per combinare probabilità.

Interpretazione frequentista

- La probabilità non è un qualcosa di direttamente osservabile.
- Per avere un modo di determinarla, possiamo provare a legarla a qualcosa di osservabile.
- Consideriamo allora un evento come 'esce testa al lancio di una moneta'.
- Questo evento è ripetibile, nel senso che possiamo lanciare una moneta molte volte.
- Facciamolo, o immaginiamo di farlo, e calcoliamo a ciascun lancio la percentuale di teste osservate fino a quel momento.
- (In realtà, lo facciamo fare al computer.)

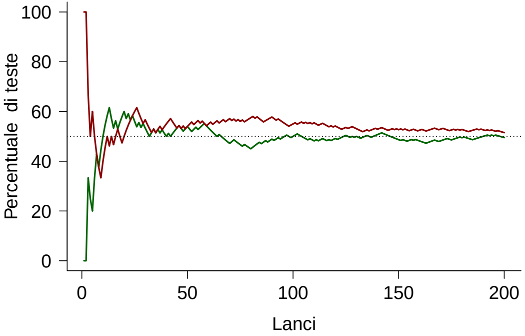
Interpretazione frequentista (continua)

Questo è il risultato con 200 lanci



Interpretazione frequentista (continua)

Facendo altri 200 lanci il risultato cambia



C'è però una certa regolarità: man mano che si va avanti il risultato si stabilizza intorno al 50%, che è la probabilità che, intuitivamente, attribuiremmo all'evento 'esce testa'.

Interpretazione frequentista (continua)

C'è però una certa regolarità: man mano che si va avanti il risultato si stabilizza intorno al 50%, che è la probabilità che, intuitivamente, attribuiremmo all'evento 'esce testa'.

Probabilità: impostazione frequentista

La probabilità di un evento è la frequenza con cui questo si verifica in un (ideale) infinito numero di ripetizioni dell'evento stesso.

Leggi del calcolo delle probabilità

- Abbiamo così una definizione più operativa.
- Ci permette perlomeno di assegnare delle probabilità per eventi semplici come
  - esce testa al lancio di una moneta;
  - esce 1 al lancio di un dado;
- Questi eventi elementari possono però essere combinati per definire eventi più complessi.
- Vedremo ora delle regole per combinare le probabilità di questi eventi elementari per calcolare quella di eventi più complessi.
- Illustreremo le regole del c.d.p. nel contesto di giochi d'azzardo.
- S'usa il gioco d'azzardo perché è una situazione in cui il ruolo del caso è evidente.

Il gioco dei dadi

Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;

Dante - Purgatorio, VI, 1-3

Consideriamo un dado a sei facce numerate

⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅

Se il dado non è truccato si ha

$$P(\text{⚀}) = P(\text{⚁}) = P(\text{⚂}) = P(\text{⚃}) = P(\text{⚄}) = P(\text{⚅}) = \frac{1}{6}$$

Dado romano

Il gioco dei dadi: probabilità della somma

- Qual è la probabilità che esca pari?
- Esce pari se si realizza ⚁ o ⚃ o ⚅

$$⚁ \cup ⚃ \cup ⚅$$

- La probabilità che si realizzi uno qualunque di essi, essendo gli eventi disgiunti, è la somma

$$P(⚁ \cup ⚃ \cup ⚅) = P(⚁) + P(⚃) + P(⚅) = \frac{3}{6}$$

- N.B.: disgiunti vuol dire che non si possono verificare contemporaneamente,

Bartolomé Esteban Murillo
Niños jugando a los dados
circa 1665-1675

Il gioco dei dadi: probabilità della somma

Regola della somma per due eventi incompatibili

Dati due eventi disgiunti – cioè tali che non possono verificarsi contemporaneamente – la probabilità che si verifichi uno qualunque dei due è la somma delle loro probabilità.

Se i due eventi A, B sono tali che $A \cap B = \varnothing$ allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bartolomé Esteban Murillo
Niños jugando a los dados
circa 1665-1675

Probabilità della somma

Regola della somma per n eventi a due a due incompatibili

Dati n eventi a due a due disgiunti – cioè tali che non possono verificarsi contemporaneamente – la probabilità che si verifichi uno qualunque di essi è la somma delle loro probabilità.

Se $A_1, \ldots, A_n$ sono tali che $A_i \cap A_j = \varnothing$ qualunque siano i e j

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Il gioco dei dadi: probabilità del complementare

Claus Meyer
Die Würfelspieler
circa 1886

- Qual è la probabilità che esca dispari?
- Esce pari se non esce dispari e, evidentemente (in base alla regola della somma)

$$P(\text{non pari}) + P(\text{pari}) = 1$$

- La probabilità che non si realizzi pari è

$$P(\text{non pari}) = 1 - P(\text{pari})$$

Il gioco dei dadi: probabilità del complementare

Claus Meyer
Die Würfelspieler
circa 1886

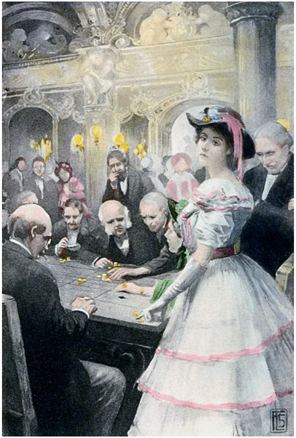
Regola del complementare

La probabilità che si verifichi il complementare di un evento è il complemento a uno della probabilità dell'evento stesso.

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

con $\bar{E}$ si indica la negazione di E, cioè l'evento che si verifica se e solo se **non** si verifica E.

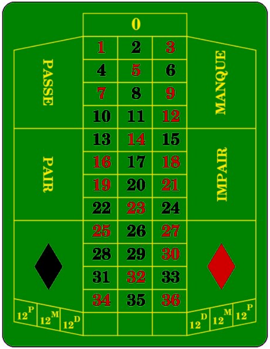
Il gioco della *roulette*



Daniel Deronda
Gwendolen Harleth at the roulette table
1910

- Una pallina viene fatta girare una ruota e l'esito che interessa è il numero su cui si ferma.
- Gi esiti possibili sono i 37 numeri da 0 a 36.
- Varie scommesse sono possibili.

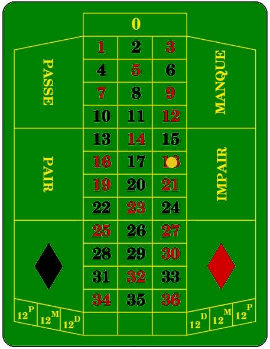
Il gioco della *roulette*



Panno da *roulette*

- Varie scommesse sono possibili.

Il gioco della *roulette*



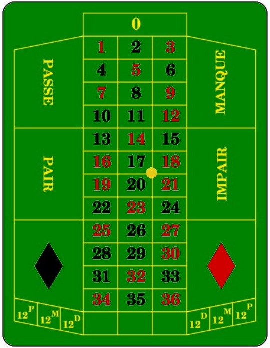
Scommessa in pieno sul 18.

- Varie scommesse sono possibili.
- *Pieno* scommettiamo su un singolo numero, diciamo il 18.
- Essendo 37 i numeri, la probabilità di vincere è

$$P(\boxed{18}) = \frac{1}{37}$$

- Per la cronaca, si vince 35 volte la posta.

Il gioco della *roulette*



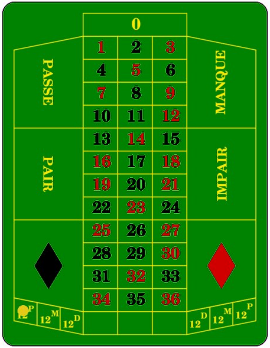
Scommessa sui quattro numeri 17, 18, 20, 21.

- Varie scommesse sono possibili.
- *Quartina* scommettiamo su quattro numeri.
- Vinco se esce uno qualunque dei quattro.
- Sono disgiunti.
- Si applica la regola della somma

$$P(\boxed{17\ 18\ 20\ 21}) = \frac{4}{37} = 0.11$$

- Si vince 8 volte la posta.

Il gioco della *roulette*



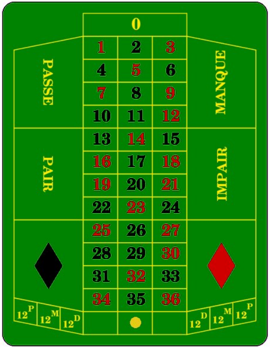
Scommessa sulla prima dozzina: da 1 a 12.

- Varie scommesse sono possibili.
- *dozzina* scommetto su 12 numeri.
- Vinco se esce uno qualunque dei dodici.
- Sono disgiunti.
- Si applica la regola della somma

$$P(\text{Prima dozzina}) = \frac{12}{37} = 0.324$$

- Si vince 2 volte la posta.

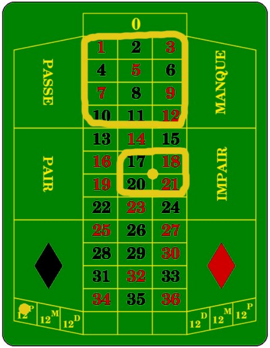
Il gioco della *roulette*



Scommessa sulla seconda colonna: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35.

- Varie scommesse sono possibili.
- *colonna* scommetto su 12 numeri.
- $$P(\text{Seconda colonna}) = \frac{12}{37} = 0.324$$
- Si vince 2 volte la posta.

Il gioco della *roulette*

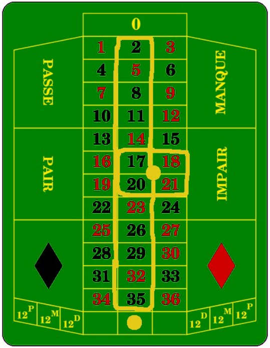


Scommessa multipla: prima dozzina quartina 17, 18, 20, 21

- Varie scommesse sono possibili. Combiniamo due scommesse
  - prima dozzina
  - quartina 17, 18, 20, 21
- La probabilità di vincere una o l'altra è sempre la somma, perché sono disgiunte

$$
\begin{aligned}
P(D_1 \cup Q) &= P(D_1) + P(Q) = \\
&= \frac{12}{37} + \frac{4}{37} = \\
&= \frac{16}{37} = 0.432
\end{aligned}
$$

Il gioco della *roulette*

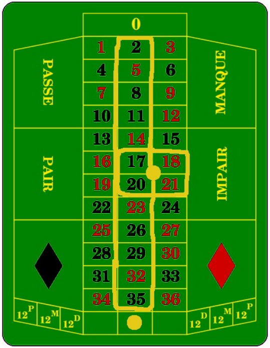


Scommessa multipla: seconda colonna quartina 17, 18, 20, 21

- Varie scommesse sono possibili. Combiniamo due scommesse
  - seconda colonna
  - quartina 17, 18, 20, 21
- La probabilità di vincere una o l'altra non è più la somma, perché non sono disgiunte (conterei due volte il 17 e il 20) ma

$$
\begin{aligned}
P(C \cup Q) &= P(C) + P(Q) - P(C \cap Q) = \\
&= \frac{12}{37} + \frac{4}{37} - \frac{2}{37} = \\
&= \frac{14}{37} = 0.378
\end{aligned}
$$

Il gioco della *roulette*



Scommessa multipla: seconda colonna quartina 17, 18, 20, 21

Regola della somma con eventi non disgiunti

Dati due eventi A e B, la probabilità che se ne verifichi almeno uno è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ma quanto si vince?

- Un'osservazione a margine, ma importante, si vince?
- Evidentemente, ogni tanto si vince e ogni tanto si perde.
- Il calcolo delle probabilità non ci permette di prevedere cosa succede su una scommessa (il gioco d'azzardo è totalmente casuale e il risultato di una mano è indipendente dal risultato dell'altra).
- Ci permette però di dire cosa succede su un gran numero di scommesse.

Ma quanto si vince? (continua)

- Consideriamo la scommessa sulla quartina, si è detto che
  - la probabilità di vincere è $P(Q) = 4/37$
  - si vince 8 volte la posta: se scommetto 1€ possono succedere due cose
    - se perdo, perdo il mio euro e il saldo è -1€
    - se vinco, ricevo il mio euro più altri 8, totale 9€
- Supponiamo di scommettere 1000 volte, per quanto detto nell'interpretazione frequentista, mi aspetto che la percentuale di volte in cui vinco si avvicini a $P(Q) = 4/37$, diciamo sia esattamente $P(Q)$: vinco dunque $1000 \times 4/37 = 108$ volte.
- Ma dunque
  - ogni volta ho pagato 1€ per giocare, totale 1000€
  - per 108 volte ho vinto, ricevendo $9 \times 108 = 972$€
- Alla fine, dunque, torno a casa con 28€ in meno, in media, si perde, ovvero, è più probabile perdere che vincere.

Ma quanto si vince? (continua)

- Si perde 'in media' perché la somma che si vince è inferiore al reciproco della probabilità di vittoria, il saldo medio che abbiamo calcolato è

$$9 \times 1000 \times P(Q) - 1000 = 1000(9P(Q) - 1) = -28$$

- Il saldo sopra sarebbe 0 se in caso di vittoria si ricevesse $37/4 = 9.25$
- Questa differenza è il margine del casinò, c'è in tutti i giochi organizzati, o il banco non guadagnerebbe.
- Questo vantaggio della casa può essere più o meno alto.

Quanto si vince?

1 giro
-1

Perdo | Vinco
0 | +9
$\left(\frac{33}{37}\right)$ | $\left(\frac{4}{37}\right)$

- Consideriamo la scommessa sul quadrato
  - probabilità di vittoria: $P(Q) = 4/37$
  - si vince 8 volte la posta,
- scommetto 1€ due cose possono succedere
  - Q: riprendo 1€ + 8, totale 9€
  - $\bar{Q}$: niente

- Scommettiamo ora 1000 volte, ci aspettiamo di vincere $1000 \times 4/37 = 108$ volte, quindi in media
  - pago un totale di 1000€ per giocare
  - vinco 8€ 108 volte, ricevendo $9 \times 108 = +972$€
- Totale: -28€

1000 giri
-1000€

Perdo | Vinco
0 | +9
$\approx$ 892 times | $\approx$ 108 times
0 | +972

Gioco del lotto

- Vediamo quanto vantaggio si prende lo stato sul gioco del lotto.
- Nel gioco del lotto tradizionale si estraggono cinque numeri da 1 a 90.
- Giocando un singolo numero, si vince 11232 volte la posta.
- La probabilità di vincere (se è tra i cinque) è 5/90.
- Su 1000 giocate, dunque, si vince

$$1000\left((11.232 \times 5/90) - 1\right) = -376$$

- (Non per niente il saldo per lo stato nel 2011 per *Lotto, lotterie ed altre attivita di giuoco* è 12 770 000 000, che corrisponde a 210.6€ ad abitante (60 626 442 abitanti al 1/1/2011).)
- Fonte: A.S. 3471: "Rendiconto generale dell'Amministrazione dello Stato per l'esercizio finanziario 2011" pag. 37 `http://www.senato.it/service/PDF/PDFServer/BGT/00737394.pdf`

Scommessa equa (=alla pari)

Una scommessa è equa se il guadagno atteso è 0.

- Se
  - la vincita è v e
  - la probabilità di vincere è p,
- allora in media ne esco con

$$1000pv - 1000$$

- questo è nullo se e solo se

$$v = 1/p$$

1000 giri
-1000€

Perdo	Vinco
0	+v
$\approx 1000(1-p)$ volte	$\approx 1000p$ volte
0	$+1000pv$

Indice

Spazio campionario e eventi elementari

Quello che abbiamo visto in chiave intuitiva con l'esempio del dado e della roulette può essere formalizzato in modo più generale (e preciso).

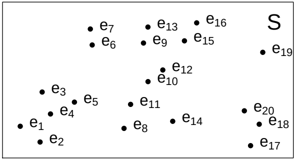
Si parte da un **esperimento casuale**: un meccanismo che produce un esito non deterministico (non prevedibile), gli esiti dell'esperimento sono detti **eventi elementari**

$$e_1, \ldots, e_i, \ldots$$

Di questi, se ne verifica uno e uno solo, cioè

- sono a due a due incompatibili
- è certo che almeno uno si verifichi

L'insieme di tali esiti è detto **spazio campionario** (lo indichiamo con S).

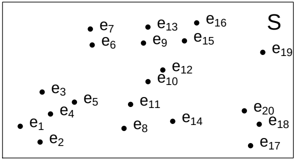


Probabilità degli eventi elementari

Di questi, se ne verifica uno e uno solo, cioè

- sono a due a due incompatibili
- è certo che almeno uno si verifichi

L'insieme di tali esiti è detto
spazio campionario (lo indichiamo con S).



Assegnare delle probabilità su degli eventi elementari è semplice

$$p_1, \ldots, p_n$$

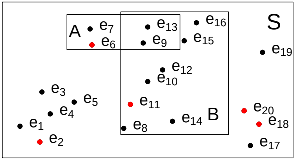
tali che

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Eventi

Si possono costruire altri **eventi** come insiemi di eventi elementari



- l'insieme vuoto $\varnothing$ è l'evento "impossibile"
- $A = \{e_6, e_7, e_9, e_{13}\}$
- $B = \{e_8, e_9, \ldots, e_{16}\}$
- $C = \{e_2, e_6, e_{11}, e_{18}, e_{20}\}$

In generale, indichiamo un evento E come l'unione degli eventi elementari che lo costituiscono

$$E = \bigcup_{E} e_i$$

e la sua probabilità è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo costituiscono

$$P(E) = \sum_{E} p_i$$

Operazioni tra eventi

Gli eventi si possono combinare (si comportano come gli insiemi), la probabilità dell'evento risultante è la somma delle probabilità che gli eventi elementari che lo compongono.

Da questo si evincono le due regole del complementare

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

e dell'unione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ se } A \cap B = \varnothing$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right) = \sum_{i=1}^{q} P(A_i) \text{ se } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ per ogni } i \neq j$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Indice

Algebra di eventi

Sia $\mathcal{A}$ un insieme di eventi non vuoto tale che

(i) se $A \in \mathcal{A}$, allora $\bar{A} \in \mathcal{A}$

(ii) se $A, B \in \mathcal{A}$, allora $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$

(iii) se $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

In questo insieme sono presenti

- l'evento impossibile, che non si verifica mai, è in $\mathcal{A}$. $\varnothing \in \mathcal{A}$ (cfr insieme vuoto)
- l'evento certo, che si verifica sempre, è in $\mathcal{A}$. $\Omega \in \mathcal{A}$ (cfr l'insieme ambiente, con riferimento agli eventi elementari è l'insieme che li contiene tutti)

Definizione di probabilità

Si definisce probabilità una funzione P che associa a ogni evento $A \in \mathcal{A}$ un numero reale tale che

(i) $P(A) \geq 0$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A \cap B = \varnothing$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(iii') $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$ allora $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Probabilità del complementare

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Si noti che

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

e che per la (iii)

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

ma siccome per la (ii) $P(\Omega) = 1$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

da cui la tesi.

Probabilità dell'evento impossibile ($\emptyset$)

$$P(\emptyset) = 0$$

Si noti che

$$\emptyset = \bar{\Omega}$$

quindi per la regola sulla probabilità del complementare e per la (ii)

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$$

La probabilità è al più 1

$$P(A) \leq 1$$

Abbiamo mostrato che

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

ma siccome $P(\bar{A}) \geq 0$ (per la (i)) si ha la tesi.

Probabilità dell'unione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$$

L'unione dei due eventi (non incompatibili), può essere scritta come unione di due eventi incompatibili

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

e che quindi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \tag{1}$$

si noti però che

$$\begin{aligned} B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \quad &\Rightarrow \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &\Rightarrow \quad P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

sostituendo nella (1) si ha la tesi.

Implicazioni tra eventi

Diciamo che l'evento A implica l'evento B se ogni volta che si verifica A allora si verifica B, in termini insiemistici $A \subset B$, si ha allora

$$\text{se } A \subset B \text{ allora } P(A) \leq P(B)$$

Per mostrarlo si scriva, come sopra,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A \cap B)$$

ma se $A \subset B$ allora $A \cap B = A$ e quindi

$$P(B) \geq P(A \cap B) = P(A)$$

Indice

Carta più alta

Mario e Antonio giocano con un mazzo di 52 carte francesi a chi pesca la carta più alta (l'ordine è $2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A$, se le carte hanno lo stesso punto è un pareggio). Mario pesca un J di cuori, quindi pesca Antonio (il J di cuori non viene rimesso nel mazzo).

(a) Qual è la probabilità che Mario vinca?

(b) Qual è la probabilità di pareggio?

(c) Ad Antonio converrebbe se la carta pescata da Mario venisse rimessa nel mazzo?

Un caso di studio: la lotteria della Virginia

Nel 1992 la *Virginia Lottery* mette in palio 27 milioni di dollari per chi indovina sei numeri che vengono scelti da 1 a 44 (non molto diverso dal superenalotto) (ci sono anche un secondo, terzo e quarto premio, con i quali si arriva a un montepremi di 27 918 561\$)

Qual è la probabilità di vincere con un biglietto (puntando cioè su una sestina)?

Le sestine possibili sono $\binom{44}{6} = 7\,059\,052$, quindi la probabilità di vittoria è

$$P(V) = \frac{1}{7\,059\,052} = 1.416621 \times 10^{-7}$$

Un biglietto costa 1\$.

La lotteria della Virginia, una scommessa vincente?

Il costo di un biglietto è inferiore a

$$27\,000\,000 \times P(V) = 3.82$$

Quindi?

Quindi se uno comprasse tutti i biglietti (cioè scommettesse su tutte le sestine) spenderebbe 7 059 052 ma vincerebbe certamente, guadagnando 27 milioni!

Una scommessa promettente...
In realtà non si sta tenendo conto di alcuni fattori

- gli altri premi, ma questi renderebbero la scommessa ancor più conveniente, non meno
- la possibilità che anche qualcun altro vinca, nel qual caso il premio andrebbe diviso.

La lotteria della Virginia, più vincitori?

La probabilità che ci sia più di un vincitore dipende dal numero di giocate, possiamo però usare il fatto che nelle precedenti 170 edizioni ci sono stati

Vincitori	0	1	2
Edizioni	120	40	10

Non è quindi mai successo che ci fossero più di due vincitori "regolari"

Anche se si dovesse dividere in tre (ma avere altri due vincitori è successo solo 10 volte su 170 in passato), la vincita sarebbe comunque superiore al costo di acquisto di tutti i biglietti.

(Si può fare un calcolo più preciso, ma servono altri strumenti, ci torneremo.)

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000$ a testa.

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000\$ a testa.

La difficoltà è ora comprare i biglietti, l'operazione inizia 72 ore prima della scadenza e coinvolge un gran numero di persone in 125 punti vendita.

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000$ a testa.

La difficoltà è ora comprare i biglietti, l'operazione inizia 72 ore prima della scadenza e coinvolge un gran numero di persone in 125 punti vendita.

Alla fine, vengono acquistati circa 5 milioni di biglietti, quindi non tutti.

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000$ a testa.

La difficoltà è ora comprare i biglietti, l'operazione inizia 72 ore prima della scadenza e coinvolge un gran numero di persone in 125 punti vendita.

Alla fine, vengono acquistati circa 5 milioni di biglietti, quindi non tutti.

Estratti i numeri, per diversi giorni nessuno reclama la vincita.

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000$ a testa.

La difficoltà è ora comprare i biglietti, l'operazione inizia 72 ore prima della scadenza e coinvolge un gran numero di persone in 125 punti vendita.

Alla fine, vengono acquistati circa 5 milioni di biglietti, quindi non tutti.

Estratti i numeri, per diversi giorni nessuno reclama la vincita. Alla fine il consorzio trova il biglietto vincente!

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000$ a testa.

La difficoltà è ora comprare i biglietti, l'operazione inizia 72 ore prima della scadenza e coinvolge un gran numero di persone in 125 punti vendita.

Alla fine, vengono acquistati circa 5 milioni di biglietti, quindi non tutti.

Estratti i numeri, per diversi giorni nessuno reclama la vincita. Alla fine il consorzio trova il biglietto vincente!

I funzionari della lotteria statale si rifiutano di pagare,

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000$ a testa.

La difficoltà è ora comprare i biglietti, l'operazione inizia 72 ore prima della scadenza e coinvolge un gran numero di persone in 125 punti vendita.

Alla fine, vengono acquistati circa 5 milioni di biglietti, quindi non tutti.

Estratti i numeri, per diversi giorni nessuno reclama la vincita. Alla fine il consorzio trova il biglietto vincente!

I funzionari della lotteria statale si rifiutano di pagare, alla fine però devono riconoscere che il regolamento è rispettato e liquidare la vincita: il profitto per il consorzio è di 22 milioni circa su un investimento di 5!!!

72 ore per vincere

Un gruppo di persone avvia una raccolta di denaro per comprare tutti i biglietti, 2500 persone conferiscono circa 3000$ a testa.

La difficoltà è ora comprare i biglietti, l'operazione inizia 72 ore prima della scadenza e coinvolge un gran numero di persone in 125 punti vendita.

Alla fine, vengono acquistati circa 5 milioni di biglietti, quindi non tutti.

Estratti i numeri, per diversi giorni nessuno reclama la vincita. Alla fine il consorzio trova il biglietto vincente!

I funzionari della lotteria statale si rifiutano di pagare, alla fine però devono riconoscere che il regolamento è rispettato e liquidare la vincita: il profitto per il consorzio è di 22 milioni circa su un investimento di 5!!!

Morale: non conoscere il calcolo delle probabilità può costare caro...

Giochi

Un avversario ci propone alcuni giochi, in cui si vince o si perde a seconda della proporzione di teste in un certo numero di lanci di una moneta (equilibrata). Sta a noi, per ciascuno dei giochi, scegliere se la moneta vada lanciata 10 o 100 volte.

(a) si vince se la proporzione di teste supera 0.6

(b) si vince se la proporzione di teste supera 0.4

(c) si vince se la proporzione di teste è tra 0.4 e 0.6

(d) si vince se la proporzione di teste non supera 0.3

Il gioco della zara

Il gioco medievale della zara (già citato) si basa sul cercare di indovinare l'esito del lancio di tre dadi.

—

Ciascun giocatore, a turno, fa una previsione e lancia i tre dadi, chi per primo indovina vince.

—

Qual è la strategia migliore?

—

(C'erano diverse possibili regole di gioco e/o diverse teorie odierne su quali fossero le regole, questa è quella che mi faceva comodo per l'esempio, per i curiosi si veda 1, 2)

Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;

con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,
e qual dallato li si reca a mente;

el non s'arresta, e questo e quello intende;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.

Dante - Purgatorio, VI, 1-9

Il gioco della zara

Occorre determinare il totale più frequente,

- i totali possibili sono gli interi da 3 a 18, ma non sono equiprobabili.
- Lo spazio degli eventi elementari contiene $6 \times 6 \times 6 = 216$ triplette di interi da 1 a 6.
- 1 di queste porta a un totale di 3
- 3 portano a un totale di 4
- ...
- 1 porta a 18

Cominciamo da due dadi

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Cominciamo da due dadi

	1	2	3	4	5	6
1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Cominciamo da due dadi

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Cominciamo da due dadi

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Somma	#
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Il gioco della zara

							631	641							
							541	551							
						621	451	461	651						
						531	361	632	561						
						441	622	542	642						
						351	532	452	552						
					611	261	442	362	462	661					
					521	612	352	623	633	652					
					431	522	262	533	543	562					
					341	432	613	443	453	643					
					251	342	523	353	363	553					
					161	252	433	263	624	463					
				511	512	162	343	614	534	634	662				
				421	422	513	253	524	444	544	653				
				331	332	423	163	434	354	454	563				
				241	242	333	514	344	264	364	644				
				151	152	243	424	254	615	625	554				
			411	412	413	153	334	164	525	535	464	663			
			321	322	323	414	244	515	435	445	635	654			
			231	232	233	324	154	425	345	355	545	564			
			141	142	143	234	415	335	255	265	455	645			
		311	312	313	314	144	325	245	165	616	365	555	664		
		221	222	223	224	315	235	155	516	526	626	465	655		
		131	132	133	134	225	145	416	426	436	536	636	565		
	211	212	213	214	215	135	316	326	336	346	446	546	646	665	
	121	122	123	124	125	216	226	236	246	256	356	456	556	656	
111	112	113	114	115	116	126	136	146	156	166	266	366	466	566	666
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Una corsa di cavalli

Tre cavalli, A, B, C partecipano a una corsa. Un esperto ritiene che ci sia probabilità pari a 0.3 che arrivino nell'ordine ABC (primo-secondo-terzo); probabilità 0.2 che arrivino nell'ordine ACB, probabilità 0.2 che arrivino nell'ordine BAC e che gli altri possibili esiti abbiano tutti la stessa probabilità. Si dica

(a) Qual è la probabilità che l'ordine di arrivo sia CBA.

(b) Qual è la probabilità che A arrivi primo.

(c) Se Mario scommette su B piazzato (cioè vince se B arriva primo o secondo), qual è la sua probabilità di vincere.

(d) Se Mario scommette su A vincente e su B vincente, qual è la probabilità che vinca una delle due.

Esempio: Genere e Sanremo

Y	X			totale
	$X = NonV$	$X = VeNP$	$X = VeP$	
Femmina	131	13	55	204
Maschio	174	18	39	233
Totale	305	31	94	437

Sport e genere

	Attività sportiva		
	No	Sì	Totale
Femmina	65	115	204
Maschio	31	166	233
Totale	96	281	437

Sport e genere

	Genere		
	Fem	Mas	Totale
Altri squadra	12	12	24
Altri non squadra	35	35	70
Basket	0	15	15
Calcio	2	44	46
Corsa	26	16	42
Nuoto	12	15	27
Palestra	47	42	89
Totale	134	179	313