

REGIME DELLA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA E SCONTO COMPOSTO

Consideriamo l'impiego del capitale C per una durata di n (numero intero) anni e supponiamo che gli interessi siano capitalizzati alla fine di ogni anno.

Sia i il tasso annuo di interesse; si ha:

- montante alla fine dell'anno 1: $M_1 = C + C \cdot i = C(1+i)$
- montante alla fine dell'anno 2: $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1+i) = C(1+i)^2$
- montante alla fine dell'anno 3: $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1+i) = C(1+i)^3$
- ...
- montante alla fine dell'anno n : $M_n = C(1+i)^n$

Definizione:

Si chiama **regime finanziario della capitalizzazione composta o esponenziale** il regime finanziario caratterizzato da un fattore di capitalizzazione esponenziale:

$$f(t) = (1+i)^t \quad t \geq 0$$

Il fattore di attualizzazione coniugato è $\varphi(t) = \frac{1}{f(t)} = (1+i)^{-t} \quad t \geq 0$

Tassi variabili nel regime della capitalizzazione composta

Consideriamo l'impiego del capitale C per una durata di t anni, in regime della capitalizzazione composta

$$M = C(1+i)^t$$

Supponiamo che il tasso di interesse, invece di rimanere costante per tutta la durata, vari nel tempo.

Precisamente, sia l'intervallo $[0, t]$ ripartito in n sottointervalli nei quali il tasso di interesse si mantenga costante.

Sia i_k il tasso di interesse nel k -esimo intervallo di ampiezza t_k , $k = 1, \dots, n$

con
$$\sum_{k=1}^n t_k = t$$

Il montante alla fine dell'intervallo $[0, t]$ è

$$M = C \cdot (1+i_1)^{t_1} \cdot (1+i_2)^{t_2} \cdot \dots \cdot (1+i_n)^{t_n} = C \prod_{k=1}^n (1+i_k)^{t_k}$$

TASSI EQUIVALENTI NEL REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE E DELLA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Finora abbiamo considerato leggi di capitalizzazione $f(t)$ $t \geq 0$

con t durata misurata in anni e parametro
 i tasso annuo di interesse

Nel regime dell'interesse semplice: $f(t) = 1 + i \cdot t$

Nel regime della capitalizzazione composta: $f(t) = (1 + i)^t$

Si pone il problema di utilizzare per le durate temporali diverse unità di misura, per esempio i semestri oppure i mesi. A tale fine si introduce il concetto di **equivalenza** tra il tasso annuo di interesse i ed il tasso periodale di interesse i_m riferito ad una durata pari

ad $\frac{1}{m}$ -esimo d'anno, essendo:

i l'interesse che matura su €1 in 1 anno

i_m l'interesse che matura su €1 in $\frac{1}{m}$ -esimo d'anno

ES: se $m = 2$ allora $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ d'anno, quindi i_2 è riferito ad una durata pari ad un semestre.

Tassi equivalenti nel regime dell'interesse semplice e della capitalizzazione composta

Definizione:

Il tasso annuo di interesse i ed il tasso di interesse periodale i_m si dicono **equivalenti** se, a fronte dell'impiego dello stesso capitale C e per la stessa durata di t anni, producono lo stesso montante.

Condizione di equivalenza tra i tassi i ed i_m nel regime dell'interesse semplice:

$$C(1+i \cdot t) = C(1+i_m \cdot m \cdot t)$$

Quindi, i tassi di interesse i ed i_m si dicono **equivalenti nel regime dell'interesse semplice**, se e soltanto se

$$i = i_m \cdot m \quad \text{ovvero} \quad i_m = \frac{i}{m}$$

Condizione di equivalenza tra i tassi i ed i_m nel regime della capitalizzazione composta:

$$C(1+i)^t = C(1+i_m)^{m \cdot t}$$

Quindi, i tassi di interesse i ed i_m si dicono **equivalenti** nel regime della capitalizzazione composta, se e soltanto se

$$1+i = (1+i_m)^m \quad \text{ovvero} \quad (1+i)^{1/m} = 1+i_m$$

$$\text{Quindi} \quad i = (1+i_m)^m - 1 \quad \text{e} \quad i_m = (1+i)^{1/m} - 1$$

Tassi equivalenti nel regime dell'interesse semplice e della capitalizzazione composta

Spesso nella pratica invece di indicare il tasso periodale di interesse i_m riferito ad una durata pari ad $\frac{1}{m}$ -esimo d'anno, si indica il **tasso annuo nominale convertibile m volte all'anno**

$$j_m = m \cdot i_m$$

Esempio: nel caso delle obbligazioni, abbiamo definito il **tasso cedolare** $\frac{I}{C}$

dove I è l'ammontare della cedola; C è il valore facciale o valore nominale

Se τ è la durata (in anni) tra due scadenze cedolari, cioè la periodicità di pagamento delle cedole, il tasso cedolare è riferito alla durata di τ anni

Abbiamo poi definito il **tasso annuo nominale**

$$\frac{I \cdot \frac{1}{\tau}}{C} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{I}{C}$$

Si tratta del tasso annuo nominale convertibile $\frac{1}{\tau}$ volte all'anno, corrispondente al tasso cedolare $\frac{I}{C}$

Tassi equivalenti nel regime dell'interesse semplice e della capitalizzazione composta

Interpretazione del rateo di interesse

Il **rateo di interesse** è dato da
$$A = I \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

Indicata con $\tau = t_1 - t_0$ la periodicità (in anni) di pagamento delle cedole, si ha

$$A = I \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = I(t - t_0) \frac{1}{\tau} = I \cdot t'$$

dove $t - t_0$ è la durata di tempo, dallo stacco dell'ultima cedola, misurata in anni

$t' = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = (t - t_0) \frac{1}{\tau}$ è la durata di tempo dallo stacco dell'ultima cedola,
misurata in τ -esimi d'anno

Quindi il rateo si può interpretare come interessi nel regime dell'interesse semplice:

$A = C \left(\frac{I}{C} \cdot \frac{1}{\tau} \right) \cdot (t - t_0)$ sull'importo C al tasso $\left(\frac{I}{C} \cdot \frac{1}{\tau} \right)$ per la durata di $(t - t_0)$ anni

$A = C \frac{I}{C} (t - t_0) \frac{1}{\tau} = C \frac{I}{C} \cdot t'$ sull'importo C al tasso $\frac{I}{C}$ per la durata $t' = (t - t_0) \frac{1}{\tau}$
misurata in τ -esimi d'anno