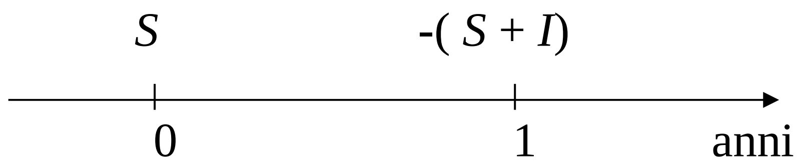
INTRODUZIONE ALLE LEGGI FINANZIARIE

Operazione finanziaria su due date:



Legge di equivalenza intertemporale introdotta dal contratto finanziario:

$$\begin{cases} W(0) = S \\ W(1) = S + I \end{cases}$$

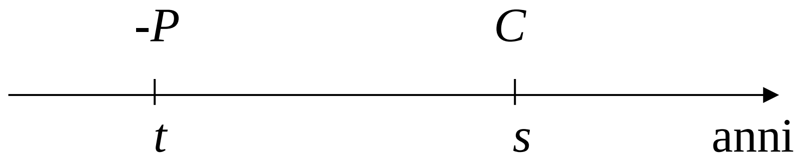
$W(t)$, $t \in \{0,1\}$, è detta **funzione valore**

$W(1) - W(0)$ è l'interesse

$i = \dfrac{W(1) - W(0)}{W(0)}$ è il tasso annuo di interesse

$d = \dfrac{W(1) - W(0)}{W(1)}$ è il tasso annuo di sconto

Acquisto di un titolo a cedola nulla



Legge di equivalenza intertemporale introdotta dal contratto finanziario:

$$\begin{cases} W(t) = P \\ W(s) = C \end{cases}$$

$W(t)$, $t \in \{t, s\}$, è la funzione valore

$W(s) - W(t) = C - P$ è l'interesse relativo all'intervallo $[t, s]$

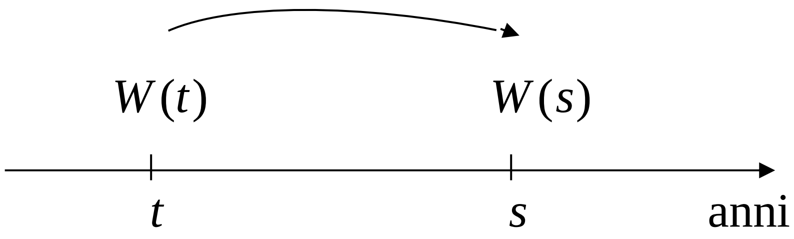
$j(t,s) = \dfrac{W(s) - W(t)}{W(t)} = \dfrac{C - P}{P}$ è il tasso di interesse relativo all'intervallo $[t, s]$

$\dfrac{W(s) - W(t)}{W(s)}$ è il tasso di sconto relativo all'intervallo $[t, s]$

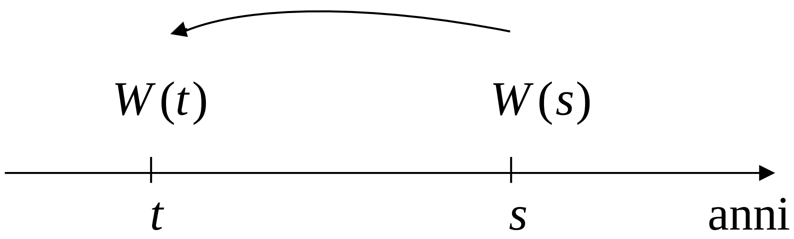
Nella pratica, per costruire operazioni finanziarie, si introducono delle funzioni valore che consento di esprimere l'interesse in funzione della durata dell'operazione.

$$j(t,s)=\frac{W(s)}{W(t)}-1$$

$$\Rightarrow \qquad W(s)=W(t)\left[1+j(t,s)\right]$$



$$\Rightarrow \qquad W(t)=W(s)\left[1+j(t,s)\right]^{-1}$$



LEGGI FINANZIARIE

Nella pratica molte operazioni finanziarie sono regolate secondo delle funzioni, **leggi finanziarie**, che dipendono dalla *durata* dell'operazione e da un parametro, tipicamente il *tasso annuo d'interesse*.

Consideriamo una operazione finanziaria elementare in cui l'importo C esigibile in t_0 viene scambiato con l'importo M esigibile in t_1.

Dal punto di vista dell'investitore si ha l'operazione di investimento o di **capitalizzazione**

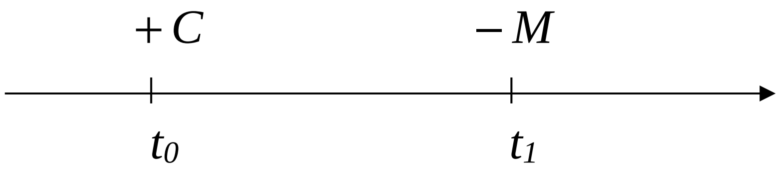
con $t = t_1 - t_0$ la durata in anni

C capitale investito

M montante in t_1 di C esigibile in t_0

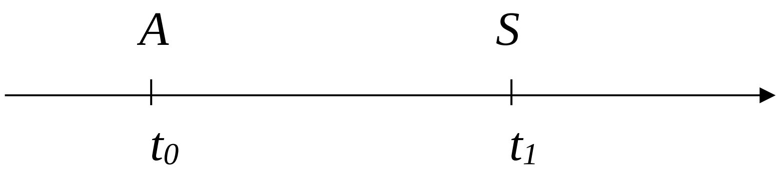
L'importo C esigibile in t_0 è capitalizzato nell'istante t_1. Si dice che C è "portato avanti" nel tempo in quanto si trasforma una disponibilità immediata (C) in una disponibilità futura (M)

Dal punto di vista del debitore si ha <u>l'operazione di finanziamento</u> o di **attualizzazione**



con $t = t_1 - t_0$ la durata in anni

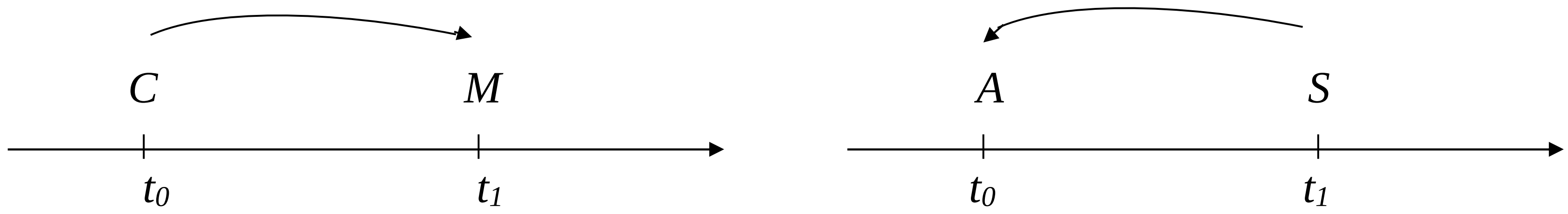
Si ottiene una disponibilità immediata (C) rinunciando ad una disponibilità futura (M).
Si dice che l'importo M esigibile in t_1 è attualizzato ("portato indietro" nel tempo) nell'istante t_0.
In generale, in una operazione di attualizzazione, un importo S disponibile in un istante futuro è attualizzato in un istante precedente.



con $t = t_1 - t_0$ la durata in anni

S valore nominale o valore a scadenza

A valore attuale in t_0 di S esigibile in t_1



Definizioni

Si definisce **fattore di capitalizzazione** o **fattore di montante** $f = \frac{M}{C}$

$\Rightarrow \qquad M = C \cdot f$

Si definisce **fattore di attualizzazione** o **fattore di sconto** $\varphi = \frac{A}{S}$

$\Rightarrow \qquad A = S \cdot \varphi$

Nell’operazione di capitalizzazione si definiscono gli **interessi** $I = M - C$

Nell’operazione di attualizzazione si definisce lo **sconto** $D = S - A$

Si ha

$I = M - C = C \cdot f - C = C(f - 1)$ dove $f - 1$ è il tasso di interesse

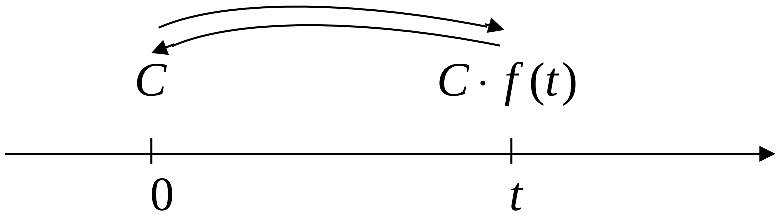
$D = S - A = S - S \cdot \varphi = S(1 - \varphi)$ dove $1 - \varphi$ è il tasso di sconto

Per costruire contratti finanziari si introducono delle funzioni che consentono, per esempio, di esprimere il **fattore di capitalizzazione** in dipendenza della <u>durata</u> t dell'operazione di investimento e di un parametro α che esprime il "costo del finanziamento"

$$f(t,\alpha)$$

Fissato il parametro α la funzione dipende dalla sola durata t : $\quad f(t)$

Fissata una <u>funzione di capitalizzazione</u> $f(t),\ t \geq 0$, rimane individuata la corrispondente <u>funzione di attualizzazione</u> $\varphi(t),\ t \geq 0$, tale che



$$C = [C \cdot f(t)]\varphi(t)$$

cioè, tale che, $\quad f(t)\cdot\varphi(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \dfrac{1}{f(t)}$

Se $\ f(t)\cdot\varphi(t) = 1\ ,\quad \forall\, t \geq 0$, si dice che $\varphi(t)$ è il **fattore coniugato** di $f(t)$ e viceversa.

Vedremo tre funzioni $f(t,\alpha)$ che definiscono altrettanti **regimi finanziari**. Fissato il parametro α rimane individuata una **legge finanziaria**.

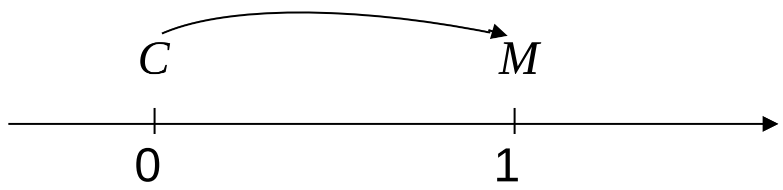
DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Siano

$f(t),\ t \geq 0$, una legge di capitalizzazione

$\varphi(t)$, $t \geq 0$, la legge di attualizzazione associata, cioè tale che $f(t) \cdot \varphi(t) = 1$

Consideriamo una operazione finanziaria con durata unitaria (1 anno)

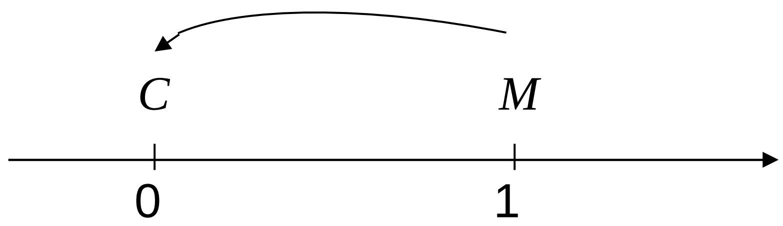


Si definisce

$I = M - C$ interesse

$i = \dfrac{I}{C}$ tasso annuo di interesse

$u = \dfrac{M}{C} = 1 + i = f(1)$ fattore di capitalizzazione annuo



Si definisce

$D = M - C$ sconto

$d = \dfrac{D}{M}$ tasso annuo di sconto

$v = \dfrac{C}{M} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{f(1)} = \varphi(1)$ fattore di attualizzazione annuo

<u>Osservazione</u>

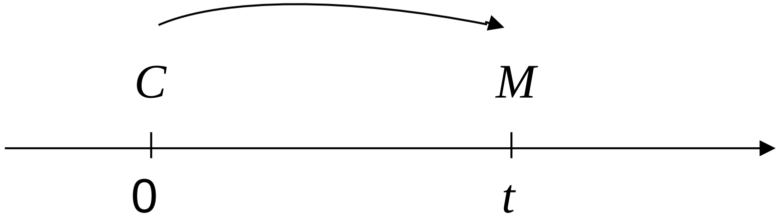
$$d = \frac{D}{M} = 1 - v = \frac{i}{1+i} = i \cdot v$$

è detto **tasso di interesse anticipato**.

Si ha $d < i$

REGIME DELL’INTERESSE SEMPLICE E SCONTO RAZIONALE

Consideriamo una operazione di capitalizzazione



con $M = C \cdot f(t)$

In generale si ha

$$I = M - C = C \cdot f(t) - C = C\big(f(t) - 1\big)$$

quindi gli interessi sono proporzionali al capitale impiegato C

<u>Definizione</u>:

Nel **regime finanziario dell’interesse semplice** gli interessi sono proporzionali oltre che al capitale investito C anche alla durata t dell’impiego

$$I = C \cdot t \cdot \alpha$$

con $\alpha > 0$ costante di proporzionalità, che rappresenta l’interesse prodotto da 1 euro in 1 anno (se la durata t è misurata in anni).

Si ha allora

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + i \cdot t)$$

Quindi il fattore di capitalizzazione del **regime della capitalizzazione semplice** è

$$f(t) = 1 + i \cdot t$$

Il fattore di attualizzazione coniugato è

$$\varphi(t) = \frac{1}{f(t)} = \frac{1}{1 + i \cdot t}$$

Esso definisce il regime di sconto coniugato del regime dell’interesse semplice ed è chiamato **regime dello sconto semplice** o dello **sconto razionale**.

ESEMPIO: calcolare i tassi di interesse annui dei BOT, secondo il regime dell’interesse semplice (**tassi di rendimento semplice**).

BOT a 3 mesi: $\{-99.098, 100\}/\left\{0, \frac{89}{365}\right\}$; BOT a 6 mesi: $\{-98.150, 100\}/\left\{0, \frac{181}{365}\right\}$;

BOT a 1 anno: $\{-96.180, 100\}/\{0, 1\}$; CTZ: $\{-92.895, 100\}/\left\{0, \frac{700}{365}\right\}$

Tassi variabili nel regime dell’interesse semplice

Consideriamo l’impiego del capitale C per una durata di t anni, in regime dell’interesse semplice

$$M = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + i \cdot t)$$

Supponiamo che il tasso di interesse, invece di rimanere costante per tutta la durata, vari nel tempo.

Precisamente, sia l’intervallo $[0, t]$ ripartito in n sottointervalli nei quali il tasso di interesse si mantenga costante.

Sia i_k il tasso di interesse nel k-esimo intervallo di ampiezza t_k , $k = 1, \ldots, n$ con

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = t$$

L’interesse nell’intervallo $[0, t]$ è $\quad \sum_{k=1}^{n} C \cdot i_k \cdot t_k$

Quindi si ha

$$M = C + \sum_{k=1}^{n} C \cdot i_k \cdot t_k = C\left(1 + \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot t_k\right)$$