



## Approcci discreti

- 1 Differenze Finite (FD)
- 2 Volumi Finiti (FV)
- 3 Elementi Finiti (FEM)
- 4 Elementi al Contorno (BEM)
- 5 Metodi Spettrali
- 6 Cenni su altri metodi



### 1. Differenze Finite

- Il metodo delle Differenze Finite (*Finite Differences - FD*), è storicamente il metodo più vecchio per le equazioni alle derivate parziali;
- Il punto di partenza è l'equazione in forma differenziale:
  - Il dominio viene discretizzato tramite una griglia;
  - Ad ogni nodo della griglia, l'equazione differenziale è approssimata sostituendo le derivate parziali con opportune approssimazioni, ottenute in termini di valori ai nodi (nodali) della funzione incognita;
  - Si possono usare espansioni in serie di Taylor oppure forme polinomiali;
  - Il risultato è un'equazione algebrica per ogni nodo, che contiene l'incognita nel nodo stesso e in alcuni nodi adiacenti → sistema di equazioni.



## 1. Differenze Finite- *cont.*

### *Vantaggi:*

- E' particolarmente semplice da implementare, e fornisce buoni risultati su geometrie semplici (griglie Cartesiane e/o ortogonali);
- Per geometrie semplici, può essere particolarmente veloce, data l'esistenza di solvers efficienti;
- Si presta facilmente all'adozione di schemi di ordine elevato.

### *Svantaggi:*

- Il metodo FD è, in linea generale, limitato alle griglie strutturate;
- Nei casi generali (3D, griglie non uniformi), la conservazione non è garantita.



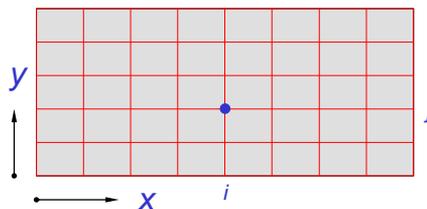
## 1. Differenze Finite- *cont.*

### Esempio: *conduzione termica stazionaria in 2D*

- L'equazione è:

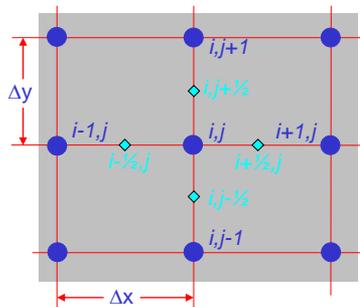
$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- Sovrapponiamo al dominio di interesse una griglia regolare:





### 1. Differenze Finite- cont.



L'idea alla base è presa direttamente dalla definizione di limite:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_i} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x_i + \Delta x) - T(x_i)}{\Delta x}$$

Per cui possiamo approssimare le derivate prime nei nodi "intermedi" come:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}$$



### 1. Differenze Finite- cont.

- Analogamente per le derivate in direzione y:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}$$

- Le derivate seconde, nei nodi, in funzione delle derivate prime:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2,j}}{\Delta x} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-1/2}}{\Delta y} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$



## 1. Differenze Finite- cont.

- Sostituendo nell'equazione di partenza:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

- Ed in particolare, per  $\Delta x = \Delta y$ , si ottiene:

$$4T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j+1} - T_{i,j-1} = 0$$

- O, in altra forma:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} [T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}] = \frac{1}{4} \sum_{nb} T_{nb}$$

- Tale equazione va scritta per ogni nodo interno, assieme ad opportune equazioni (condizioni al contorno) per i nodi ai bordi;
- Si ottiene un sistema lineare di equazioni.



## 1. Differenze Finite- cont.

- Si può pervenire al medesimo risultato in modo più rigoroso.
  - Serie di Taylor (funzione continua differenziabile):

$$T(x) = T(x_i) + (x - x_i) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left( \frac{\partial^n T}{\partial x^n} \right)_i + H.O.T.$$

- Per  $x = x_{i+1}$ :

$$T_{i+1} = T_i + (x_{i+1} - x_i) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_i + O[(x_{i+1} - x_i)^4]$$



## 1. Differenze Finite- *cont.*

– Da cui:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i + O[(x_{i+1} - x_i)^3]$$

– Procedendo analogamente per  $x = x_{i-1}$ :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i + O[(x_i - x_{i-1})^3]$$

– Sottraendo la prima dalla seconda, e definendo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$$



## 1. Differenze Finite- *cont.*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i = 0 = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} - \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i + O[\Delta x^3]$$

– Cioè:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

- Dimostrando che tale metodo, precedentemente ricavato per via intuitiva, è caratterizzato da un'accuratezza del 2° ordine se la distanza internodale si mantiene costante;
- Se la griglia è *sufficientemente fine*, dimezzando la distanza di griglia l'errore si riduce di un fattore 4.



## 2. Volumi Finiti (FV)

- Il metodo dei Volumi Finiti (*FV - Finite Volume*) - come si vedrà - fa uso della forma integrale delle equazioni di conservazione:
  - Il dominio è suddiviso in *volumi di controllo (CV - Control Volume)*, detti anche *celle*, adiacenti, e le equazioni di conservazione sono applicate - *enforced* - su ciascun volume;
  - Solitamente la variabile giace al centro della cella;
  - Si usano *interpolazioni*, per esprimere i valori delle variabili - o dei gradienti - sulle superfici delle celle, ed è necessario approssimare *integrali di superficie* (flussi) e di *volume*;
  - Come risultato, si ottiene - in analogia con FD - un'equazione algebrica per ogni CV, e quindi un sistema di equazioni.
- Il metodo FV può essere utilizzato facilmente per ogni tipo di griglia, strutturata e non strutturata;
- Il metodo FV è *conservativo per definizione*, se i flussi, relativi alle facce dei CV, sono gli stessi per ambedue i CV sulla faccia.



## 2. Volumi Finiti (FV) - cont.

- Il metodo dei Volumi Finiti è senz'altro il metodo più semplice:
  - Da capire (ogni termine ha un significato fisico);
  - Da implementare e programmare.
- E' particolarmente popolare nelle applicazioni Ingegneristiche della CFD;
- Numerosi codici commerciali di CFD sono FV-based;
- Fra gli svantaggi si segnala:
  - Minor rigore matematico (ma recentemente ha interessato anche i matematici);
  - Maggiore difficoltà - secondo alcuni - nell'utilizzo di schemi di ordine elevato, rispetto a FD e FEM, in particolare per griglie non strutturate.

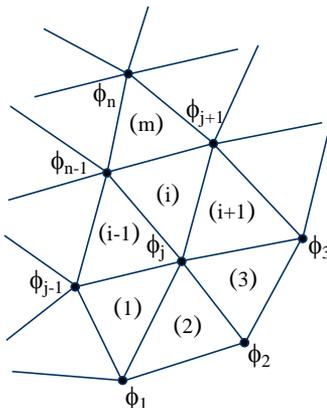


### 3. Elementi Finiti (FEM)

- Il metodo degli Elementi Finiti (FEM - *Finite Element Method*), data la sua importanza ed il suo utilizzo nella CFD industriale, verrà trattato a parte;
- Il metodo FEM presenta alcuni aspetti comuni con il metodo FV:
  - Il dominio è suddiviso in un insieme, solitamente non strutturato, di elementi;
  - Gli elementi, solitamente, sono triangoli e quadrilateri in 2D, e tetraedri ed esaedri in 3D;
- L'aspetto distintivo del metodo FEM, è l'utilizzo di funzioni di forma (che descrivono l'andamento delle variabili all'interno dell'elemento), e l'uso delle funzioni peso (*weight function*), per le quali va moltiplicata la funzione prima dell'integrazione nel dominio;
- Il metodo FEM, nei confronti del metodo FV, presenta vantaggi (es. rigore matematico; più facile adozione di schemi di ordine elevato), ma anche svantaggi (es. onere computazionale; conservatività non sempre garantita a livello di elemento).



### 3. Elementi Finiti (FEM) - cont.



Nel "processo di approssimazione mediante gli elementi finiti" si ha:

a) l'APPROSSIMAZIONE del problema con un numero finito di valori che la funzione incognita  $\Phi$  assume negli  $n$  punti nodali:

$$\phi_j \quad (j=1 \div n)$$

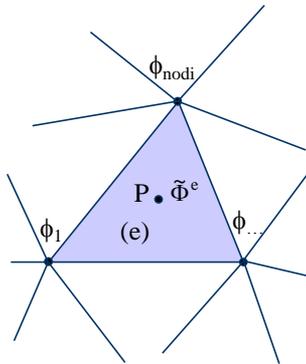
b) la CREAZIONE di  $n$  equazioni, che legano le caratteristiche di tutto il sistema, mediante somma, dei contributi dovuti a tutti gli  $m$  elementi di campo

$$D_i(\phi_j) = \sum_{e=1}^m D_i^e(\phi_j) = 0 \quad (i=1 \div n, \quad j=1 \div n)$$



### 3. Elementi Finiti (FEM) - cont.

All'interno di ogni elemento la relazione intercorrente fra la funzione incognita  $\Phi^e$  in un punto generico P e i valori che essa assume nei punti nodali dell'elemento



$$\{\phi^e\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_{nodi} \end{Bmatrix}$$

è data da

$$\Phi^e \cong \tilde{\Phi}^e = \sum_{i=1}^{nodi} N_i \phi_i = [N^e] \{\phi^e\}$$

dove  $[N^e]$  e *nodi* sono rispettivamente le *FUNZIONI DI FORMA* e il numero dei nodi dell'elemento generico *e* preso in esame



### 3. Elementi Finiti (FEM) - cont.

- Per  $\Phi^e$  si sceglie una legge polinomiale approssimante del tipo

$$\Phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots \quad \rightarrow \quad \Phi^e = [P^e] \{\alpha^e\}$$

dove:  $[P^e] = [1 \ x \ \dots]$  = matrice con le coordinte del punto generico

$$\{\alpha^e\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{Bmatrix} = \text{vettore dei coefficienti del polinomio}$$

- La funzione incognita nei punti nodali assume allora i valori seguenti

$$\{\phi^e\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \end{Bmatrix} = [C^e] \{\alpha^e\}$$

dove:

$$[C^e] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots \\ 1 & x_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \text{matrice con le coordinate dei punti nodali}$$



### 3. Elementi Finiti (FEM) - cont.

- Il vettore dei coefficienti

$$\{\alpha^e\} = [C^e]^{-1} \{\phi^e\}$$

deve avere un numero di termini  $\{\alpha^e\}$  pari al numero delle incognite  $\{\phi^e\}$ , perché la matrice  $[C^e]$  deve essere QUADRATA per l'inversione

- Sostituendola nella

$$\Phi^e = [P^e] \{\alpha^e\}$$

si ottiene

$$\Phi^e = [P^e][C^e]^{-1} \{\phi^e\} = [N^e] \{\phi^e\}$$

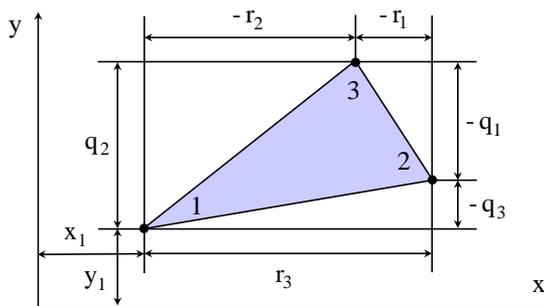
dove:  $[N^e] = [P^e][C^e]^{-1}$  rappresenta la matrice delle FUNZIONI DI FORMA dell'elemento considerato



### 3. Elementi Finiti (FEM) - cont.

- ESEMPIO: Elementi triangolari LINEARI

- Geometria



$$\begin{aligned} p_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ p_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ p_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ q_1 &= y_2 - y_3 \\ q_2 &= y_3 - y_1 \\ q_3 &= y_1 - y_2 \\ r_1 &= x_3 - x_2 \\ r_2 &= x_1 - x_3 \\ r_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

- Legge approssimante  $\Phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$



### 3. Elementi Finiti (FEM) - cont.

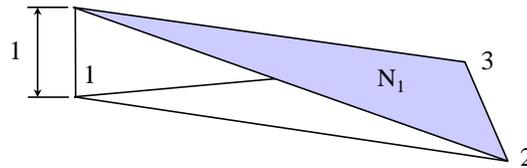
Legge approssimante (segue)

$$[P^e] = [1 \quad x \quad y] \quad [C^e] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad [C^e]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$$

- Funzioni di forma

$$[N^e] = \begin{bmatrix} \frac{p_1 + q_1 x + r_1 y}{2A} & \frac{p_2 + q_2 x + r_2 y}{2A} & \frac{p_3 + q_3 x + r_3 y}{2A} \end{bmatrix} = [[N_1] \quad [N_2] \quad [N_3]]$$

- Diagramma delle funzioni di forma



### 4. Elementi al Contorno (BEM)

- Il metodo degli elementi al contorno (BEM - *Boundary Element Method*) è ottenuto attraverso la discretizzazione di un *equazione integrale equivalente*, dal punto di vista matematico, all'equazione alle derivate parziali di partenza;
- Nel metodo BEM, l'equazione di partenza è riformulata con una *equazione integrale* definita sul *contorno del dominio* (BIE - *Boundary Integral Equation*), ed un *integrale* che correla la soluzione sul contorno con la soluzione nei punti interni;
- L'equazione integrale esiste solo per alcune classi di equazioni alle derivate parziali, e quindi il metodo BEM è meno versatile dei metodi tradizionali FEM e FV;
- Tuttavia, nei casi in cui il metodo è applicabile, si rivela semplice e particolarmente efficiente dal punto di vista computazionale.



#### 4. Elementi al Contorno (BEM) - cont.

- I vantaggi del metodo, nei casi in cui è applicabile, sono:
  - Solo il contorno del dominio - e non l'interno come FEM e FV - necessita di venire discretizzato (pannelli sul contorno);
  - La dimensione del problema è ridotta:  $3D \rightarrow 2D$ ,  $2D \rightarrow 1D$ ;
  - Semplicità nei casi di domini illimitati (es. flusso a potenziale attorno ad un profilo alare; modelli di propagazione acustica), e nel caso di singolarità.
- Le applicazioni del metodo BEM - nella sua formulazione tradizionale - sono perlopiù limitate a problemi lineari;
- Applicazioni del metodo BEM in CFD incomprimibile viscosa:
  - Limitate ad attività di ricerca di sviluppo metodologico e benchmarking;
  - Onerose dal punto di vista computazionale.



#### 4. Elementi al Contorno (BEM) - cont.

- Applicazioni tipiche del metodo BEM:
  - Moto a potenziale;
  - Acustica;
  - Meccanica della frattura.

Esempio di applicazione:

#### **Applicazione al problema dei carichi d'onda su strutture marine**

*(per gentile concessione di Giorgio Contento, Fabrizio D'Este e Riccardo Codiglia, Dip. Ingegneria Navale, del Mare e per l'Ambiente - Università di Trieste)*



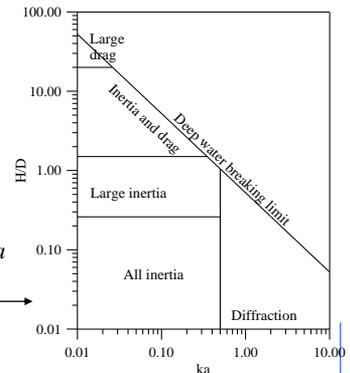
### 4. Elementi al Contorno (BEM) - cont.

- Forze in gioco:**
- *inerziali* (in fase con l'accelerazione del fluido in assenza della struttura)
  - *diffrazione* ("deviazione" delle onde per effetto della presenza della struttura)
  - *radiazione* (onde generate per effetto dei moti della struttura)
  - *viscose*

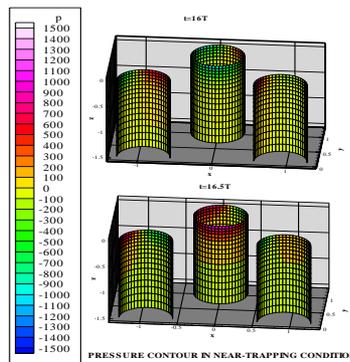
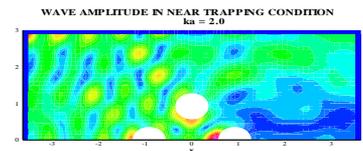
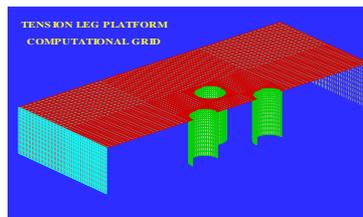
- Elementi fondamentali:**
- *lunghezza d'onda*  $\lambda$
  - *altezza d'onda*  $H$
  - *dim. caratteristica*  $D$

- Parametri adimensionali :**
- *Keulegan Carpenter*  $KC = UT/D \propto H/D$
  - *Reynolds*  $Re = \rho UD/\mu$
  - *Freq. Adimensionale*  $\omega^2(D/2g) = kD/2 = ka$

**Regimi idrodinamici dominanti :**  $\longrightarrow$



### 4. Elementi al Contorno (BEM) - cont.





## 5. Metodi spettrali

- I metodi spettrali possono essere visti come lo sviluppo estremo della classe di metodi di discretizzazione noti genericamente come “metodo del residuo pesato”:
  - Funzioni di forma - trial (o expansion) functions;
  - Funzioni peso - weight (o test) functions;
- La scelta delle funzioni di forma è ciò che caratterizza i metodi spettrali dagli altri metodi (FD, FV, FEM): esse sono *funzioni globali infinitamente derivabili*:
- Ad esempio, in FEM (ma anche FV) le funzioni di forma sono specificate per ciascun elemento: sono a carattere “locale”, e quindi particolarmente idonee a trattare geometrie complesse.



## 5. Metodi spettrali - cont.

- La scelta delle funzioni di forma distingue i tre schemi spettrali più diffusi:
  - **Galerkin**: le funzioni di forma (test) sono uguali alle funzioni peso (weight). Si tratta, quindi, di funzioni infinitamente derivabili (infinitely smooth) che, individualmente, soddisfano le funzioni di forma. L'equazione differenziale è approssimata imponendo che l'integrale del residuo, moltiplicato per ciascuna funzione test, sia nullo.
  - **Collocation**: le funzioni test sono funzioni Delta di Dirac centrate su alcuni punti particolari, detti “collocation points”. Tale approccio richiede che l'equazione differenziale sia soddisfatta in modo esatto su tali punti;
  - **Tau**: simile allo schema di Galerkin, ma nessuna delle funzioni test deve soddisfare le condizioni al contorno, per le quali si utilizza un set supplementare di equazioni.



## 5. Metodi spettrali - cont.

- I metodi spettrali, inoltre, si distinguono anche (Galerkin e Tau) per il tipo particolare di funzioni test: le più usate sono in forma di polinomi trigonometrici, polinomi di Chebyshev e polinomi di Legendre;

### ESEMPIO

- *Applicazione del metodo di Fourier-Galerkin all'equazione lineare iperbolica monodimensionale (diffusione del calore in una dimensione):*

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

dove  $T(x, \tau)$  è la soluzione (temperatura), e  $x$  è la coordinata spaziale.

L'equazione deve essere integrata con un'opportuna condizione iniziale, e condizioni al contorno.



## 5. Metodi spettrali - cont.

- Per semplicità, supponiamo che il dominio sia  $(0, 2\pi)$ , e che le condizioni al contorno siano di tipo periodico;
- Usualmente, il metodo del residuo pesato è usato solo per la discretizzazione spaziale; la soluzione approssimata è quindi:

$$T^N(x, \tau) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k(\tau) \phi_k(x)$$

- $\phi_k$  sono le funzioni trial, mentre  $a_k$  rappresentano i coefficienti dell'espansione. In generale,  $T^N$  non soddisferà l'equazione, cioè il residuo:

$$\frac{\partial T^N}{\partial \tau} - \frac{\partial T^N}{\partial x}$$

non sarà ovunque nullo.



### 5. Metodi spettrali - cont.

- Il metodo del residuo pesato richiede proprio che:

$$\int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial T^N}{\partial \tau} - \frac{\partial T^N}{\partial x} \right] \psi_k(x) dx = 0 \quad \text{Per } k = -N/2, \dots, N/2$$

dove le funzioni test  $\psi_k(x)$  determinano i “pesi” del residuo.

- Il metodo spettrale più semplice, per questo problema, si basa sui polinomi trigonometrici:

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx) \\ \psi_k(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} [\cos(kx) - i \sin(kx)] \end{aligned}$$



### 5. Metodi spettrali - cont.

- Si osservi che le funzioni test e le funzioni trial sono essenzialmente le stesse, e che soddisfano la condizione di ortogonalità:

$$\int_0^{2\pi} \phi_k(x) \psi_l(x) dx = \delta_{kl}$$

dove  $\delta_{kl}$  è la funzione Delta di Dirac ( $\delta_{kl} = 1$  se  $k=l$ ;  $\delta_{kl} = 0$  se  $k \neq l$ ).

- Applicando quindi il metodo del residuo pesato:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{l=-N/2}^{N/2} a_l(\tau) e^{ilx} \right] e^{-ikx} dx = 0$$



## 5. Metodi spettrali - cont.

- I passi successivi sono la differenziazione analitica (spaziale) delle funzioni trial:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{l=-N/2}^{N/2} \left( \frac{da_l}{d\tau} - ila_l \right) e^{ilx} \right] e^{-ikx} dx = 0$$

- e l'integrazione, che produce a sua volta le equazioni differenziali ordinarie (ODE - Ordinary Differential Equations):

$$\frac{da_l}{d\tau} - ila_l \quad k = -N/2, \dots, N/2$$

- Le condizioni iniziali per questo sistema di ODE sono i coefficienti per l'espansione della condizione iniziale:

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} u(x,0) \psi_k(x) dx$$



## 5. Metodi spettrali - cont.

- In generale - anche per problemi più complicati - la parte analitica per il metodo spettrale alla Galerkin prosegue sino alle ultime due equazioni viste.
- Usualmente, sono usate tecniche di integrazione numerica:
  - per ottenere i valori iniziali dei coefficienti dell'espansione;
  - per integrare le equazioni (ODE) nel tempo.
- Si può dimostrare che la serie di Fourier troncata:

$$T^N(x, \tau) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k(\tau) e^{ikx}$$

- converge più rapidamente di qualunque potenza (finita) di  $1/N$ :
  - questa proprietà è usualmente definita come *convergenza esponenziale*.



## 5. Metodi spettrali - *cont.*

- Tuttavia, la caratteristica di eccezionale accuratezza dei metodi spettrali è compensata da numerosi svantaggi:
  - Difficoltà nel trattamento di geometrie anche moderatamente complesse;
  - Difficoltà nell'imposizione di condizioni al contorno non-periodiche;
  - Difficoltà nella distribuzione non standard dei nodi della griglia.
- Inoltre, va osservato, con riferimento alla CFD industriale dove spesso la risoluzione della griglia è determinata dalle risorse/tempo disponibili, che l'accuratezza elevata dei metodi spettrali è ottenuta solo se si utilizzano "abbastanza nodi".  
In caso contrario, l'accuratezza può essere inferiore a quella dei metodi standard: FD, FV, FEM.
- Tali proprietà dei metodi spettrali li rendono lo strumento più utilizzato nelle attività di ricerca di base sulla turbolenza: DNS (Direct Numerical Simulation of Turbulence).



## 6. Cenni su altri metodi

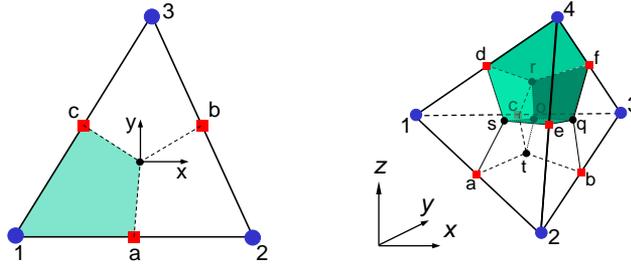
### **CVFEM - Control-Volume Finite Element Method**

- Il metodo è ottenuto dalla combinazione del metodo FV e del metodo FEM;
- Come risultato si ottiene un metodo che presenta i vantaggi originari di ambedue metodi:
  - Semplice interpretazione fisica;
  - Griglie non strutturate - geometrie complesse;
  - Conservazione garantita a livello locale (elemento) e globale.
- Esistono numerose varianti (es. *Covolume method*), ma l'iniziale popolarità del metodo è stata offuscata dall'utilizzo emergente di metodi FV su griglie non strutturate.



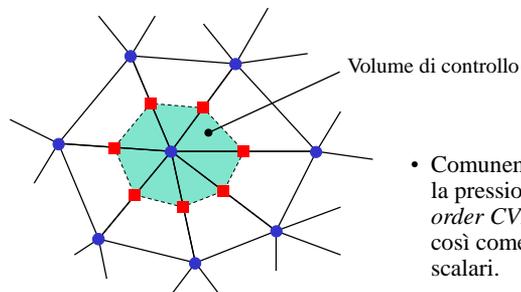
## 6. Cenni su altri metodi - CVFEM - cont.

- La griglia - di tipo FEM non strutturato - è basata, usualmente, su elementi triangolari in 2D e tetraedri in 3D;
- Ogni elemento è quindi suddiviso in sotto-volumi (*subvolumes*) che, collettivamente, costituiscono i CV attorno ai nodi della mesh FEM:



## 6. Cenni su altri metodi - CVFEM - cont.

- Esistono altre modalità per generare i sotto-volumi;
- All'interno degli elementi primari (FEM) si utilizzano funzioni di forma;
- Le equazioni algebriche sono ottenute sui sotto-volumi o sui CV, e vengono poi assemblate elemento per elemento.

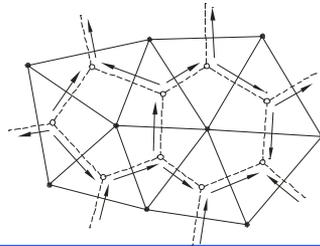


- Comunemente, sia la velocità che la pressione sono *co-locate* (*equal order CVFEM*) sui nodi primari, così come le altre grandezze scalari.



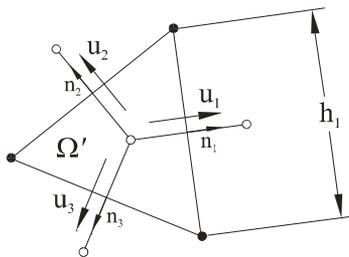
## 6. Cenni su altri metodi - CVFEM - cont.

- Un interessante variante è il metodo chiamato *Complementary volume - Covolume* - per il quale la griglia primaria è *ortogonale* alla griglia secondaria (duale):
  - Si tratta di una generalizzazione della griglia sfalsata Cartesiana;
  - La proprietà di mutua ortogonalità può essere soddisfatta da griglie composte da triangoli, trapezi e/o combinazioni di griglie Cartesiane, triangolari e trapezoidali;
- Di particolare rilievo le griglie triangolari di tipo Delaunay-Voronoi:

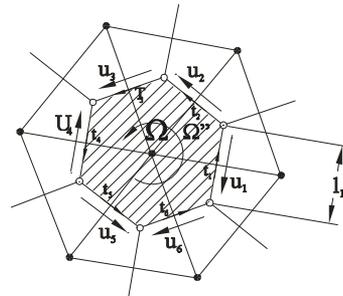


## 6. Cenni su altri metodi - CVFEM - cont.

Discretizzazione  
continuità



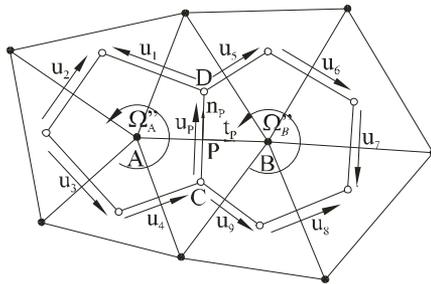
Discretizzazione  
vorticità



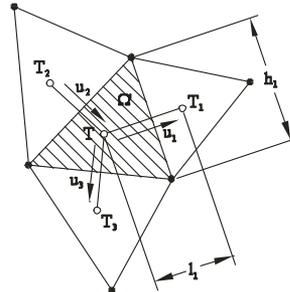


## 6. Cenni su altri metodi - CVFEM - cont.

Discretizzazione  
quantità di moto



Discretizzazione  
energia (e altri scalari)



## 6. Cenni su altri metodi

### LGA - Lattice Gas Automata

- Si tratta di un approccio completamente diverso, per il quale è stato coniato, da alcuni, il termine DFD - *Digital Fluid Dynamics*, per distinguerlo dai metodi CFD *tradizionali*:
  - Non più basato sulle equazioni di Navier-Stokes (e sulle equazioni differenziali in generale);
  - Il fluido viene rappresentato - in modo semplificato - da un numero elevato di elementi discreti (automi) del fluido, di massa unitaria, e dalle leggi che governano la microdinamica di tali particelle (collisioni);
  - Tali particelle sono caratterizzate da stati discreti di velocità (spazio delle velocità - modulo e direzione) e posizione (spazio tridimensionale);
  - Il dominio viene discretizzato, tramite una griglia (*lattice*), in un numero elevato di possibili posizioni delle particelle (*voxel*), mentre le superfici solide sono ottenute dall'intersezione dei voxel con i contorni (*surfel*);



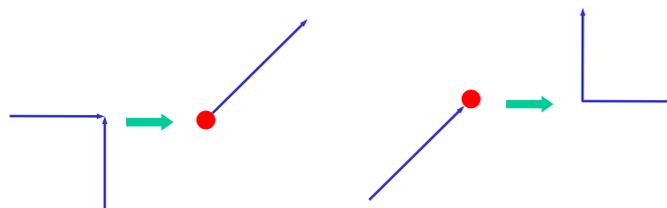
## 6. Cenni su altri metodi - LGA - cont.

- In ciascun voxel, ad ogni passo di tempo, le particelle si spostano da un voxel all'altro, ed ottengono l'equilibrio termodinamico locale attraverso un processo di collisione che dovrebbe garantire la conservazione della massa, quantità di moto ed energia;
- Le particelle, inoltre, collidono con le superfici solide, interagendo con i surfels, in modo da rispettare le condizioni al contorno imposte;
- Il calcolo avviene *solo in modalità non stazionaria*, e la soluzione stazionaria è ottenuta come asintoto per un tempo sufficientemente lungo;
- La velocità è ottenuta mediando nel tempo e nello spazio (*space-time average*): più voxel (siti) per ottenere statistiche significative;
- Non vi sono - per LGA - problemi di stabilità, pur essendo il metodo, secondo i criteri della CFD, puramente esplicito;
- Tutti i calcoli - a parte le operazioni di media - vengono eseguiti con interi (manipolazione di bits), e pertanto non vi sono problemi di round-off.



## 6. Cenni su altri metodi - LGA - cont.

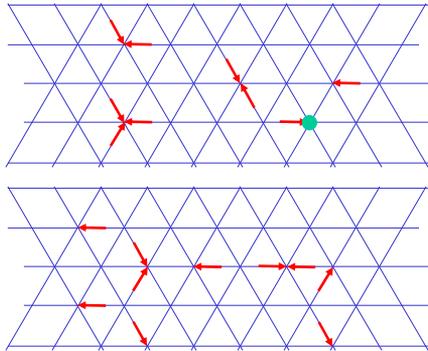
- Si può dimostrare - dalla meccanica statistica - che, sotto certe condizioni, il comportamento di tale insieme di particelle approssima le equazioni di Navier-Stokes o simili (artifacts);
- In un approccio simile, ma più costoso (LBM - *Lattice Boltzmann Method*), la distribuzione discreta delle particelle (interi) viene sostituita da una rappresentazione con numeri reali (modulo e direzione della velocità);
- Esempio di possibili interazioni fra due particelle in una griglia (lattice) quadrata bidimensionale (in rosso la particella ferma):





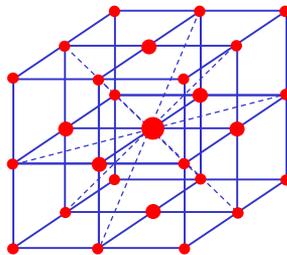
## 6. Cenni su altri metodi - LGA - cont.

- Una possibile configurazione della griglia in 2D è quella esagonale (modello FHP);
- Configurazioni microscopiche in due istanti successivi:



## 6. Cenni su altri metodi - LGA - cont.

- Il modello FHP non si presta agevolmente all'estensione 3D;
- Il modello più utilizzato in 3D è la griglia (lattice) FCHC (*Face Centered Hypercubic*);
- La proiezione nello spazio tridimensionale è rappresentata da una griglia Cartesiana:



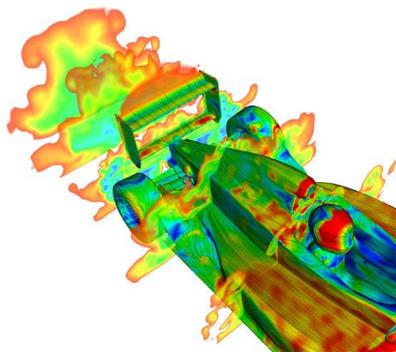


## 6. Cenni su altri metodi - LGA - cont.

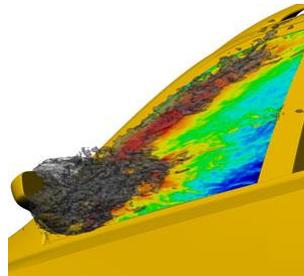
- Le difficoltà - mancata replicazione esatta, a livello macroscopico, delle equazioni di conservazione anche sul modello FCHC - sono state risolte adottando un modello a più velocità (3-5);
- Difficoltà nello stabilire vantaggi - e limitazioni - di tale approccio: brevetto dell'algoritmo: *Digital Physics*<sup>®</sup>;
- Modelli di turbolenza - equazioni di trasporto - discretizzati con tecniche tradizionali (FD);
- Computazionalmente efficiente e di facile parallellizzazione;
- Manipolazione di bits eseguita in modo molto efficiente dai moderni sotto-sistemi grafici;
- Il confronto con le tecniche della CFD tradizionale - non sempre fatto in modo corretto (unbiased) - andrebbe eseguito a parità di risorse computazionali !!



## 6. Cenni su altri metodi - LGA - cont.



Immagini tratte dal sito  
[www.exa.com](http://www.exa.com)





## 6. Cenni su altri metodi

### *Elementi Spettrali*

- Il metodo degli Elementi Spettrali è ottenuto dalla combinazione del metodo FEM e dal metodo spettrale:
  - Uso di griglia non strutturata (triangoli o quadrilateri in 2D; tetraedri o esaedri in 3D);
  - Elementi finiti di tipo *p-version* (a differenza dei più tradizionali elementi finiti tipo *h-version*, nei quali l'aumento dell'accuratezza è ottenuto dal raffinamento della griglia - riduzione di *h* - l'aumento dell'accuratezza è ottenuto dall'aumento dell'ordine *p* del polinomio utilizzato per le funzioni di forma e funzioni peso);
  - In ogni (macro-)elemento, funzioni di forma - espansione polinomiale - di ordine elevato.



## 6. Cenni su altri metodi

### *Elementi Spettrali*

- La differenza fra Elementi Spettrali e metodo FEM è data dalla diversa tipologia delle funzioni di forma (*expansion functions*) e funzioni peso (*test functions*):
  - FEM *p-version* → polinomi di Legendre in ogni elemento  $\Omega_s$ ;
  - Elementi spettrali → interpolanti di Lagrange (polinomi di Chebyshev come test functions), sui  $M_s$  nodi della formula di quadratura di Gauss-Lobatto, in ogni elemento  $\Omega_s$ .
- Gli elementi spettrali riassumono i vantaggi del metodo FEM (flessibilità geometrica, rigore matematico) con quelli dei metodi spettrali (accuratezza, convergenza esponenziale);
- Presentano, tuttavia, alcuni svantaggi (complessità nell'implementazione, oneri computazionali).