

# 1. INTRODUZIONE

Il concetto di modello ha, in realtà un significato ben più complesso di quello che comunemente gli viene assegnato. Normalmente per modello s'intende la rappresentazione in scala di un oggetto.

In realtà per modello si dovrebbe intendere una rappresentazione semplificata della realtà che ci circonda.

Noi siamo abituati inconsciamente a modellizzare tutto, al fine di ridurre il numero di variabili che intervengono in un certo fenomeno. Rimanendo nel campo dell'ingegneria è pratica comune supporre in prima approssimazione che un fenomeno sia monodimensionale (per esempio la conduzione in pareti piane infinite) per poi, se serve, passare a modelli bi o tridimensionale.

Invero, anche quando si ricavano le equazioni in forma differenziale, creiamo un modello, in questo caso matematico, poiché andiamo a supporre che l'universo sia continuo, cosa che in realtà non è.

Ad esempio, per ricavare le equazioni differenziali che reggono un fenomeno fluidodinamico si considera un volume infinitesimo di materia e su questo si eseguono i bilanci di massa, di quantità di moto, di energia e si applica l'equazione di stato. Per far questo dobbiamo definire determinate proprietà del fluido, quali la densità, la viscosità, la temperatura, la pressione, il vettore velocità.

Analizzando il problema da un punto di vista microscopico, queste grandezze sono definite in modo statistico in funzione del cammino libero medio tra due urti che avvengono tra le molecole presenti nel volume di controllo.

Se il gas è particolarmente rarefatto, fenomeno che avviene naturalmente aumentando di quota, potrebbe accadere che il cammino libero medio divenga più grande delle dimensioni del nostro volume di controllo. In queste condizioni perdono di significato le definizioni delle grandezze fisiche che intervengono nel fenomeno e, quindi, le equazioni differenziali che avevamo ricavato. Allora bisogna definire altri tipi di modelli da applicare al problema del moto in fluidi rarefatti.

Da queste osservazioni si ricava che si può parlare sia di modellizzazione fisica, sia di modellizzazione numerica.

In ogni caso la teoria generale dei modelli si basa su tre gruppi di leggi:

- ◆ Le leggi della similitudine
- ◆ Le leggi dell'analogia
- ◆ Le leggi dell'analisi dimensionale

La teoria della similitudine, che sarà quella affrontata in questo corso, consente di studiare un certo fenomeno riproducendolo con modelli simili. Vedremo meglio in seguito il significato di modelli simili. Quello che è importante rilevare, però, è che la teoria si applica sia su i modelli fisici sia su quelli matematici

La teoria dell'analogia si basa sul principio che il modello non è più la copia in scala del fatto fisico considerato, bensì un fenomeno fisico diverso che viene, però, rappresentato da equazioni formalmente uguali.

Questo concetto dovrebbe essere familiare, in quanto l'abbiamo già incontrato nello studio della trasmissione del calore. Avevamo visto che per affrontare molti problemi di trasmissione termica era conveniente applicare l'analogia elettrotermica, in cui simulavamo il fenomeno termico con una rete di resistenze elettriche. Questo è possibile perché le equazioni che reggono i due fenomeni fisici sono formalmente uguali, basta sostituire a differenze di temperatura differenze di potenziale elettrico, ai flussi termici delle correnti elettriche e così via.

Nel passato la teoria dell'analogia ebbe molta fortuna poiché permetteva di simulare fenomeni complessi, come i moti filtranti in mezzi porosi, tramite reti elettriche che erano costruite fisicamente; si andava poi a misurare nei nodi della rete i potenziali elettrici e tra due nodi le intensità di corrente.

L'avvento dei moderni calcolatori elettronici ha reso obsoleto questo modo di affrontare i problemi, anche se esistono ancora alcuni pacchetti di trasmissione del calore che utilizzano il metodo delle reti elettriche.

La teoria dimensionale, invece, viene in ausilio alle due teorie precedenti, integrandole. Questa teoria consente di raggruppare le variabili di un certo problema fisico, sistemandole in forma più utile per l'interpretazione del fenomeno. In definitiva la teoria dimensionale riduce il numero delle variabili raggruppandole in una serie di numeri adimensionali.

## 2. ANALISI DIMENSIONALE

### 2.1. Introduzione

Per comprendere a pieno il problema dell'analisi dimensionale bisogna ricordare il significato di grandezza fisica.

In realtà sarebbe più corretto parlare di entità fisica, di cui la grandezza è una sua proprietà, assieme ad altre come la natura scalare o vettoriale.

La grandezza di un'entità si può esprimere come prodotto tra la sua misura, che è un numero puro, e la sua unità di misura. Al variare dell'unità di misura varia la misura della grandezza.

Ora, essendo l'entità fisica, e quindi la sua grandezza, un invariante, all'aumentare dell'unità di misura diminuisce la sua misura.

In linea di principio potremmo definire un'unità di misura (e quindi un campione) per ogni entità fisica esistente. Oltre al fatto che non tutte le entità sono facilmente misurabili (vedi l'entropia), questo modo di procedere non sarebbe certamente comodo. Per cui si genera un insieme di entità fisiche fondamentali e si ricavano le altre in funzione di queste.

In termini matematici si può scrivere che una qualunque entità  $A$  si ricava in funzione di altre tramite una relazione generica del tipo:

$$A = \varphi (A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (1)$$

La scelta delle unità fondamentali è arbitraria e in base alla loro scelta cambiano le entità derivate. Considerando l'equazione (1) si vede che è importante che l'equazione sia omogenea, in modo che una variazione di unità di misura comporti solo la moltiplicazione di tutti i termini per una costante numerica.

Si può, quindi, affermare che un'equazione è dimensionalmente omogenea se la sua struttura non dipende dal sistema di misura adottato.

Definite, quindi, le unità fondamentali, quelle derivate si ricavano con l'ausilio di relazioni di definizione. Queste relazioni devono rispettare alcune regole.

- ◆ È bene che non intervengano dei coefficienti arbitrari, detti coefficienti parassiti, per far ritornare l'omogeneità delle relazioni.
- ◆ Di solito le relazioni sono di tipo monomio al fine di rispettare il principio di omogeneità.

Si vede, quindi, che una relazione di definizione del tipo  $m \log v$  non andrebbe bene in quanto non è omogenea ed interviene un coefficiente parassita (la base del logaritmo).

Si potrebbe obiettare che in acustica si usano delle relazioni logaritmiche; è bene ricordare, però, che il decibel non è un'unità di misura, ma un numero puro definito tramite rapporti di grandezze

fisiche. Si parla, infatti, di livelli di pressione, di densità di energia, di potenza e di intensità acustica.

## 2.2. Teorema di Buckingham

Dalle considerazioni fatte nel paragrafo precedente si potrebbe dimostrare il teorema di Buckingham (o teorema  $\pi$ ).

Il teorema di Buckingham afferma che:

**Se un'equazione è dimensionalmente omogenea, può venir ridotta nella forma di una relazione fra una serie completa di parametri adimensionali. Il numero di questi parametri è pari alla differenza tra il numero delle entità fisiche che caratterizzano il fenomeno e il numero delle grandezze fondamentali.**

Questa regola non è, però, infallibile, in quanto, come vedremo meglio in seguito, qualche gruppo potrebbe essere combinazione lineare dei precedenti.

Van Driest definì la seguente regola:

Il numero di gruppi adimensionali di una serie completa è uguale al numero totale delle grandezze in gioco meno il massimo numero nel quale si possono ancora combinare senza avere un gruppo adimensionale.

Per chiarire il teorema supponiamo di affrontare il problema della determinazione dei gruppi adimensionali che reggono il fenomeno delle perdite di carico all'interno di una tubazione.

**Dall'esperienza** sappiamo che le grandezze in gioco sono:

Grandezza	Simbolo	Eq. dimensionale
Diametro del tubo	$D$	$[L]$
Velocità media del fluido	$v$	$[LT^{-1}]$
Densità del fluido	$\rho$	$[ML^{-3}]$
Viscosità del fluido	$\mu$	$[ML^{-1}T^{-1}]$
Rugosità media della parete	$\varepsilon$	$[L]$
Caduta di pressione	$\frac{dp}{dx}$	$[ML^{-2}T^{-2}]$

Le grandezze fondamentali sono la massa  $M$ , la lunghezza  $L$ , il tempo  $T$ .

Quindi, i numeri adimensionali dovrebbero essere 3 (6-3).

Un numero adimensionale generico  $\pi$ , sarà funzione delle 6 variabili.

$$\pi = [M^0 L^0 T^0] = D^a v^b \rho^c \mu^d \varepsilon^e \left(\frac{dp}{dx}\right)^f$$

Sostituendo alle variabili le loro equazioni dimensionali, si ottiene:

$$\pi = [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [ML^{-1}T^{-1}]^d [L]^e [ML^{-2}T^{-2}]^f$$

Pertanto, affinché il generico numero sia adimensionale, la somma degli esponenti cui si devono elevare le grandezze fondamentali, deve essere nulla.

$$\begin{array}{ll} \text{Per } M & 0 + 0 + c + d + 0 + f = 0 \\ \text{Per } L & a + b - 3c - d + e - 2f = 0 \\ \text{Per } T & 0 - b + 0 - d + 0 - 2f = 0 \end{array}$$

Come si può vedere il problema consiste nel risolvere un sistema di 3 equazioni in 6 incognite che fornisce un insieme di  $\infty^3$  soluzioni linearmente indipendenti. Tutte le altre soluzioni sono combinazioni lineari.

Fisso a piacere 3 esponenti. Per esempio:

$$d = 1 \quad e = 0 \quad f = 0$$

ricavo:

$$a = -1 \quad b = -1 \quad c = -1$$

Per cui

$$\pi_1 = \frac{\mu}{Dv\rho} \quad \text{oppure} \quad \pi_1 = \frac{Dv\rho}{\mu} = \text{Re}$$

per  $\pi_2$  fisso:

$$e = 1 \quad f = 0 \quad b = 0$$

e ricavo

$$a = -1 \quad c = 0 \quad d = 0$$

per cui:

$$\pi_2 = \frac{\varepsilon}{D}$$

per  $\pi_3$  fisso:

$$d = 0 \quad e = 0 \quad f = 1$$

e ricavo:

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -1$$

per cui:

$$\pi_3 = \frac{\frac{dp}{dx} D}{\rho v^2}$$

Pertanto

$$\pi_3 = \frac{\frac{dp}{dx} D}{\rho v^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

dove  $f$  è una funzione ricavabile sperimentalmente.

Analizzando questo esempio si può vedere che, avendo un sistema di equazioni, possiamo definire una matrice dimensionale.

In base a questa osservazione Langhaar stabilì che:

**Il numero dei gruppi adimensionali di una serie completa è pari al numero totale delle variabili meno la caratteristica della loro matrice dimensionale.**

Per caratteristica o rango di una matrice s'intende l'ordine massimo dei minori non tutti nulli.

Vediamo, ora un caso a noi già noto: lo scambio termico in una tubazione circolare con temperatura di parete costante al cui interno scorre un fluido.

La relazione che lega Nusselt a Prantl e Reynolds era stata ricavata adimensionalizzando le equazioni differenziali della quantità di moto e dell'energia.

Applichiamo, invece, il teorema di Buckingham.

Dall'analisi fisica del problema ricaviamo che le grandezze che intervengono sono le seguenti:

Variabile	Simbolo	Eq. dimensionale
Diametro del tubo	$D$	$[L]$
Conducibilità termica del fluido	$k$	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$
Velocità del fluido	$v$	$[LT^{-1}]$
Massa volumica del fluido	$\rho$	$[ML^{-3}]$
Viscosità del fluido	$\mu$	$[ML^{-1}T^{-1}]$
Calore specifico a $p=cost$	$c_p$	$[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
Coefficiente medio di convezione	$h$	$[MT^{-3}\theta^{-1}]$

Le grandezze fondamentali sono la massa  $M$ , la lunghezza  $L$ , il tempo  $T$  e la temperatura  $\theta$ .

Abbiamo, quindi, 7 variabili di cui 4 linearmente indipendenti. In definitiva dovremmo ricavare 3 gruppi adimensionali.

Per determinarli esprimiamo il generico gruppo in funzione delle 7 grandezze.

$$\pi = D^a k^b v^c \rho^d \mu^e c_p^f h^g$$

Sostituendo le espressioni dimensionali

$$\pi = [L]^a [MLT^{-3}\theta^{-1}]^b [LT^{-1}]^c [ML^{-3}]^d [ML^{-1}\theta^{-1}]^e [L^2T^{-2}\theta^{-1}]^f [MT^{-3}\theta^{-1}]^g$$

Affinché  $\pi$  sia adimensionale la somma degli esponenti cui è elevata ciascuna delle grandezze fondamentali deve essere uguale a 0.

$$\begin{cases} 0a + 1b + 0c + 1d + 1e + 0f + 1g = 0 & \text{per } M \\ 1a + 1b + 1c - 3d - 1e + 2f + 0g = 0 & \text{per } L \\ 0a - 3b - 1c + 0d - 1e - 2f - 3g = 0 & \text{per } T \\ 0a - 1b + 0c + 0d + 0e - 1f - 1g = 0 & \text{per } \theta \end{cases}$$

Otengo, quindi,  $\infty^3$  gruppi adimensionali.

A mio piacere fisso i valori di 3 esponenti e risolvo il sistema.

Poiché il mio problema è la determinazione di  $h$ , mi conviene fissare  $g=1$ , e per comodità  $c = d = 0$ . Risolvendo il sistema ottengo:

$a = 1, b = -1, e = f = 0$       perciò:

$$\pi_1 = \frac{hD}{k}$$

ottengo, cioè, il numero di Nusselt

Per il secondo numero adimensionale fisso  $g = 0$  per non avere  $h$  e poi  $a = 1, f = 0$ , ottenendo:  $b = 0, c = d = 1, e = -1$ .

$$\pi_2 = \frac{vD\rho}{\mu}$$

ottengo, cioè, il numero di Reynolds.

Per il terzo numero adimensionale fisso  $e = 1, c = g = 0$ , ottenendo:

$$\pi_2 = \frac{c_p \mu}{k}$$

ottengo, cioè, il numero di Prandtl

In definitiva si ricava che:

$$\overline{N}_u = f(R_{eD}, P_r)$$

Come terzo caso consideriamo il fenomeno della resistenza su un corpo parzialmente immerso in una corrente fluida in movimento.

Dall'esperienza riteniamo che le entità fisiche che intervengono siano le seguenti:

Grandezza	Simbolo	Eq. dimensionale
Velocità indisturbata a monte	$v$	$[LT^{-1}]$
Lunghezza del corpo immerso	$l$	$[L]$
Forza esercitata dalla corrente	$F$	$[MLT^{-2}]$
Densità del fluido	$\rho$	$[ML^{-3}]$
Viscosità del fluido	$\mu$	$[ML^{-1}T^{-1}]$
Accelerazione di gravità	$g$	$[LT^{-2}]$

Un numero adimensionale generico  $\pi$ , sarà funzione delle 6 variabili.

$$\pi = [M^0 L^0 T^0] = v^a l^b F^c \rho^d \mu^e g^f$$

Si giunge quindi con il procedimento visto prima al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{array}{l}
\text{Per } M \quad 0a + 0b + 1c + 1d + 1e + 0f = 0 \\
\text{Per } L \quad 1a + 1b + 1c - 3d - 1e + 1f = 0 \\
\text{Per } T \quad -1a + 0b - 2c + 0d - 1e - 2f = 0
\end{array}$$

Cui corrisponde una matrice dimensionale:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2
\end{vmatrix}$$

La quale ha una caratteristica pari a 3, essendo il minore formato dalle ultime 3 colonne diverso da 0.

Pertanto, essendo  $n=6$ , la serie completa di numeri adimensionali è pari a 3.

Supponiamo di fissare:

$$\begin{array}{llll}
a = 1 & b = 0 & c = 0 & \text{per } \pi_1 \\
a = 0 & b = 1 & c = 0 & \text{per } \pi_2 \\
a = 0 & b = 0 & c = 1 & \text{per } \pi_3
\end{array}$$

risolvendo ricavo:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= v^3 \sqrt{\frac{\rho}{\mu g}} \\
\pi_2 &= l^3 \sqrt{\frac{\rho^2 g}{\mu^2}} \\
\pi_3 &= \frac{F \rho}{\mu^2}
\end{aligned}$$

Naturalmente le soluzioni sono  $\infty^3$ . Fissando, invece, i seguenti valori:

$$\begin{array}{llll}
d = 1 & e = -1 & f = 0 & \text{per } \pi_1 \\
d = -1 & e = 0 & f = 0 & \text{per } \pi_2 \\
d = 0 & e = 0 & f = -1 & \text{per } \pi_3
\end{array}$$

avremmo ricavato la seguente serie di numeri adimensionali:

$$\begin{array}{ll}
\pi_1 = \frac{vl\rho}{\mu} & \text{Numero di Reynolds } Re \\
\pi_2 = \frac{F}{\rho l^2 v^2} & \text{Numero di Eulero } Eu \\
\pi_3 = \frac{v^2}{l g} & \text{Numero di Froude } Fr
\end{array}$$

Pertanto la funzione da ricercare sarebbe del tipo:

$$f(\text{Re}, \text{Eu}, \text{Fr}) = 0$$

Vediamo l'ultimo esempio in cui analizziamo il problema dello scambio termico naturale in termini del tutto generici.

Dall'esperienza supponiamo che le variabili che giocano una certa importanza nel fenomeno sono:

Variabile	Simbolo	Eq. dimensionale
Lunghezza caratteristica del fenomeno	$L$	$[L]$
Conducibilità termica del fluido	$k$	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$
Salto termico tra parete e fluido indisturbato	$\Delta T$	$[\theta]$
Diffusività termica del fluido	$\alpha$	$[L^2T^{-1}]$
Viscosità cinematica del fluido	$\nu$	$[L^2T^{-1}]$
Accelerazione di gravità	$g$	$[LT^{-2}]$
Coefficiente medio di convezione	$h$	$[MT^{-3}\theta^{-1}]$
Coefficiente di dilatazione volumetrica	$\beta$	$[\theta^{-1}]$

Abbiamo 8 variabili di cui 4 linearmente indipendenti; pertanto mi aspetto di ricavare 4 gruppi adimensionali.

Per ricavarli applicheremo un metodo nuovo che permette di ricavare i gruppi in un modo più automatico.

È il metodo delle variabili ripetute. Si scelgono delle variabili in numero pari alle variabili linearmente indipendenti del problema, assicurandosi che in esse compaiano tutte le  $n$  variabili linearmente indipendenti.

Inoltre bisogna verificare che le variabili scelte siano tra loro indipendenti.

Nel nostro caso scegliamo le 4 variabili  $k$ ,  $\Delta T$ ,  $L$ ,  $\nu$  e le eleviamo a 4 esponenti incogniti  $a, b, c, d$ .

Affinché le variabili siano indipendenti l'equazione dimensionale:

$$k^a \Delta T^b L^c \nu^d = [M^0 L^0 T^0 \theta^0]$$

deve avere come unica soluzione quella banale.

Nel nostro caso:

$$M^a L^a T^{-3a} \theta^{-a} L^b L^c T^{2d} T^{-d} = M^0 L^0 T^0 \theta^0$$

Cioè

$$\text{Per } M \quad 1a + 0b + 0c + 0d = 0$$

$$\text{Per } L \quad 1a + 0b + 1c + 2d = 0$$

$$\text{Per } T \quad -3a + 0b + 0c - 1d = 0$$

$$\text{Per } \theta \quad -1a + 1b + 0c + 0d = 0$$

Che porta effettivamente alla soluzione banale:

$$a = b = c = d = 0$$

I 4 numeri adimensionali saranno:

$$\pi_1 = k^a \Delta T^b L^c \nu^d h$$

$$\pi_2 = k^a \Delta T^b L^c \nu^d \alpha$$

$$\pi_3 = k^a \Delta T^b L^c \nu^d g$$

$$\pi_4 = k^a \Delta T^b L^c \nu^d \beta$$



Troviamo ora  $\pi_1$ .

Per $M$	$1a + 0b + 0c + 0d = -1$
Per $L$	$1a + 0b + 1c + 2d = 0$
Per $T$	$-3a + 0b + 0c - 1d = 3$
Per $\theta$	$-1a + 1b + 0c + 0d = 1$

La soluzione di questo sistema è

$$a = -1 \quad b = 0 \quad c = 1 \quad d = 0$$

Che porta al numero adimensionale:

$$\pi_1 = Nu = \frac{Lh}{k}$$

Troviamo ora  $\pi_2$

Per $M$	$1a + 0b + 0c + 0d = 0$
Per $L$	$1a + 0b + 1c + 2d = -2$
Per $T$	$-3a + 0b + 0c - 1d = 1$
Per $\theta$	$-1a + 1b + 0c + 0d = 0$

La soluzione di questo sistema è

$$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0 \quad d = -1$$

Che porta al numero adimensionale:

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{\nu}$$

Che è il reciproco del Numero di Prantl

Troviamo  $\pi_3$

Per $M$	$1a + 0b + 0c + 0d = 0$
Per $L$	$1a + 0b + 1c + 2d = -1$
Per $T$	$-3a + 0b + 0c - 1d = 2$
Per $\theta$	$-1a + 1b + 0c + 0d = 0$

La soluzione di questo sistema è

$$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 3 \quad d = -2$$

Che porta al numero adimensionale

$$\pi_3 = \frac{L^3 g}{\nu^2}$$

Troviamo  $\pi_4$

$$\begin{array}{ll} \text{Per } M & 1a + 0b + 0c + 0d = 0 \\ \text{Per } L & 1a + 0b + 1c + 2d = 0 \\ \text{Per } T & -3a + 0b + 0c - 1d = 0 \\ \text{Per } \theta & -1a + 1b + 0c + 0d = 1 \end{array}$$

La soluzione di questo sistema è

$$a = 0 \quad b = 1 \quad c = 0 \quad d = 0$$

Che porta al numero adimensionale

$$\pi_4 = \Delta T \beta$$

$\pi_3$  caratterizza l'importanza delle forze di galleggiamento relative generate dalle forze viscosse. In effetti analizzandolo si può vedere che  $gL$  ha le dimensioni di una velocità al quadrato. Pertanto  $\sqrt{\pi_3}$  può essere interpretato come un numero di Reynolds.

$\pi_4$  caratterizza, invece, l'importanza dell'espansione del fluido dovuta ad effetti termici. Di solito al posto di questi due numeri adimensionali si utilizza il loro prodotto a cui si dà il nome di numero di Grashof

$$\pi_3 \pi_4 = Gr_L = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$$

Invece si devono considerare  $\pi_3$  e  $\pi_4$  indipendenti quando trattiamo sistemi rotanti o situazioni in cui  $\beta\Delta T$  vale circa 1.

È bene precisare che l'analisi dimensionale non porta alla comprensione piena del fenomeno poiché non ci fornisce la funzione che lega la serie completa di numeri adimensionali, ma è un ottimo mezzo per aiutarci a ricavare per via sperimentale questa funzione.

La domanda che sorge legittima è la seguente:

Perché debbo affidarmi ad un metodo così aleatorio come Buckingham per ricavare i gruppi adimensionali, quando potrei adimensionalizzare le equazioni che reggono il fenomeno, giungendo ad una soluzione che ha un significato fisico e più rapidamente?

La risposta sta nel fatto che purtroppo non sempre possiedo un modello matematico del mio fenomeno.

A conclusione dell'argomento diamo ancora una definizione.

I numeri adimensionali caratterizzati dal fatto di essere il rapporto tra due sole entità, prendono il nome di fattori di forma.

### 3. TEORIA DELLA SIMILITUDINE

I risultati di una serie di prove sperimentali su un modello fisico (ma il discorso vale anche per i modelli matematici) sono riportabili sul prototipo solo se sono rispettate un certo numero di relazioni che costituiscono la legge della similitudine.

Esistono diversi tipi di similitudine:

### Similitudine geometrica.

Affermeremo che due corpi sono geometricamente simili se esiste una corrispondenza fra punti omologhi del prototipo e del modello (in termini più semplici, se esiste un rapporto di scala costante tra i due). Tuttavia, talvolta, esiste una diversa scala di riduzione tra le componenti cartesiane. Si crea così quello che comunemente viene definito un modello distorto. Un classico esempio di modello distorto sono i modelli di porti o fiumi, in cui la scala verticale è diversa da quella della pianta al fine di eliminare l'effetto della tensione superficiale sul modello.

### Similitudine cinematica.

Nella similitudine cinematica si introduce una scala dei tempi. La similitudine cinematica è importante quando si manifestano dei moti o delle correnti di tipo periodico o transitorio, oppure compaiono delle lente deformazioni. Due sistemi si definiscono cinematicamente simili quando particelle omologhe occupano posizioni omologhe in tempi omologhi.

Ora definita  $k_l$  la scala delle lunghezze e  $k_t$  quella dei tempi, la scala delle velocità  $k_v$  è uguale a:

$$k_v = \frac{k_l}{k_t} \quad (2)$$

mentre la scala delle accelerazioni  $k_a$  è uguale a:

$$k_a = \frac{k_l}{k_t^2} = \frac{k_v^2}{k_l} \quad (3)$$

### Similitudine materiale

Avremo similitudine materiale quando le masse di elementi omologhi stanno in rapporto costante  $k_m$ .

### Similitudine dinamica

Si dice che due sistemi sono dinamicamente simili se parti omologhe sono soggette a sistemi di forze omologhe.

Rispettata la similitudine cinematica e materiale si può affermare che in un sistema cartesiano le scale delle forze  $k_{F_x}$ ,  $k_{F_y}$ ,  $k_{F_z}$ , valgono:

$$k_{F_x} = \frac{k_m k_x}{k_t^2} \quad (4)$$

$$k_{F_y} = \frac{k_m k_y}{k_t^2} \quad (5)$$

$$k_{F_z} = \frac{k_m k_z}{k_t^2} \quad (6)$$

Se poi il modello è anche geometricamente simile avremo che:

$$k_F = \frac{k_m k_l}{k_t^2} \quad (7)$$

Definite le varie forme di similitudine cerchiamo, ora, di ricavare le leggi principali della similitudine.

Abbiamo già visto che adimensionalizzando le equazioni che reggono un certo fenomeno (ammesso di conoscerle) o applicando il teorema di Buckingham, si giunge alla generica relazione:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0 \quad (8)$$

Esprimendo questa relazione in forma esplicita ed applicandola al prototipo e al modello si giunge alle seguenti due relazioni:

$$\pi_{1p} = f(\pi_{2p}, \pi_{3p}, \dots, \pi_{np}) \quad (8)$$

$$\pi_{1m} = f(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \pi_{nm}) \quad (9)$$

Essendo la funzione  $f$  la stessa nei due casi (per esempio l'equazione dell'energia) si vede che, affinché un particolare numero adimensionale sia uguale fra modello e prototipo, per esempio  $\pi_{1p} = \pi_{1m}$ , allora dovranno valere anche le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \pi_{2p} &= \pi_{2m} \\ \pi_{3p} &= \pi_{3m} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\pi_{np} = \pi_{nm}$$

### Se accade ciò si dice che modello e prototipo sono in similitudine completa.

Purtroppo nella maggior parte dei casi non è possibile ottenere una condizione di similitudine completa, in quanto non sempre è possibile trovare materiali o fluidi che abbiano proprietà tali da permettere di rispettare il sistema di equazioni appena visto.

In questi casi si deve utilizzare un modello distorto; un modello, cioè, in cui non sono rispettate tutte le condizioni di similitudine.

Utilizzando modelli distorti bisogna introdurre un fattore di previsione che corregge l'uguaglianza tra numero adimensionale del modello e del prototipo.

Il fattore di previsione è determinato tramite prove sperimentali aggiuntive.

Un fenomeno molto importante, legato ai modelli distorti, è quello dell'**effetto scala**.

Per chiarire questo concetto consideriamo alcuni esempi pratici.

Il primo esempio è quello del modello di un porto in cui si studiano gli effetti ondosi sulle strutture portuali. Considerando un moto ondoso in alto fondale, l'effetto della tensione superficiale,  $\sigma$ , è

trascurabile. Ciò significa che potremmo trascurare il numero di Weber ( $W = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$ ). Sul modello,

invece la tensione superficiale gioca un ruolo per nulla trascurabile, soprattutto se la lunghezza d'onda è inferiore ad un certo valore (circa 25 mm).

Un altro esempio sono le prove in galleria del vento su veicoli od aerei. In questi casi le superfici del prototipo si possono considerare lisce e quindi è più che ammissibile trascurare il fattore di forma rappresentato dalla rugosità relativa.

Sul modello, invece, non si riescono ad ottenere delle rugosità in scala perfetta. Si ottiene, pertanto un modello distorto.

In questi casi o valutiamo un fattore di previsione, oppure costruiamo il modello il più grande possibile, compatibilmente con le nostre esigenze sperimentali, al fine di minimizzare l'effetto scala.

## 4. MODELLI IN FLUIDODINAMICA

### 4.1. Introduzione

La modellistica ha avuto un grossissimo sviluppo, soprattutto in fluidodinamica, a causa della difficoltà di risoluzione delle equazioni di Navier – Stokes. Tale fatto ha comportato, perciò, uno sviluppo notevole della fluidodinamica sperimentale.

Come vedremo, però, anche l'approccio modellistico non è esente da problemi, obbligando il ricercatore ad una certa prudenza nell'analisi dei dati.

### 4.2. Problema generale

Le grandezze che intervengono in un problema fluidodinamico generico, supposte trascurabili le grandezze termiche, chimiche, ecc., sono:

la generica forza  $F$  (potrei considerare anche la pressione o il gradiente di pressione), la lunghezza caratteristica  $l$ , la velocità  $v$ , la massa volumica  $\rho$ , l'accelerazione di gravità  $g$ , la viscosità dinamica  $\mu$ , la velocità del suono  $a$ , la tensione superficiale  $\sigma$  e da ogni altra caratteristica geometrica importante  $\lambda_i$  (per esempio la rugosità, la forma ecc.).

Nella trattazione che seguirà trascureremo la tensione superficiale in quanto la sua importanza è limitata ad alcuni problemi specifici quali l'ebollizione o la cavitazione, ferme restando le osservazioni che abbiamo fatto nel paragrafo precedente, riferendoci al problema dell'effetto scala. Sotto queste ipotesi si può, quindi scrivere che:

$$f(F, l, g, v, a, \mu, \rho, \lambda_i) = 0 \quad (11)$$

Utilizzando l'analisi dimensionale si arriva alla seguente relazione:

$$\varphi(\text{Eu}, \text{Re}, \text{Fr}, \text{M}, \frac{\lambda_i}{l}) = 0 \quad (12)$$

Abbiamo già visto il significato dei simboli a parte  $M$  che rappresenta il Numero di Mach.

Il Numero di Mach è un numero adimensionale che tiene conto dei fenomeni di comprimibilità del fluido. È definito come:

$$\text{M} = \frac{v}{a} \quad (13)$$

dove:

$a$  è la velocità del suono nel fluido.

Al posto del Numero di Mach si può utilizzare quello di Cauchy che per il nostro ragionamento risulta più significativo.

Se ricordiamo che la velocità del suono è funzione del modulo di comprimibilità volumetrica  $E_v$ , tramite la relazione:

$$a = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad (14)$$

sostituendo la (14) nella (13) otteniamo:

$$M = v \sqrt{\frac{\rho}{E_v}}$$

ed elevando al quadrato si ottiene il numero di Cauchy:

$$\text{Cauchy} = \frac{v^2 \rho}{E_v}$$

Quindi la relazione (12) diviene:

$$\varphi\left(\frac{F}{\rho v^2 l^2}, \frac{vl\rho}{\mu}, \frac{v^2}{gl}, \frac{v^2 \rho}{E_v}, \frac{\lambda_i}{l}\right) = 0 \quad (15)$$

o in forma esplicita:

$$\frac{F}{\rho v^2 l^2} = \psi\left(\frac{vl\rho}{\mu}, \frac{v^2}{gl}, \frac{v^2 \rho}{E_v}, \frac{\lambda_i}{l}\right) \quad (16)$$

Dalla teoria della similitudine si ricava che per ottenere una similitudine completa si devono rispettare le seguenti condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_p v_p l_p}{\mu_p} = \frac{\rho_m v_m l_m}{\mu_m} \\ \frac{\rho_p v_p^2}{E_{vp}} = \frac{\rho_m v_m^2}{E_{vm}} \\ \frac{v_p^2}{gl_p} = \frac{v_m^2}{gl_m} \\ \frac{\lambda_{ip}}{l_p} = \frac{\lambda_{im}}{l_m} \end{array} \right. \quad (17)$$

L'ultima delle quattro relazioni non afferma altro che la necessità di rispettare la similitudine geometrica per ottenere una similitudine completa.

Analizzando le prime tre relazioni si vede che le variabili adimensionali sono 5 ( $k_\rho = \frac{\rho_m}{\rho_p}$ ,

$k_\mu = \frac{\mu_m}{\mu_p}$ ,  $k_{E_v} = \frac{E_{vm}}{E_{vp}}$ ,  $k_l = \frac{l_m}{l_p}$ ,  $k_v = \frac{v_m}{v_p}$ ). Per avere una soluzione devo fissare 2 di queste

variabili, per esempio  $k_\mu$  e  $k_\rho$ . Ma fissare queste variabili significa fissare il fluido del modello (quello del prototipo è uno dei dati di partenza). Diventa, così, quasi impossibile ottenere una similitudine completa, poiché molto difficilmente il coefficiente di comprimibilità volumetrica per il modello, che ricaverò dalla soluzione del sistema, sarà uguale a quello del fluido che effettivamente utilizzo.

### 4.3. Fluidi incomprimibili

L'ipotesi di incomprimibilità del fluido si applica a moltissimi casi idraulici quando la velocità del fluido è molto più piccola di quella del suono (circa 340 m/s in aria a 20 °C e circa 1450 m/s in acqua).

Questo è, quindi un caso abbastanza comune in fluidodinamica.

Sotto queste ipotesi la relazione di similitudine si riduce a:

$$\frac{F}{\rho v^2 l^2} = \psi \left( \frac{vl\rho}{\mu}, \frac{v^2}{gl}, \frac{\lambda_i}{l} \right) \quad (18)$$

e le condizioni di similitudine si riducono a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_p v_p l_p}{\mu_p} = \frac{\rho_m v_m l_m}{\mu_m} \\ \frac{v_p^2}{gl_p} = \frac{v_m^2}{gl_m} \\ \frac{\lambda_{ip}}{l_p} = \frac{\lambda_{im}}{l_m} \end{array} \right. \quad (19)$$

Da questa relazione si vede che fissato il fluido si ottiene, rispettando la similitudine geometrica, un sistema di due equazioni in due incognite e quindi risolvibile.

In molti casi, però, motivazioni tecnico- economiche impongono di utilizzare lo stesso fluido nel modello e nel prototipo.

Il sistema di equazioni (19) si riduce al seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l_m}{l_p} = \frac{v_m}{v_p} \\ \frac{l_m}{l_p} = \left( \frac{v_m}{v_p} \right)^2 \end{array} \right. \quad (20)$$

Questo sistema ammette soluzione solo quando il modello è dimensionalmente uguale al prototipo. Si deve quindi ricorrere ad un modello distorto.

In questo caso si presentano allo sperimentatore 3 possibilità.

- 1) Predominano gli effetti dissipativi legati alla viscosità e alla turbolenza.
- 2) Predominano gli effetti legati a trasformazioni tra energia cinetica e potenziale, o scambi di energia meccanica con l'esterno del sistema.
- 3) I due effetti sono comparabili.

#### Similitudine di Reynolds

Se ci troviamo nel primo caso, possiamo trascurare nella similitudine il numero di Froude.

In questo caso è sempre possibile rispettare l'uguaglianza tra il numero di Reynolds del prototipo e quello del modello, sia si usi lo stesso fluido, sia si usino fluidi diversi.

Il problema che sorge è di tipo operativo. Infatti supponendo di utilizzare lo stesso fluido, se costruiamo un modello per esempio in scala 1/10, dovremo avere nel modello una velocità 10 volte maggiore di quella del prototipo.

Si potrebbe pensare di utilizzare un fluido nel modello con una viscosità cinematica molto più piccola di quella del prototipo. Questa via, però, non è praticabile se nel prototipo si utilizza acqua in quanto tutti i fluidi che in pratica si potrebbero utilizzare hanno una viscosità cinematica maggiore di quella dell'acqua.

Il discorso è diverso se il fluido utilizzato nel prototipo è aria in quanto in questo caso si possono eseguire le prove in acqua, cosa che comunemente viene fatta nelle prove di veicoli terrestri.

### **Similitudine di Froude**

Quando i fenomeni d'onda sono preponderanti basta rispettare la similitudine di Froude. È il caso tipico dei deflussi da luci a battente e stramazzi. In realtà la similitudine di Froude è rispettata anche in tutti quei casi in cui l'influsso di Reynolds non è trascurabile ma rimane costante al variare della velocità. È il caso della diffusione degli inquinanti in atmosfera, anche se in questo caso si usano dei numeri simili a Froude.

Nella similitudine di Froude fissata la scala,  $k_l$ , si ottiene che:

$$k_v = k_l^{\frac{1}{2}}$$

Da questa relazione si vede che per le prove in aria si devono utilizzare le cosiddette gallerie a bassa velocità.

### **Presenza contemporanea di fenomeni viscosi e potenziali.**

In questi casi, quando in pratica non si potrebbe trascurare gli effetti del numero di Reynolds e di Froude, lo sperimentatore deve arrangiarsi.

È quello che avviene nelle prove in vasca navale. Su un natante sono presenti due forme di resistenza all'avanzamento di valori comparabili. Sull'opera viva dello scafo agiscono effetti dissipativi dovuti alla viscosità del fluido e alla forma dello scafo. Nella zona di separazione tra l'opera viva e quella morta sono presenti fenomeni d'onda.

In questo caso si eseguono le prove su modello. La resistenza misurata sarà la somma della resistenza viscosa e di quella d'onda. Si valuta la resistenza viscosa tramite formule empiriche. Si ottiene quella d'onda per differenza. Tramite la similitudine di Froude si valuta la resistenza d'onda del prototipo. A questa si somma la resistenza viscosa ottenuta con formule empiriche e si ottiene, infine, la resistenza totale del prototipo.



## 5. ESERCIZI

### Esercizio 1

Un olio di viscosità cinematica  $\nu = 4,70 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$  è utilizzato in un prototipo in cui sono predominanti le forze dovute alla viscosità e alla gravità. Si vuole sperimentare il sistema con un modello in scala 1/5. Quanto deve valere la viscosità del liquido nel modello per avere una similitudine completa?

### Soluzione

Dalla teoria dell'adimensionalizzazione sappiamo che i numeri che entrano in gioco sono quelli di Froude  $\left( Fr = \frac{v}{\sqrt{l_c g}} \right)$  e di Reynolds  $\left( Re = \frac{v l_c}{\nu} \right)$ .

Dalla teoria della similitudine sappiamo, invece, che affinché i valori misurati sul modello siano riportabili sul prototipo deve essere rispettata l'uguaglianza dei numeri dimensionali tra modello e prototipo.

Pertanto:

$$Fr_p = Fr_m$$

$$Re_p = Re_m$$

### Esplicitando

$$\frac{v_p}{l_{cp}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}} = \frac{v_m}{l_{cm}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{v_m}{v_p} = \left( \frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\frac{v_p l_{cp}}{\nu_p} = \frac{v_m l_{cm}}{\nu_m} \Rightarrow \frac{v_m}{v_p} = \frac{\nu_m l_{cm}}{\nu_p l_{cp}}$$

Ma ricordando la (1) si ottiene:

$$\frac{v_m}{v_p} = \left( \frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{5} \right) = \left( \frac{1}{5} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Da cui:

$$\nu_m = \nu_p \left( \frac{1}{5} \right)^{\frac{3}{2}} = 4,70 \cdot 10^{-5} \left( \frac{1}{5} \right)^{\frac{3}{2}} = 4,20 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

## Esercizio 2

In un tubo di diametro  $D = 200$  mm scorre a bocca piena dell'acqua alla temperatura di  $15$  °C con una velocità  $v = 4,0$  m/s. A quale velocità dovrebbe scorrere un olio combustibile alla temperatura di  $32$  °C affinché i due flussi siano dinamicamente simili ? ( si consideri la viscosità cinematica dell'olio pari a  $\nu_{olio} = 2,97 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$  )

### Soluzione

Essendo il flusso a bocca piena, l'influsso dell'accelerazione di gravità e della tensione superficiale è trascurabile.

Pertanto il flusso è soggetto solo alle forze viscosi e a quelle d'inerzia. Ciò significa che l'unico numero adimensionale che interviene è quello di Reynolds.

Si può, quindi scrivere che:

$$Re_{H_2O} = Re_{olio}$$

Da cui:

$$v_{olio} = v_{H_2O} \frac{\nu_{olio}}{\nu_{H_2O}}$$

Dalle tabelle per l'acqua ricavo

$$\nu_{H_2O15^\circ C} = 1,13 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

E quindi:

$$v_{olio} = 4,0 \frac{2,97 \cdot 10^{-6}}{1,13 \cdot 10^{-6}} = 10,5 \frac{m}{s}$$

## Esercizio 3.

Un modello di sottomarino in scala 1/15 viene provato in una vasca idrodinamica, completamente immerso in acqua salata. Se la velocità del prototipo è di  $12$  nodi, a quale velocità dovrà essere provato il modello affinché i risultati ottenuti sperimentalmente abbiano senso?

### Soluzione

Essendo il sottomarino completamente immerso, le forze preponderanti sono quelle d'inerzia e viscosi; pertanto va rispettata l'uguaglianza dei numeri di Reynolds.

$$\frac{v_p l_{cp}}{v} = \frac{v_m l_{cm}}{v} \Rightarrow v_m = v_p \frac{l_{cp}}{l_{cm}}$$

$$V_m = v_p 15 = 180 \text{ nodi} = 93 \text{ m/s} = 334 \text{ km/h}$$

#### Esercizio 4

La resistenza all'avanzamento di un modello di nave lungo 2,50 m e provato alla velocità di 2,0 m/s in una vasca con acqua dolce, è stata di 4,40 kg.

Quale dovrebbe essere la velocità del prototipo, lungo 40 m?

#### Soluzione

In questo caso bisognerebbe rispettare sia l'uguaglianza dei numeri di Reynolds sia quella dei numeri di Froude.

Come si è visto nel corso ciò è impossibile se viene utilizzato lo stesso fluido. Questo è il classico caso di un modello distorto.

Come si è visto si preferisce rispettare l'uguaglianza dei numeri di Froude e calcolare le resistenze viscosi e di forma.

$$\frac{v_p}{\sqrt{l_{cp} g}} = \frac{v_m}{\sqrt{l_{cm} g}}$$

$$v_p = v_m \sqrt{\frac{l_{cp}}{l_{cm}}}$$

$$v_p = 2,0 \sqrt{\frac{40}{2,5}} = 8,0 \frac{m}{s}$$

#### Esercizio 5

Un ala di aeroplano a pianta rettangolare di corda  $c_p = 900 \text{ mm}$  deve muoversi in aria ad una velocità  $v_p = 90 \text{ nodi}$ .

Le prove in galleria vengono effettuate con un modello avente una corda  $c_m = 75 \text{ mm}$  ed una velocità dell'aria  $v_m = 108 \text{ nodi}$ .

Se la temperatura dell'aria sia nel prototipo che nel modello è di  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , quale deve essere la pressione in galleria per rispettare la similitudine?

#### Soluzione

In questo caso bisogna rispettare la similitudine di Reynolds.

$$\frac{v_m c_m}{\nu_m} = \frac{v_p c_p}{\nu_p}$$

Da cui si ricava:

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{v_m c_m}{v_p c_p} \Rightarrow \frac{108}{90} \frac{75}{900} = \frac{1}{10}$$

D'altro canto si sa che la viscosità dinamica non viene sensibilmente influenzata dalla pressione mentre lo è la massa volumica del gas.

Per cui:

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{\mu}{\rho_m} \frac{\rho_p}{\mu} = \frac{\rho_p}{\rho_m} = \frac{1}{10}$$

Dato che la trasformazione è isoterma vale la relazione:

$$\frac{p}{\rho} = \text{cost}$$

Da cui.

$$\frac{p_m}{p_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} = 10$$

Per tanto la pressione in galleria deve essere dell'ordine dei 10 *bar*.

## Esercizio 5

Consideriamo l'ala e la galleria di prova dell'esercizio precedente.

La scala del modello è di 1/12. Il profilo aerodinamico è un NACA 2412. L'apertura alare del prototipo è di 10 m.

Tramite una bilancia sono state rilevate sul modello le seguenti forze aerodinamiche in direzione perpendicolare (portanza L) e parallela al flusso (resistenza D) al variare dell'angolo di incidenza.

$\alpha$	L [N]	D [D]
0	286,50	7,45
4	744,91	8,37
8	1237,70	13,52
12	1661,73	22,35

Quale sarà la portanza e la resistenza (trascurando quella indotta) che agirà sull'aereo reale al variare dell'angolo di incidenza?

Soluzione

Per prima cosa trasformiamo i nostri dati in unità del sistema internazionale.

$$v_p = 46,30 \frac{m}{s}$$

$$v_m = 55,56 \frac{m}{s}$$

$$\nu_p = 1,49 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$\nu_m = 1,49 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

Calcoliamo, ora, la massa volumica del fluido del prototipo e del modello considerando che il prototipo vola a livello del mare con una pressione atmosferica di 1 bar.

$$\rho_p = \frac{p_p}{RT} = \frac{1 \cdot 10^5}{287,09 \cdot 293} = 1,19 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_m = \frac{p_m}{RT} = \frac{10 \cdot 10^5}{287,09 \cdot 293} = 11,9 \frac{kg}{m^3}$$

Valutiamo il numero di Reynolds.

Scegliamo i dati del prototipo (sul modello  $Re$  sarà lo stesso).

$$Re_p = \frac{0,900 \cdot 46,30}{1,49 \cdot 10^{-5}} = 2,8 \cdot 10^6$$

Ci troviamo, quindi, in condizioni di moto turbolento. Inoltre per i profili NACA della serie a 4 o 5 cifre variazioni del Numero di Reynolds comprese tra 3 e 6 milioni non generano variazioni sostanziali sul valore delle forze aerodinamiche in gioco.

Valutiamo anche i numeri di Mach del prototipo e del modello per essere sicuri di poter trascurare i fenomeni di comprimibilità.

La velocità del suono,  $a$ , vale:

$$a = \sqrt{kRT} = \sqrt{1,4 \cdot 287,09 \cdot 293} = 343 \frac{m}{s}$$

$$M_p = \frac{46,30}{343} = 0,135 \quad M_m = 0,162$$

Quindi ci troviamo in una zona lontana da quella in cui si cominciano a far sentire i fenomeni di comprimibilità ( $M \cong 0,3 \div 0,4$ ). Inoltre si può osservare che, come dovevamo aspettarci, i numeri di Mach del prototipo e del modello sono diversi.

Dai dati ricavati sperimentalmente si possono calcolare i numeri di Eulero riferiti alla portanza e alla resistenza in funzione dell'angolo di incidenza.

$$Eu_{Lm} = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_m S_m v_m^2} \quad Eu_{Dm} = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_m S_m v_m^2}$$

Dove  $S$  è l'area proiettata sul piano orizzontale dell'ala a incidenza nulla.

Al primo termine diamo il nome di coefficiente di portanza  $c_L$  (Lifting coefficient) mentre definiamo il secondo coefficiente di resistenza,  $c_D$  (Drag coefficient).

Da ciò ricaviamo:

$\alpha$	$c_{Lm}$	$c_{Dm}$
0	0,25	0,0065
4	0,65	0,0073
8	1,08	0,0118
12	1,45	0,0195

La teoria della similitudine afferma che, essendo trascurabili gli effetti di comprimibilità, essendo rispettata l'uguaglianza dei numeri di Reynolds ed essendo il modello in scala rispetto al prototipo (in realtà avremmo dovuto rispettare anche la scala delle rugosità) allora dovranno essere uguali anche i numeri di Eulero.

Da cui si ricava

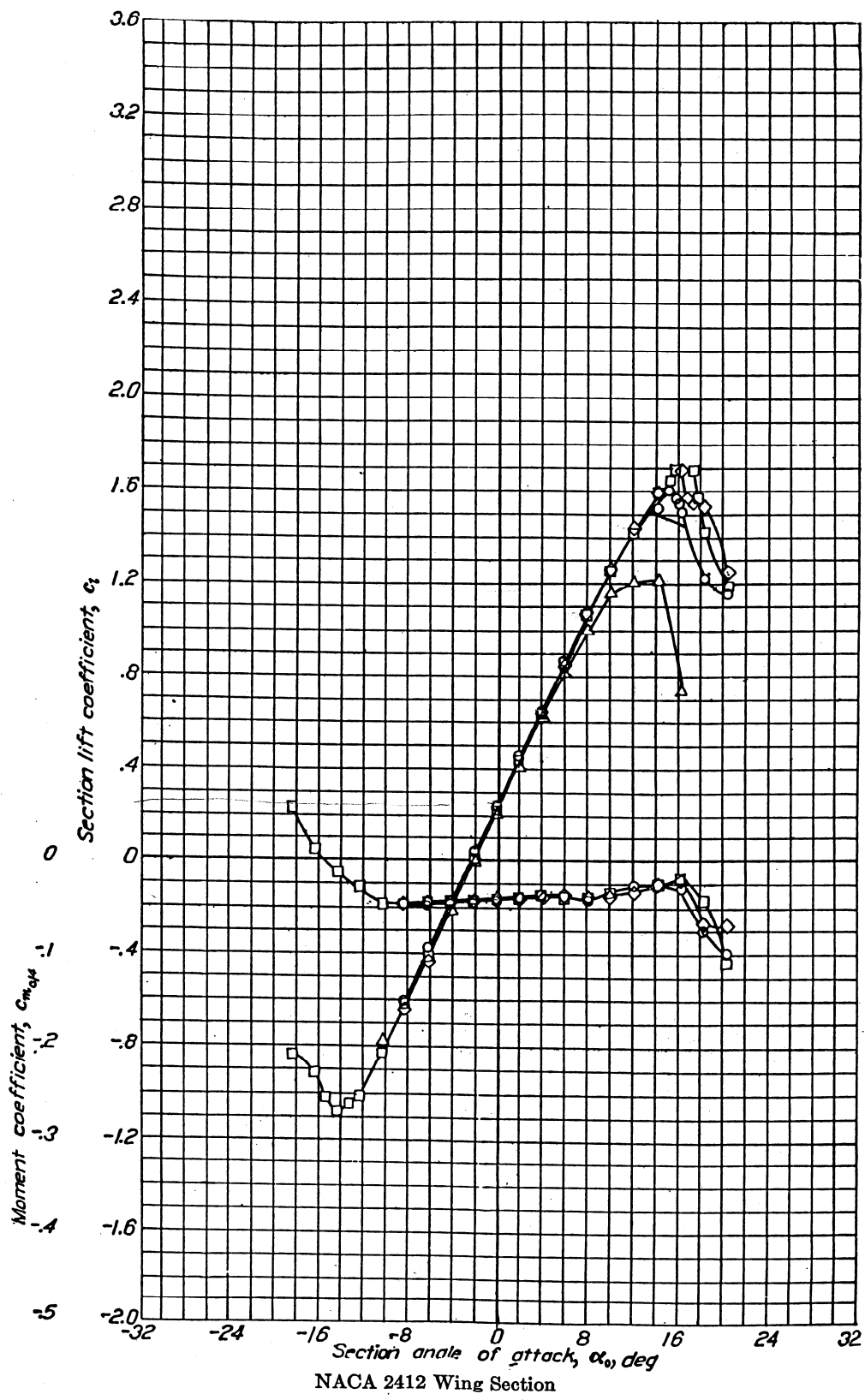
$$L_p = \frac{1}{2} c_L \rho_p S_p v_p^2$$

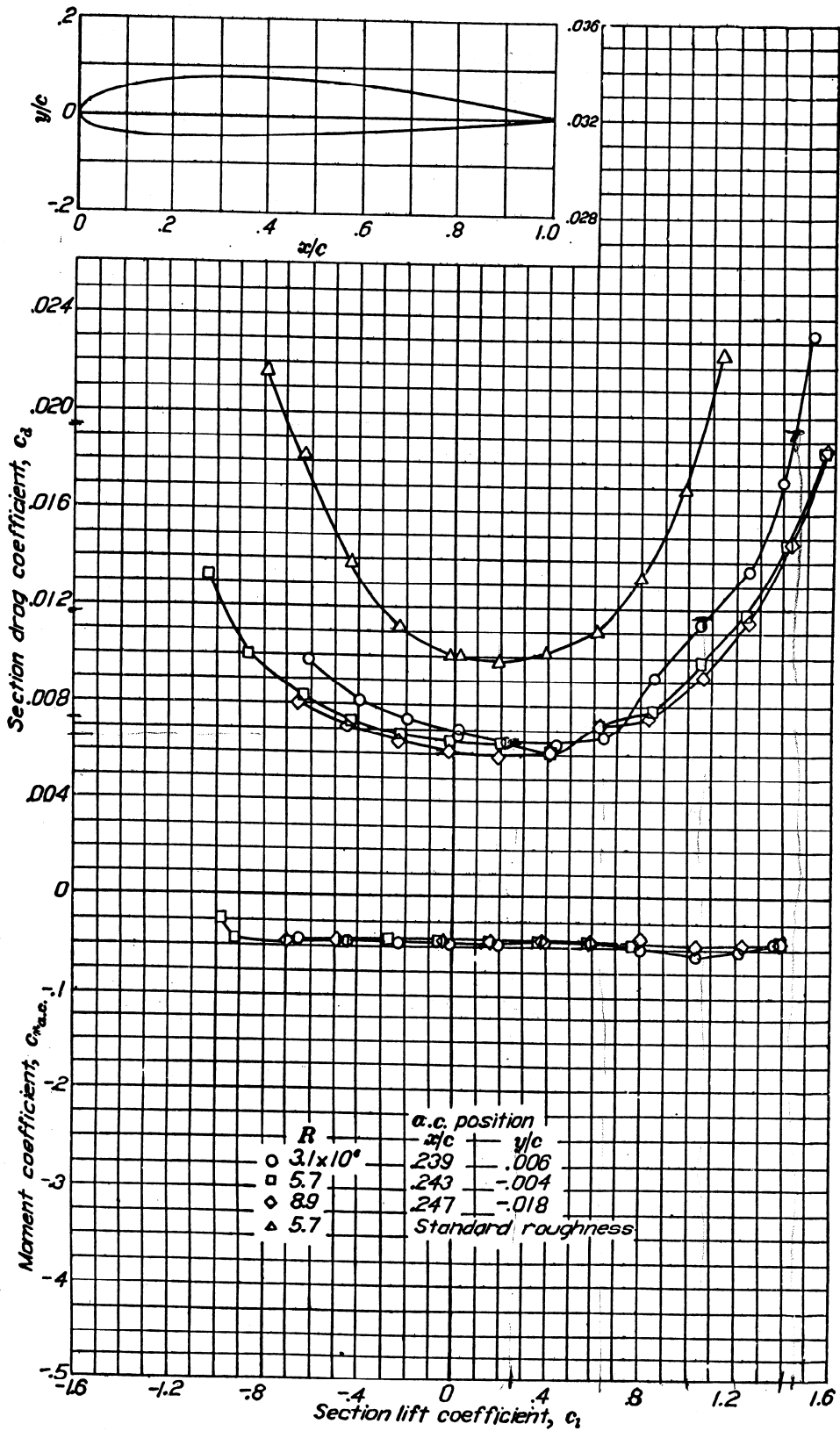
$$D_p = \frac{1}{2} c_D \rho_p S_p v_p^2$$

Da queste relazioni ricavo i seguenti valori:

$\alpha$	L [N]	D [N]
0	2747	71
4	7143	80
8	11868	130
12	15934	214

Di seguito sono riportati i diagrammi riferiti al profilo NACA 2412.





NACA 2412 Wing Section (Continued)