Il V postulato e le geometrie non euclidee: comunque vada sarà un (in)successo.

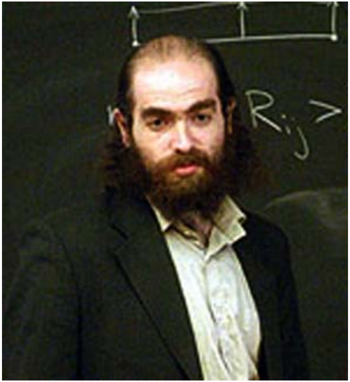
Mattia Mecchia

Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università degli studi di Trieste

Trieste, 29 aprile 2013

Da Euclide a Perelman

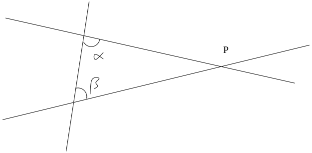
Euclide di Alessandria
(circa 325 a.C. - circa 265 a.C.)



Grigori Yakovlevich Perelman
(1966 d.C. -)

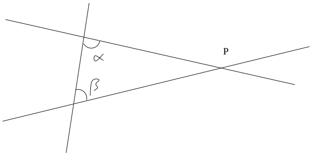
I cinque postulati di Euclide

1. Si possa tracciare una retta da un punto quasiasi a un punto qualsiasi;
2. si possa prolungare indefinitivamente una linea retta;
3. si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali;
5. se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitivamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.



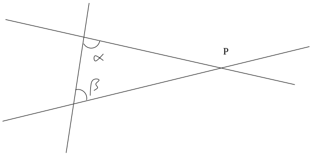
I cinque postulati di Euclide

1. Si possa tracciare una retta da un punto quasiasi a un punto qualsiasi;
2. si possa prolungare indefinitivamente una linea retta;
3. si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali;
5. se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitivamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.



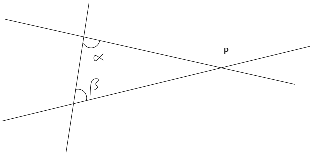
I cinque postulati di Euclide

1. Si possa tracciare una retta da un punto quasiasi a un punto qualsiasi;
2. si possa prolungare indefinitivamente una linea retta;
3. si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali;
5. se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitivamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.



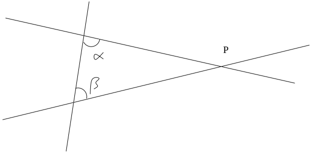
I cinque postulati di Euclide

1. Si possa tracciare una retta da un punto quasiasi a un punto qualsiasi;
2. si possa prolungare indefinitivamente una linea retta;
3. si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali;
5. se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitivamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.



I cinque postulati di Euclide

1. Si possa tracciare una retta da un punto quasiasi a un punto qualsiasi;
2. si possa prolungare indefinitivamente una linea retta;
3. si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali;
5. se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitivamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.



Il problema del V postulato.

Problema del V postulato (o delle parallele):
Dimostrare il V postulato partendo dai primi quattro.

Proposizioni equivalenti al V postulato:

- Per un punto fuori da una retta si può condurre una e una sola parallela ad una retta data (assioma di Playfair).
- La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti.
- Di ogni figura piana ne esiste una simile di grandezza arbitraria.

Il problema del V postulato.

Problema del V postulato (o delle parallele):
Dimostrare il V postulato partendo dai primi quattro.

Proposizioni equivalenti al V postulato:

- Per un punto fuori da una retta si può condurre una e una sola parallela ad una retta data (assioma di Playfair).
- La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti.
- Di ogni figura piana ne esiste una simile di grandezza arbitraria.

Il problema del V postulato.

Problema del V postulato (o delle parallele):
Dimostrare il V postulato partendo dai primi quattro.

Proposizioni equivalenti al V postulato:

- Per un punto fuori da una retta si può condurre una e una sola parallela ad una retta data (assioma di Playfair).
- La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti.
- Di ogni figura piana ne esiste una simile di grandezza arbitraria.

Da una lettera di Farkas Bólyai (matematico) a suo figlio:

"Per amore del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tempo e privarti della salute, della serenità di spirito e delle felicità"

I padri della geometria non euclidea

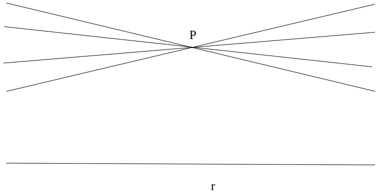
Nikolaj Ivanovič Lobačevskij
(1792 - 1856)

János Bólyai
(1802 - 1860)

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

La geometria immaginaria (iperbolica)

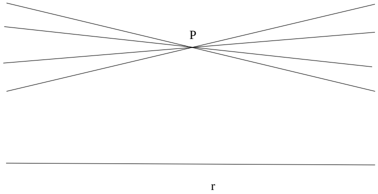
N.I.Lobačevskij suppone che per un punto esterno ad una retta data passino almeno due rette parallele alla retta data; da questo assunto (assieme ai primi quattro postulati) sviluppa una nuova geometria che chiama *geometria immaginaria* o *pangeometria*. Questa geometria viene detta ora geometria iperbolica.



Beltrami nel 1868 costruisce il primo modello di geometria iperbolica dando piena legittimità alla nuova geometria.

La geometria immaginaria (iperbolica)

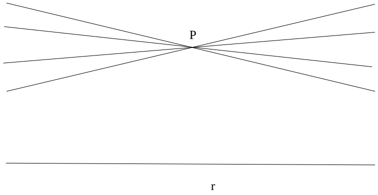
N.I.Lobačevskij suppone che per un punto esterno ad una retta data passino almeno due rette parallele alla retta data; da questo assunto (assieme ai primi quattro postulati) sviluppa una nuova geometria che chiama *geometria immaginaria* o *pangeometria*. Questa geometria viene detta ora geometria iperbolica.



Beltrami nel 1868 costruisce il primo modello di geometria iperbolica dando piena legittimità alla nuova geometria.

La geometria immaginaria (iperbolica)

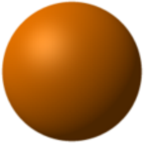
N.I.Lobačevskij suppone che per un punto esterno ad una retta data passino almeno due rette parallele alla retta data; da questo assunto (assieme ai primi quattro postulati) sviluppa una nuova geometria che chiama *geometria immaginaria* o *pangeometria*. Questa geometria viene detta ora geometria iperbolica.



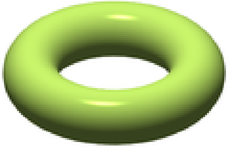
Beltrami nel 1868 costruisce il primo modello di geometria iperbolica dando piena legittimità alla nuova geometria.

Lo studio delle varietà 3-dimensionali

Esempi di superfici o varietà 2-dimensionali:



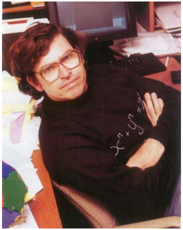
Sfera



Toro

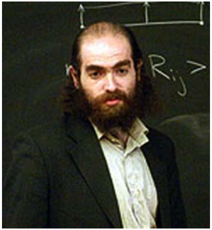
Le superfici o varietà 2-dimensionali localmente “assomigliano” al piano (2 dimensioni).
Le varietà 3-dimensionali localmente “assomigliano” allo spazio (3 dimensioni).

La geometri iperbolica torna di moda (anni ’70-’80)



W.Thurston (1946-2012) a cavallo fra gli anni 70 e gli anni 80 rivoluziona lo studio delle varietà 3-dimensionali, dimostra molti teoremi ed enuncia la "Congettura di Thurston".
Nel programma di Thurston per capire le varietà 3-dimensionali la geometria iperbolica 3-dimensionale ha un importanza fondamentale. Nel 1982 vince la Medaglia Fields.

Perelman risolve il primo problema del millennio



Nei primi anni di questo secolo G.Perelman dimostra la Congettura di Thurston, nel 2006 gli viene assegnata la medaglia Fields (che rifiuta), sempre nel 2006 la sua dimostrazione viene scelta come "Breakthrough of the year" dalla rivista "Science" (su tutte le scienze), recentemente vince un premio scientifico da un milione di dollari che rifiuta.

Quesito finale

- Nella geometria iperbolica, preso A un qualsiasi reale positivo, esiste sempre un triangolo di area A? Nella geometria iperbolica esiste un triangolo di area massima? (e nella geometria Euclidea cosa succede?)

Alcuni testi di base:

C.B.Boyer
Storia della Matematica.
Arnoldo Mondadori Editore.

R.L.Faber
Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry
Marcel Dekker, inc.

Donal O'Shea
La congettura di Poincaré
BUR

[WWW] J.J.O'Connor, E.F.Robertson (curatori)
The MacTutor History of Mathematics archive.
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/