
ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

DELLA CONVEZIONE NEI FLUIDI INCOMPRESSIBILI

Carlo Nonino

Università degli Studi di Udine
Dipartimento di Energetica e Macchine



METODI NUMERICI

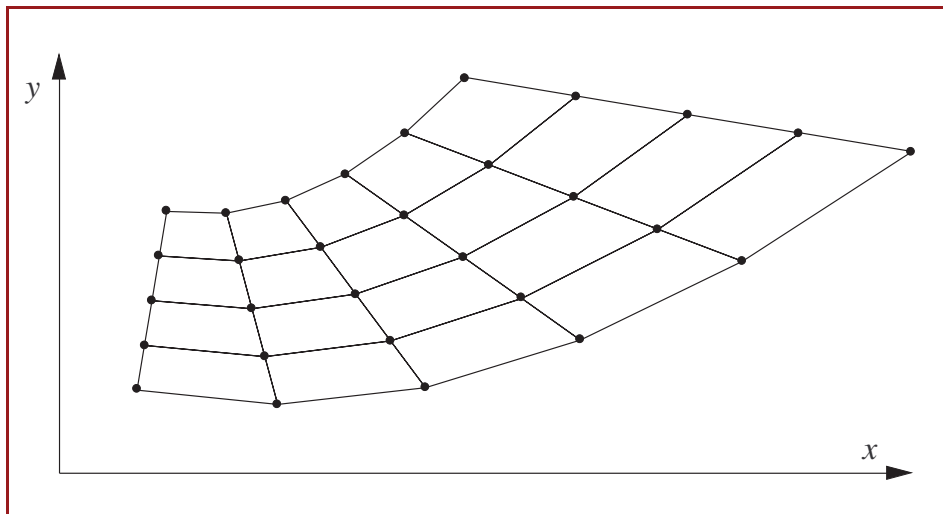
- Solo in un **numero limitato** di casi è possibile risolvere **analiticamente** le equazioni differenziali di interesse termofluidodinamico.
- **Soluzione analitica**: espressione che consente di calcolare **esattamente** il valore dell'incognita in **tutti** i punti del dominio.
- **Metodo numerico**: metodo che consente di ottenere una soluzione **approssimata** in un **numero finito** di punti, detti **nodi**.
- **Discretizzazione**: processo con cui si individuano i **nodi** nel dominio e si scrivono le **equazioni** che consentono di ottenere la soluzione approssimata.
- **Scopo della procedura di discretizzazione**: scrivere un **sistema di equazioni lineari** dalla cui soluzione si ottengano i valori nodali dell'incognita.

METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

- Esistono **diverse varianti** del metodo degli elementi finiti.
- **Caratteristica comune:** costruzione di rappresentazioni di tipo **integrale** del principio di conservazione espresso dall'equazione differenziale che si vuole risolvere.
- **Non tutti** gli approcci, però, hanno **validità generale**; infatti, alcuni possono essere impiegati solo in certi casi.
- Il **metodo dei residui pesati** consente in tutti i casi di ottenere la necessarie equazioni di tipo integrale e, quindi, è tra quelli più utilizzati.

PASSI PER L'APPLICAZIONE DEL METODO

- **Discretizzazione** del dominio, cioè suddivisione in elementi, che non devono sovrapporsi nè lasciare buchi.
- **Scelta** del **tipo di elementi** e delle **funzioni di forma** (o di interpolazione) per l'approssimazione della variabile incognita.
- **Formulazione** per ogni elemento di un'**equazione di tipo matriciale** basata su una forma integrale dell'equazione differenziale da risolvere.
- **"Assembly"** delle equazioni per formare un **sistema globale** di equazioni lineari.
- **Risoluzione** del sistema globale per determinare i valori nodali dell'incognita.



Esempio di suddivisione di un dominio in elementi finiti quadrangolari.

NUMERAZIONE GLOBALE E LOCALE

- **Elementi** identificati da numeri compresi tra 1 e m .
- **Nodi** identificati da numeri compresi tra 1 e n (**numerazione globale**).
- **Nodi** identificati da numeri compresi tra 1 e r (**numerazione locale**, valida a livello di singolo elemento).
- **Doppia numerazione** utile perchè le equazioni matriciali vengono formulate prima a livello dei singoli elementi e poi assemblate.
- **Esempi:** t_i , t_i^e .

APPROSSIMAZIONE DELL'INCOGNITA

- **Approssimazione a tratti**, elemento per elemento (1-D)

$$\begin{aligned}t(x) &\cong \tilde{t}^e(x) = N_1^e(x) t_1^e + N_2^e(x) t_2^e + \cdots + N_r^e(x) t_r^e \\ &= \sum_{i=1}^r N_i^e(x) t_i^e = \mathbf{N}^e \mathbf{t}^e\end{aligned}$$

$$t(x_i) \cong \tilde{t}^e(x_i^e) = t_i^e$$

- **Proprietà** delle funzioni di forma N_i^e .

$$\triangleright N_i^e(x_j^e) = 1 \quad N_j^e(x_i^e) = 0 \quad \text{per } j \neq i$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^r N_i^e(x) = 1$$

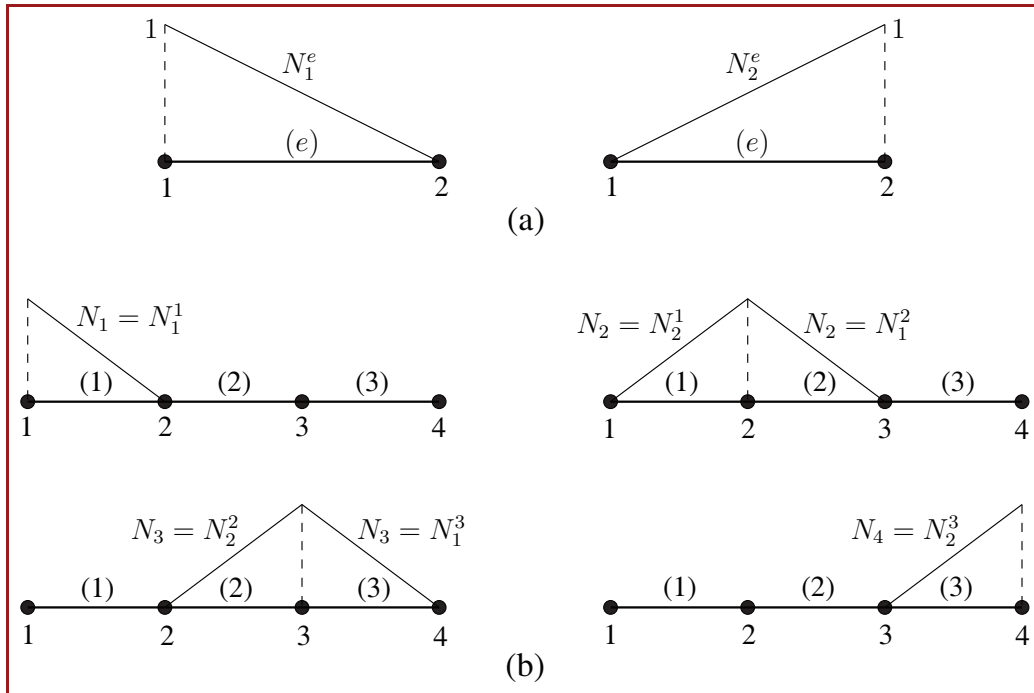
APPROSSIMAZIONE DELL'INCOGNITA (2)

- **Approssimazione globale** (1-D)

$$t(x) \cong \tilde{t}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) t_i = \mathbf{N} \mathbf{t}$$

- **Approssimazione a tratti e globale** (2-D)

$$\begin{aligned}t(x, y) &\cong \tilde{t}^e(x, y) = \sum_{i=1}^r N_i^e(x, y) t_i^e = \mathbf{N}^e \mathbf{t}^e \\ &= \tilde{t}(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) t_i = \mathbf{N} \mathbf{t}\end{aligned}$$



Esempio di funzioni di forma per elementi monodimensionali a due nodi.

METODO DEI RESIDUI PESATI

- Generica **equazione differenziale**

$$A(\tilde{t}) = 0$$

- **Residuo** non nullo perché \tilde{t} non soddisfa esattamente l'equazione

$$\varepsilon = A(\tilde{t}) \neq 0$$

- **Obiettivo** che si vuole raggiungere

$$\int_{\Omega} \varepsilon \, d\Omega = \int_{\Omega} A(\tilde{t}) \, d\Omega = 0$$

- **Residui pesati** per avere n equazioni in n incognite

$$\int_{\Omega} W_i A(\tilde{t}) \, d\Omega = 0$$

METODO DEI RESIDUI PESATI (2)

- **Proprietà** delle funzioni di pesata:

▷ **diverse da zero** solo in un intorno del nodo a cui si riferiscono;

▷ $\sum_{i=1}^n W_i = 1$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} W_i A(\tilde{t}) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n W_i \right) A(\tilde{t}) d\Omega = \int_{\Omega} A(\tilde{t}) d\Omega = 0$$

- **Esempio** di applicazione del metodo dei residui pesati

$$A(t) = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \dot{q} = 0$$

$$\int_{\Omega} W_i \nabla \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega + \int_{\Omega} W_i \dot{q} d\Omega = 0$$

FORMULE DI GREEN

- Applicando il **teorema di Gauss**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (W_i \lambda \nabla t) d\Omega &= \int_{\Omega} [W_i \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla t)] d\Omega \\ &= \int_S W_i \lambda \nabla t \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i \nabla \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega + \int_S W_i \lambda \nabla t \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla t) d\Omega - \int_S W_i \dot{q}'' dS \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\lambda \nabla \tilde{t}) d\Omega - \int_S W_i \tilde{q}'' dS + \int_{\Omega} W_i \dot{q} d\Omega = 0$$

VANTAGGI E SVANTAGGI DELLE FORMULE DI GREEN

- **Due vantaggi:**

- ▷ le **funzioni di forma** devono ammettere derivate prime, ma non necessariamente derivate seconde (funzioni C_0 continue);
- ▷ l'integrale del flusso termico sul contorno consente una agevole imposizione delle **condizioni al contorno** del secondo e del terzo tipo.

- **Due svantaggi:**

- ▷ anche le **funzioni di pesata** W_i devono ammettere derivate prime;
- ▷ le equazioni che si ottengono sono **più "permissive"** dell'equazione differenziale di partenza; sono chiamate "**forme deboli**" o "weak forms").

METODO DI GALERKIN

- **Metodo di Galerkin:** variante del metodo dei residui pesati in cui $W_i = N_i$.
- Le funzioni di forma soddisfano tutti **requisiti** richiesti alle funzioni di pesata:
 - ▷ sono diverse da zero solo in un intorno limitato del nodo a cui si riferiscono (gli elementi che condividono quel nodo);
 - ▷ la loro sommatoria è uguale a 1 in tutti i punti del dominio.
- **Ulteriore vantaggio:** **non** dover implementare nei codici di calcolo due insiemi di funzioni diverse, uno per l'interpolazione dell'incognita e uno per la pesata delle equazioni.

APPLICAZIONE DEL METODO DI GALERKIN

- Equazione della **conduzione termica bidimensionale**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0$$

$$\int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \dot{q} \right] d\Omega = 0$$

- Applicando la **formula di Green**

$$- \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_S N_i \tilde{q}'' dS + \int_{\Omega} N_i \dot{q} d\Omega = 0$$

$$\int_S N_i \tilde{q}'' dS = \int_{S_2} N_i q_p'' dS + \int_{S_3} N_i \tilde{q}_c'' dS + \int_{S_1} N_i \tilde{q}'' dS$$

APPLICAZIONE DEL METODO DI GALERKIN (2)

- Espressione approssimata delle **derivate** dell'incognita in direzione x e y

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} t_j \quad \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} t_j$$

- **Sistema** di n equazioni lineari

$$- \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} t_j \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} t_j \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} N_i \dot{q} d\Omega$$
$$- \int_{S_2} N_i q_p'' dS - \int_{S_3} N_i \tilde{q}_c'' dS - \int_{S_1} N_i \tilde{q}'' dS = 0$$

- Equazione in **forma matriciale**

$$\mathbf{K} \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 [-\mathbf{r}_1]$$

EQUAZIONI MATRICIALI

- **Generici elementi** della matrice e dei vettori

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$s_i = \int_{\Omega} N_i \dot{q} d\Omega$$

$$(r_2)_i = \int_{S_2} N_i q_p'' dS$$

- $(r_3)_i$ non può essere valutato direttamente perchè dipende dall'incognita \tilde{t} .

EQUAZIONI MATRICIALI (2)

- Essendo $\tilde{q}_c'' = \alpha (\tilde{t} - t_f)$, si può scrivere

$$(r_3)_i = \int_{S_3} N_i \alpha (\tilde{t} - t_f) dS = \int_{S_3} N_i \alpha \left(\sum_{j=1}^n N_j t_j \right) dS - \int_{S_3} N_i \alpha t_f dS$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{B} \mathbf{t} + \mathbf{b}$$

- **Elementi tipici** della matrice \mathbf{B} e del vettore \mathbf{b}

$$B_{ij} = \int_{S_3} N_i \alpha N_j dS$$

$$b_i = - \int_{S_3} N_i \alpha t_f dS$$

EQUAZIONI MATRICIALI (3)

- **Forma finale** dell'equazione

$$(\mathbf{K} + \mathbf{B}) \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b}$$

- **Sistema** di equazioni lineari (in forma matriciale)

$$\mathbf{H} \mathbf{t} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b}$$

“ASSEMBLY”

- Nei codici di calcolo si opera sequenzialmente, **elemento per elemento**.
- Calcolo degli **integrali**

$$\int_{\Omega} (\dots) d\Omega + \int_S (\dots) dS = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} (\dots) d\Omega + \sum_{e=1}^m \int_{S^e} (\dots) dS$$

- **Esempio:**

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^m K_{kl}^e$$

$$K_{kl}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_l^e}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \right) d\Omega$$

“ASSEMBLY” (2)

- Non matrici globali \mathbf{K} e \mathbf{B} , di dimensioni $n \times n$, e vettori globali \mathbf{s} , \mathbf{r}_2 e \mathbf{b} , di dimensione n , ma matrici elementari \mathbf{K}^e e \mathbf{B}^e , di dimensioni $r \times r$, e vettori elementari \mathbf{s}^e , \mathbf{r}_2^e e \mathbf{b}^e , di dimensione r .
- Per ogni elemento si ottiene

$$(\mathbf{K}^e + \mathbf{B}^e) \mathbf{t}^e = \mathbf{s}^e - \mathbf{r}_2^e - \mathbf{b}^e$$

$$\mathbf{H}^e = \mathbf{K}^e + \mathbf{B}^e$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{s}^e - \mathbf{r}_2^e - \mathbf{b}^e$$

- “Assembly”

$$\mathbf{H} = \sum_{e=1}^m \mathbf{H}^e \quad \mathbf{f} = \sum_{e=1}^m \mathbf{f}^e$$

ESEMPIO DI “ASSEMBLY”

- Elemento a 4 nodi:
 - ▷ sequenza nella numerazione globale: **12 38 39 13**
 - ▷ sequenza nella numerazione locale: **1 2 3 4**

- Somma dei contributi:

$H_{1,1}^e$ viene sommato a $H_{12,12}$

$H_{1,2}^e$ viene sommato a $H_{12,38}$

$H_{1,3}^e$ viene sommato a $H_{12,39}$

$H_{1,4}^e$ viene sommato a $H_{12,13}$

$H_{2,1}^e$ viene sommato a $H_{38,12}$

$H_{2,2}^e$ viene sommato a $H_{38,38}$

$H_{2,3}^e$ viene sommato a $H_{38,39}$

$H_{2,4}^e$ viene sommato a $H_{38,13}$

DISCRETIZZAZIONE DEL TERMINE ADVETTIVO

- Equazione **bidimensionale dell'energia** in regime stazionario

$$\rho c \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) \right] - \dot{q} = 0$$

- **Termine advettivo**, discretizzato col **metodo di Galerkin**

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_i \rho c \left(u \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} N_i \rho c \left[u \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} t_j \right) + v \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} t_j \right) \right] d\Omega \end{aligned}$$

DISCRETIZZAZIONE DEL TERMINE ADVETTIVO (2)

- Equazione in **forma matriciale**

$$(\mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b}$$

- **Elementi tipici** della matrice di **advezione**

$$A_{ij} = \int_{\Omega} N_i \rho c \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

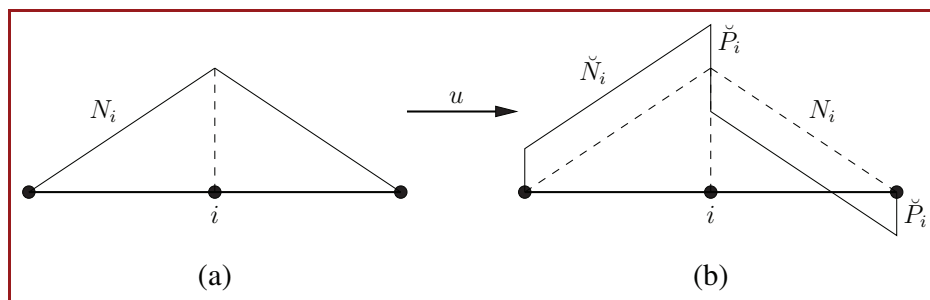
- Matrice e vettore dei termini noti del **sistema di equazioni lineari**

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b}$$

“UPWINDING”

- **Problema:** oscillazioni numeriche ed instabilità. **Possibile soluzione:** “upwinding”.
- Molto utilizzato il **SUPG** (“streamline-upwind/Petrov-Galerkin”).
- Metodo di **Bubnov-Galerkin:** $W_i = N_i$
- Metodo di **Petrov-Galerkin:** $W_i = \check{N}_i = N_i + \check{P}_i$



Esempi di funzioni di pesata nel caso di elementi monodimensionali.

EQUAZIONI PER IL REGIME TRANSITORIO

- Approssimazione dell'incognita

$$t(x, y, \vartheta) \cong \tilde{t}(x, y, \vartheta) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) t_i(\vartheta) = \mathbf{N} \mathbf{t}$$

- Equazione dell'energia in regime transitorio

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \vartheta} + \rho c \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) \right] - \dot{q} = 0$$

- Discretizzazione col **metodo di Galerkin**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i \rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \vartheta} d\Omega &= \int_{\Omega} N_i \rho c \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sum_{j=1}^n N_j t_j \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} N_i \rho c \left(\sum_{j=1}^n N_j \frac{\partial t_j}{\partial \vartheta} \right) d\Omega \end{aligned}$$

EQUAZIONI PER IL REGIME TRANSITORIO (2)

- Equazioni in **forma matriciale**

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{t}} + (\mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b}$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega} N_i \rho c N_j d\Omega$$

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{t}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{t} = \bar{\mathbf{s}}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{b}$$

INTEGRAZIONE NEL TEMPO

- **Integrazione numerica diretta**, con l'impiego di formule ricorsive derivate con le tecniche classiche delle differenze finite.
- **"Time marching"**: suddivisione transitorio in un certo numero di intervalli temporali di durata $\Delta\vartheta$ e calcolo sequenziale della soluzione, a partire dalle condizioni iniziali, al tempo $\Delta\vartheta, 2\Delta\vartheta, \dots, n\Delta\vartheta, (n+1)\Delta\vartheta$, e così via.
- **Approssimazione** della derivata temporale dell'incognita

$$\dot{\mathbf{t}} \cong \frac{\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}^n}{\Delta\vartheta}$$

INTEGRAZIONE NEL TEMPO (2)

- **Schema generale** di integrazione temporale a **due livelli**

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}^n}{\Delta t} + \gamma \bar{\mathbf{K}} \mathbf{t}^{n+1} + (1 - \gamma) \bar{\mathbf{K}} \mathbf{t}^n = \bar{\mathbf{s}}$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \gamma \bar{\mathbf{K}} \right) \mathbf{t}^{n+1} = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - (1 - \gamma) \bar{\mathbf{K}} \right] \mathbf{t}^n + \bar{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{H} \mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{f}^n$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \gamma \bar{\mathbf{K}}$$

$$\mathbf{f}^n = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - (1 - \gamma) \bar{\mathbf{K}} \right] \mathbf{t}^n + \bar{\mathbf{s}}$$

INTEGRAZIONE NEL TEMPO (3)

- Valori notevoli di γ
 - ▷ $\gamma = 0$: algoritmo **esplicito**, condizionatamente stabile, errore $O(\Delta t)$; algoritmo vantaggioso solo se \mathbf{C} è una **matrice diagonale** ottenibile con un procedimento di “**lumping**”

$$\bar{C}_{ii} = \sum_{j=1}^n C_{ij}$$

- ▷ $\gamma = 1/2$: algoritmo di **Crank-Nicolson**, incondizionatamente stabile, errore $O(\Delta t^2)$;
- ▷ $\gamma = 1$: algoritmo **implicito puro**, incondizionatamente stabile, errore $O(\Delta t)$.

ESEMPI DI MATRICI “ELEMENTARI”

- Elementi **monodimensionali** a 2 nodi

$$\mathbf{C}^e = \rho C \frac{L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{\lambda}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^e = \rho C \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Elementi **rettangolari** a 4 nodi

$$\mathbf{C}^e = \rho C \frac{L^e H^e}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{\lambda H^e}{6L^e} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\lambda L^e}{6H^e} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^e = \rho C \frac{u H^e}{12} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \rho C \frac{v L^e}{12} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

FUNZIONI DI FORMA

- Elementi monodimensionali **lineari a due nodi** ($r = 2$),

$$N_1^e = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x_2^e - x}{L^e}$$

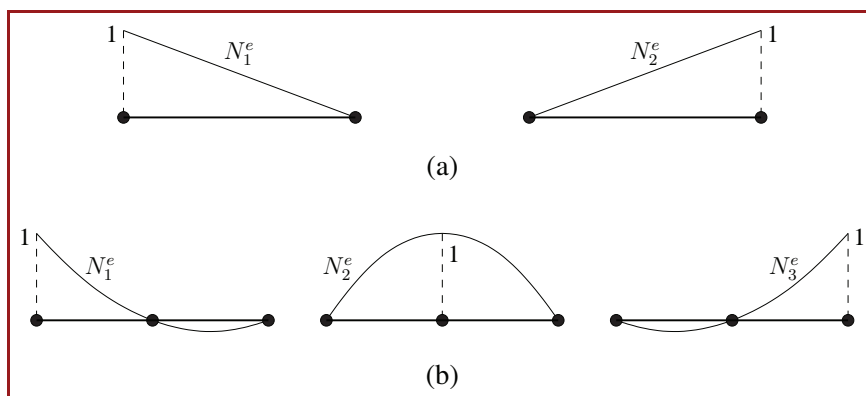
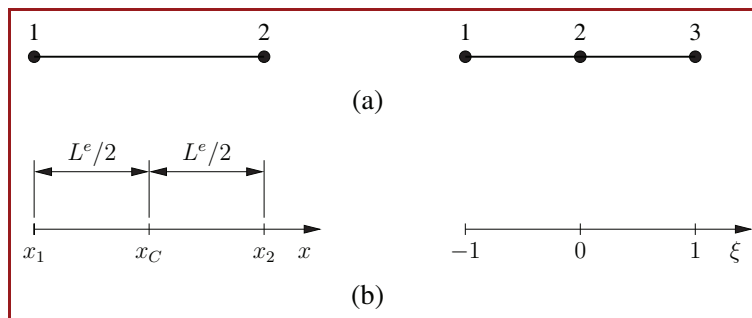
$$N_2^e = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x - x_1^e}{L^e}$$

- Elementi monodimensionali **parabolici a tre nodi** ($r = 3$)

$$N_1^e = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \frac{x - x_3^e}{x_1^e - x_3^e}$$

$$N_2^e = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \frac{x - x_3^e}{x_2^e - x_3^e}$$

$$N_3^e = \frac{x - x_1^e}{x_3^e - x_1^e} \frac{x - x_2^e}{x_3^e - x_2^e}$$



Funzioni di forma di elementi monodimensionali.

FUNZIONI DI FORMA (2)

- **Coordinata locale normalizzata** per elementi monodimensionali

$$\xi = 2 \frac{x - x_C^e}{L^e}$$

- Elementi monodimensionali **lineari a due nodi** ($r = 2$),

$$N_1^e = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

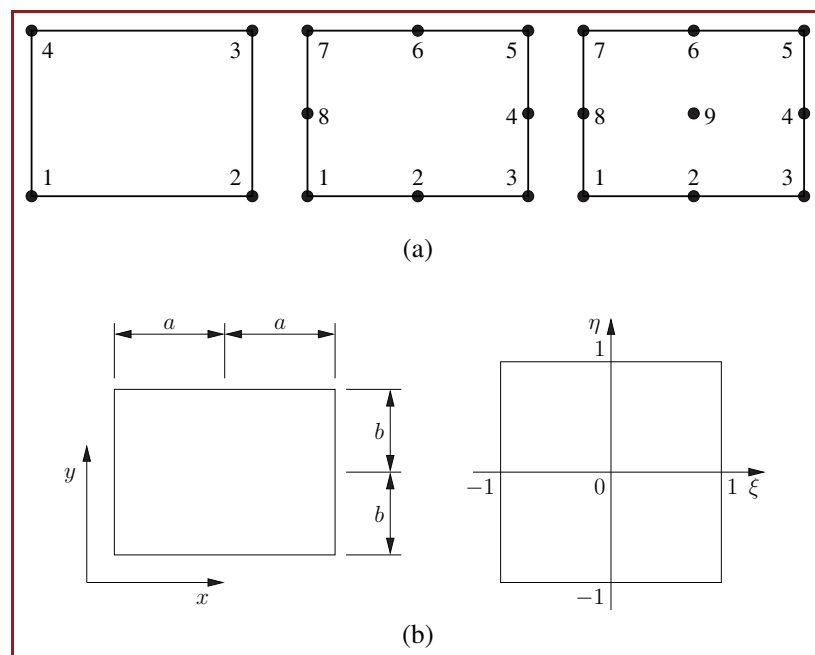
$$N_2^e = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

- Elementi monodimensionali **parabolici a tre nodi** ($r = 3$)

$$N_1^e = \frac{1}{2} (\xi - 1) \xi$$

$$N_2^e = 1 - \xi^2$$

$$N_3^e = \frac{1}{2} (\xi + 1) \xi$$



Elementi bidimensionali.

FUNZIONI DI FORMA (3)

- **Coordinate locali normalizzate** per elementi bidimensionali rettangolari

$$\xi = \frac{x - x_C^e}{a}$$

$$\eta = \frac{y - y_C^e}{b}$$

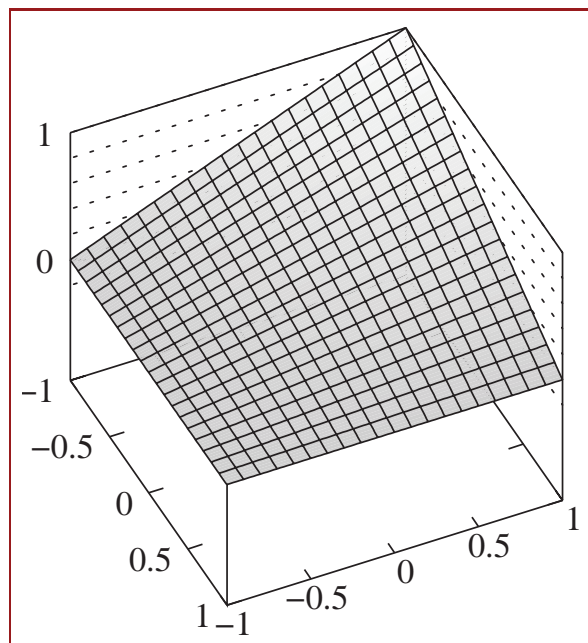
- Elementi bidimensionali **bilineari a quattro nodi** ($r = 4$)

$$N_1^e = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_2^e = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3^e = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_4^e = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$



Generica funzione di forma di un elemento bidimensionale a quattro nodi.

FUNZIONI DI FORMA (4)

- Elementi bidimensionali **parabolici a otto nodi** ($r = 8$)

$$N_1^e = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (-\xi - \eta - 1)$$

$$N_2^e = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta)$$

$$N_3^e = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1)$$

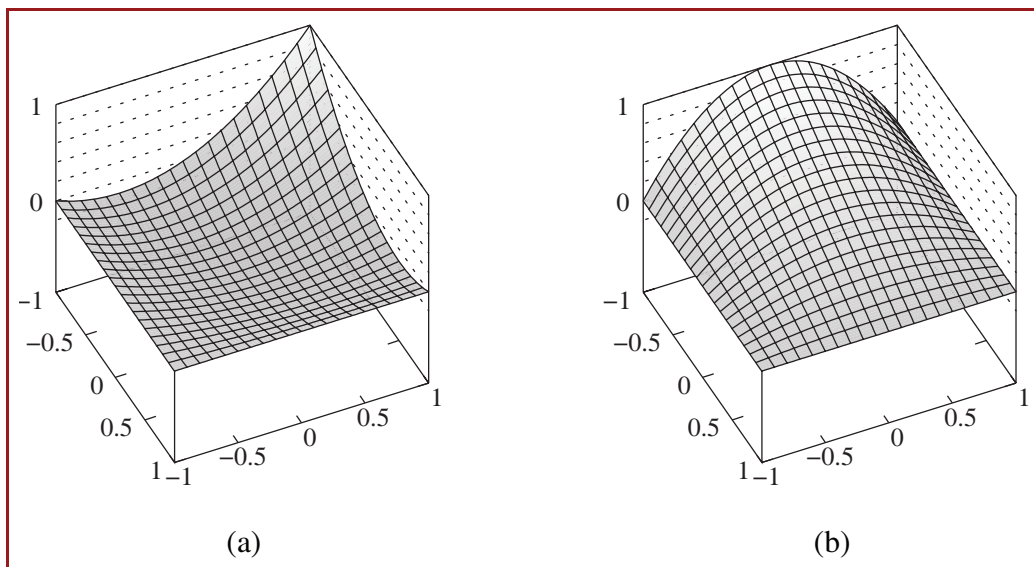
$$N_4^e = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2)$$

$$N_5^e = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1)$$

$$N_6^e = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta)$$

$$N_7^e = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1)$$

$$N_8^e = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2)$$



Generiche funzioni di forma di un elemento bidimensionale a otto nodi.

FUNZIONI DI FORMA (5)

- Elementi bidimensionali **parabolici a nove nodi** ($r = 8$)

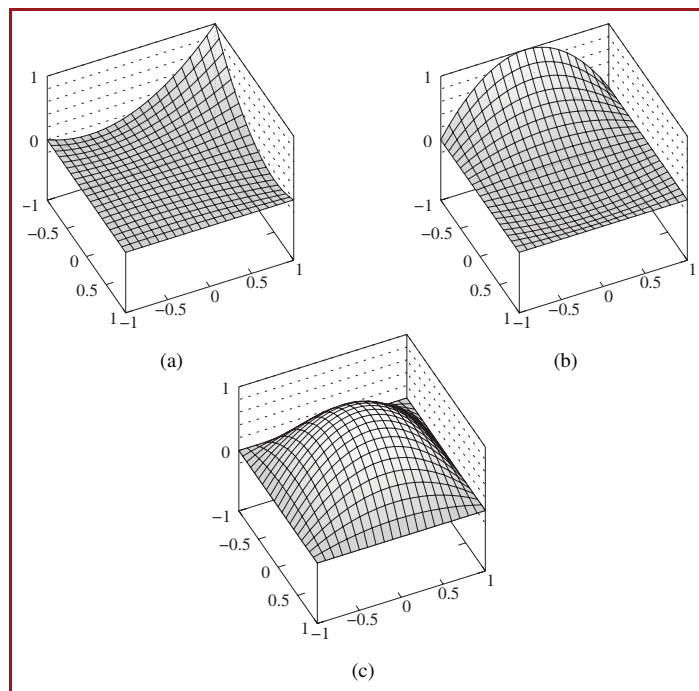
$$N_1^e = \frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_2^e = -\frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3^e = -\frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1-\eta) \qquad N_4^e = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5^e = \frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_6^e = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7^e = -\frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1+\eta) \qquad N_8^e = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_9^e = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$



Generiche funzioni di forma di un elemento bidimensionale a nove nodi.

MAPPATURA DEGLI ELEMENTI

- Mappatura **elemento per elemento**.
- Ogni elemento nel dominio reale, definito nello spazio (x) o (x, y) , viene ottenuto con una mappatura a partire da un **elemento “genitore”** (“parent element”), definito nello spazio (ξ) o (ξ, η) .
- **Tipo di trasformazione:** $(\xi) \mapsto (x)$, con $x = x(\xi)$, o $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$, con $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$, definita **elemento per elemento**.
- Elemento genitore in **una** dimensione: **segmento** di lunghezza 2, con $-1 \leq \xi \leq 1$.
- Elemento genitore in **due** dimensioni: **quadrato** di lato 2 con $-1 \leq \xi \leq 1$ e $-1 \leq \eta \leq 1$.

MAPPATURA DEGLI ELEMENTI (2)

- **Corrispondenza** tra coordinate locali e globali per elementi **monodimensionali**

$$x(\xi) = \bar{N}_1^e(\xi) x_1^e + \cdots + \bar{N}_r^e(\xi) x_r^e = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \bar{N}_i^e(\xi) x_i^e$$

- **Corrispondenza** tra coordinate locali e globali per elementi **bidimensionali**

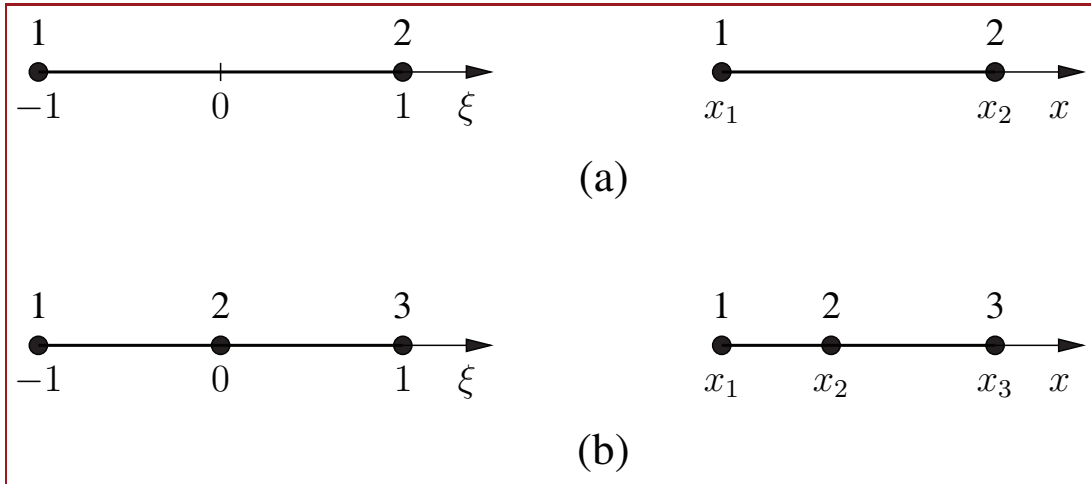
$$x(\xi, \eta) = \bar{N}_1^e(\xi, \eta) x_1^e + \cdots + \bar{N}_r^e(\xi, \eta) x_r^e = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \bar{N}_i^e(\xi, \eta) x_i^e$$

$$y(\xi, \eta) = \bar{N}_1^e(\xi, \eta) y_1^e + \cdots + \bar{N}_r^e(\xi, \eta) y_r^e = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \bar{N}_i^e(\xi, \eta) y_i^e$$

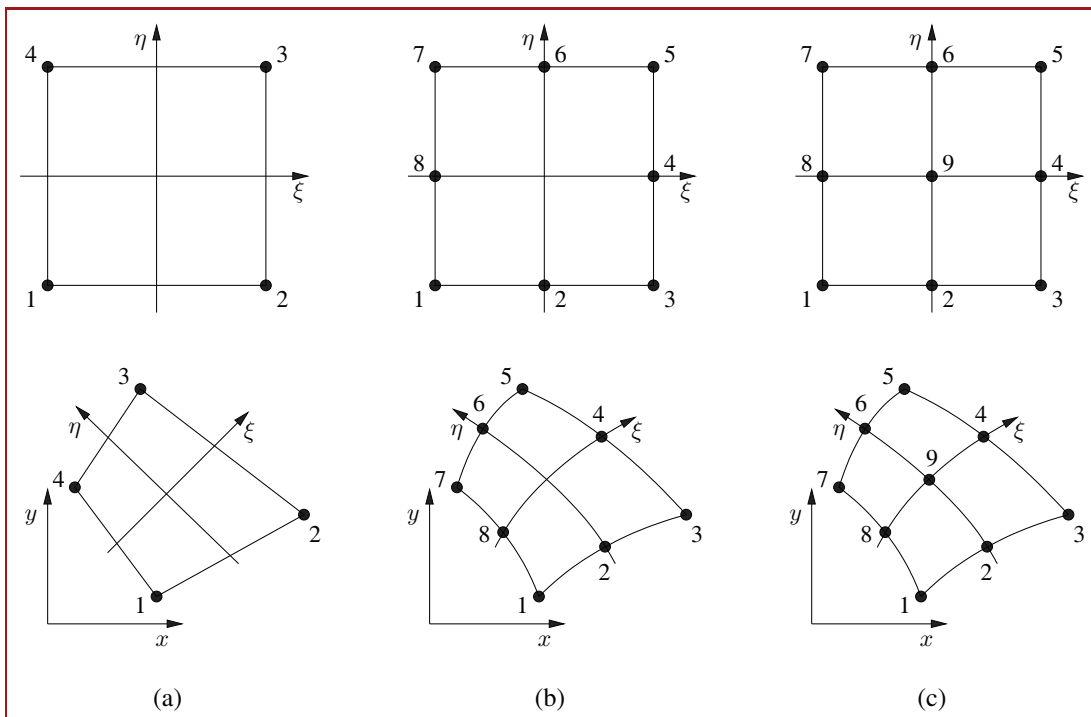
- Elementi **isoparametrici:** $\bar{r} = r$

$$\bar{N}_i^e(\xi) = N_i^e(\xi)$$

$$\bar{N}_i^e(\xi, \eta) = N_i^e(\xi, \eta)$$



Mappatura di elementi monodimensionali.

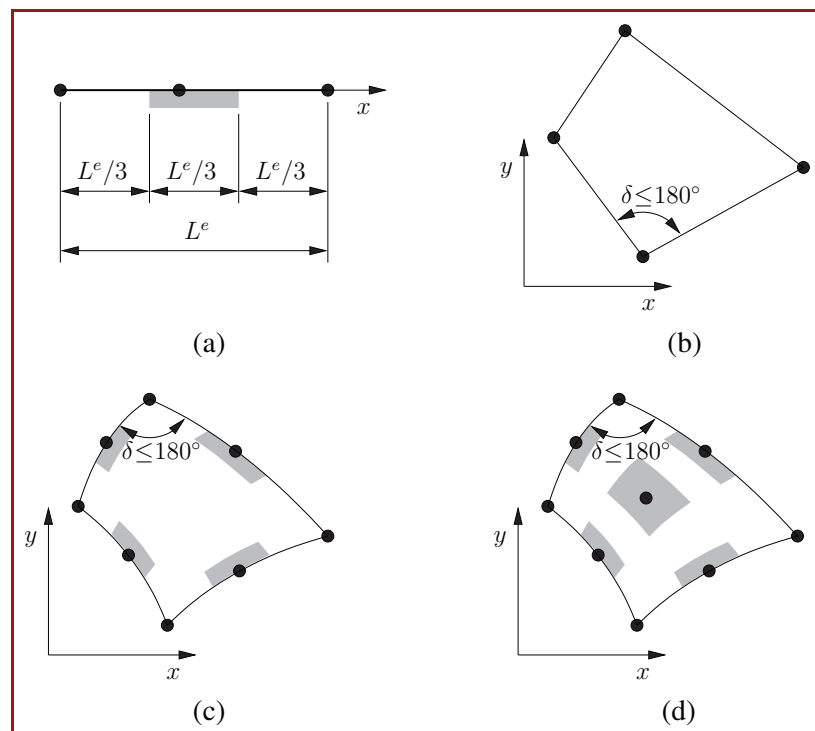


Mappatura di elementi bidimensionali.

MAPPATURA DEGLI ELEMENTI (3)

- **Vantaggi** degli elementi isoparametrici:

- ▷ evitano la necessità di dover manipolare due insiemi di **funzioni di forma**;
- ▷ garantiscono che **non** si abbiano **buchi** o **sovrapposizioni** tra gli elementi distorti del dominio reale ("**conformability**");
- ▷ garantiscono la **continuità** dell'approssimazione \tilde{t} tra elementi adiacenti ("**compatibility**");
- ▷ garantiscono la rappresentazione esatta, anche negli elementi distorti, di andamenti sia **costanti** sia **lineari** di \tilde{t} .



Regole per garantire la biunivocità della mappatura.

TRASFORMAZIONE ISOPARAMETRICA

- Per ogni **punto** del piano (x, y) appartenente a un **elemento isoparametrico**

$$x = \sum_{i=1}^r N_i^e x_i^e$$

$$y = \sum_{i=1}^r N_i^e y_i^e$$

- Bisogna inoltre ricordare che

$$N_i^e(\xi) = N_i^e[x(\xi)]$$

$$N_i^e(\xi, \eta) = N_i^e[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

TRASFORMAZIONE ISOPARAMETRICA (2)

- Per elementi isoparametrici **monodimensionali**

$$\frac{dN_i^e}{d\xi} = \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dx}{d\xi}$$

- **Derivate cartesiane** delle funzioni di forma

$$\frac{dN_i^e}{dx} = \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dN_i^e}{d\xi}$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^r \frac{dN_i^e}{d\xi} x_i^e$$

TRASFORMAZIONE ISOPARAMETRICA (3)

- Per elementi isoparametrici **bidimensionali**

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

- In forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

TRASFORMAZIONE ISOPARAMETRICA (4)

- Elementi della **matrice Jacobiana**

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} x_i^e = J_{11}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} x_i^e = J_{21}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} y_i^e = J_{12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} y_i^e = J_{22}$$

TRASFORMAZIONE ISOPARAMETRICA (5)

- **Derivate cartesiane** delle funzioni di forma

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

- **Jacobiano**

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

TRASFORMAZIONE ISOPARAMETRICA (6)

- **Lunghezza elementare** $d\Omega$ (per integrazione in elementi monodimensionali)

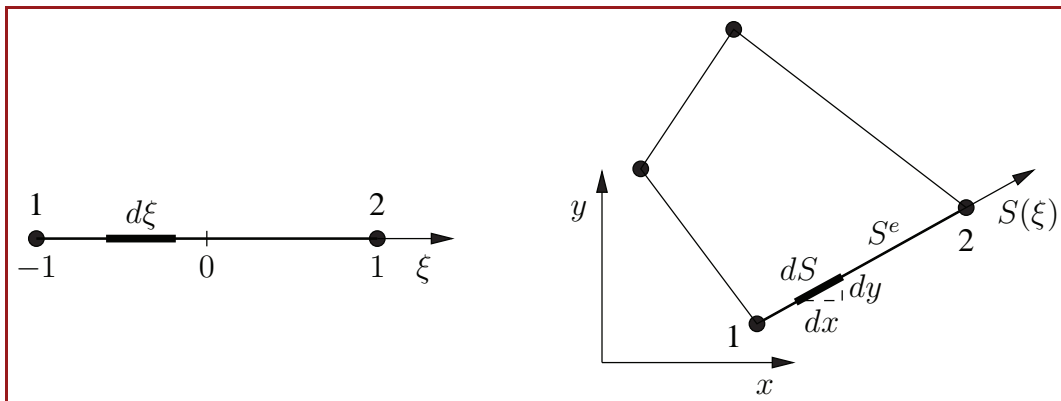
$$d\Omega = dx = \left(\frac{dx}{d\xi} \right) d\xi = \left(\sum_{i=1}^r \frac{dN_i^e}{d\xi} x_i^e \right) d\xi$$

- **Area elementare** $d\Omega$ (per integrazione in elementi bidimensionali)

$$d\Omega = \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

- **Lunghezza elementare** dS (per integrazione sui lati di elementi bidimensionali), dove S è una coordinata curvilinea globale tale che $x = x[S(\xi)]$ e $y = y[S(\xi)]$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2} d\xi$$



Elemento monodimensionale corrispondente ad un lato di uno bidimensionale.

TRASFORMAZIONE ISOPARAMETRICA (7)

- Conviene che lo **Jacobiano**, oltre a non diventare mai nullo, sia **sempre positivo**.
- Jacobiano positivo se il sistema di coordinate locali e quello di coordinate globali sono **equiorientati**.
- Per questo motivo, nella descrizione degli elementi reali, i nodi vengono listati
 - ▷ secondo la direzione positiva della coordinata globale, per **elementi monodimensionali**;
 - ▷ in senso antiorario, partendo da un nodo d'angolo, per **elementi bidimensionali**.

INTEGRAZIONE NUMERICA

- Per **elementi monodimensionali** paralleli all'asse x

$$I_1 = \int_{\Omega^e} f(x) d\Omega = \int_{\Omega^e} f(x) dx = \int_{-1}^1 f[x(\xi)] \left(\frac{dx}{d\xi} \right) d\xi = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi$$

- Per **elementi bidimensionali**

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega^e} F(x, y) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \det \mathbf{J} d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

INTEGRAZIONE NUMERICA (2)

- Per **contorni di elementi bidimensionali**

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S^e} f(x, y) dS = \int_{S^e} f[x(S), y(S)] dS = \int_{S^e} f(S) dS \\ &= \int_{-1}^1 f(\xi) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2} d\xi = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \end{aligned}$$

- **Metodo di Gauss** per le integrazioni in **una dimensione**

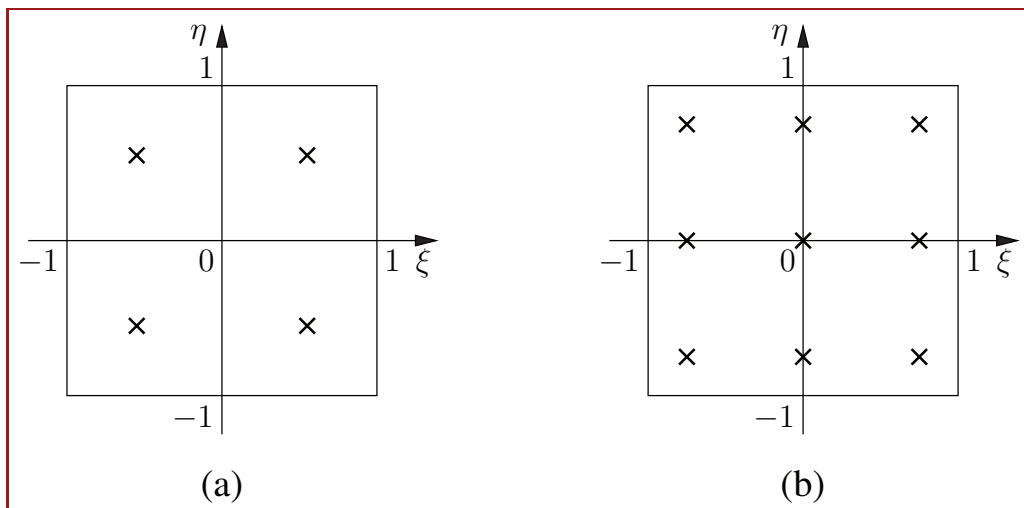
$$I_1 = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^p g(\xi_i) w_i$$

- **Metodo di Gauss** per le integrazioni in **due dimensioni**

$$I_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p G(\xi_i, \eta_j) w_i w_j$$

Pesi e coordinate locali dei punti di Gauss.

p	i	ξ_i	w_i
2	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	1	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
	2	0	$\frac{8}{9}$
	3	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$



Posizioni dei punti di integrazione in un elemento genitore bidimensionale.

ELEMENTI TRIANGOLARI

- **Approssimazione** della variabile incognita

$$t \cong \tilde{t}^e = N_1^e t_1^e + N_2^e t_2^e + N_3^e t_3^e$$

$$t \cong \tilde{t}^e = a^e + b^e x + c^e y$$

- Nei **nodi** vale

$$\begin{cases} t_1^e = a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \\ t_2^e = a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \\ t_3^e = a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e \end{cases}$$

ELEMENTI TRIANGOLARI (2)

- Espressioni di a^e , b^e , e c^e

$$a^e = \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_1^e t_1^e + \alpha_2^e t_2^e + \alpha_3^e t_3^e)$$

$$b^e = \frac{1}{2\Omega^e} (\beta_1^e t_1^e + \beta_2^e t_2^e + \beta_3^e t_3^e)$$

$$c^e = \frac{1}{2\Omega^e} (\gamma_1^e t_1^e + \gamma_2^e t_2^e + \gamma_3^e t_3^e)$$

$$\alpha_1^e = x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e ; \quad \alpha_2^e = x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e ; \quad \alpha_3^e = x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e$$

$$\beta_1^e = y_2^e - y_3^e ; \quad \beta_2^e = y_3^e - y_1^e ; \quad \beta_3^e = y_1^e - y_2^e$$

$$\gamma_1^e = x_3^e - x_2^e ; \quad \gamma_2^e = x_1^e - x_3^e ; \quad \gamma_3^e = x_2^e - x_1^e$$

ELEMENTI TRIANGOLARI (3)

- Area dell'elemento

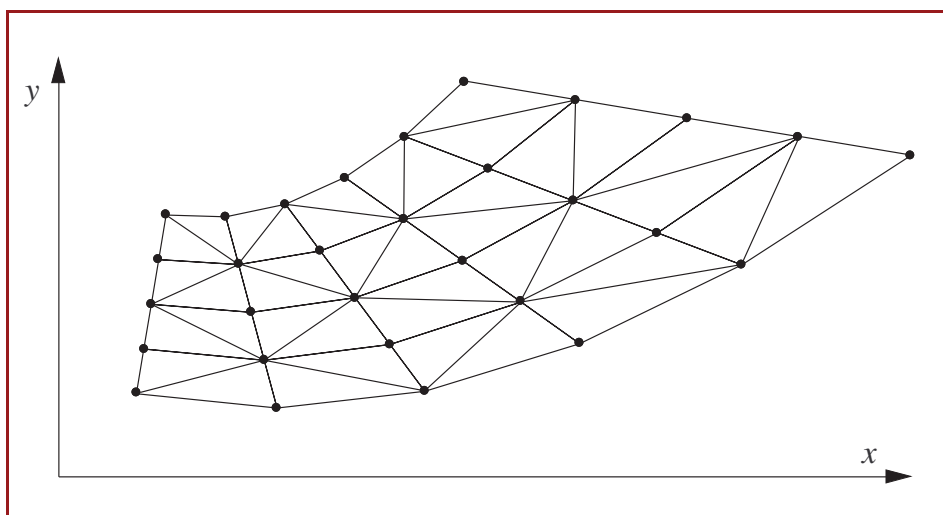
$$\Omega^e = \frac{1}{2} (\beta_2^e \gamma_3^e - \beta_3^e \gamma_2^e)$$

- Espressioni delle **funzioni di forma**

$$N_1^e = \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x + \gamma_1^e y)$$

$$N_2^e = \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x + \gamma_2^e y)$$

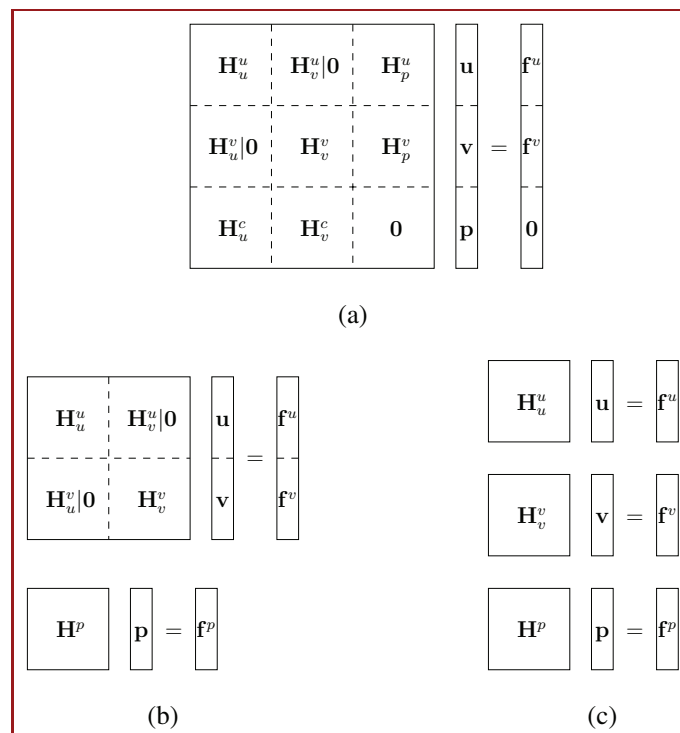
$$N_3^e = \frac{1}{2\Omega^e} (\alpha_3^e + \beta_3^e x + \gamma_3^e y)$$



Esempio di suddivisione di un dominio in elementi finiti triangolari a tre nodi.

SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

- Metodo degli elementi finiti comunemente utilizzato per la soluzione delle equazioni di **Navier–Stokes**.
- Metodo di **Bubnov–Galerkin** (BG): funzioni di pesata coincidono con le funzioni di interpolazione.
- Metodo di **Petrov–Galerkin** (PG): funzione di pesata uguale a somma della corrispondente funzione di forma e di un termine di perturbazione (per introdurre effetti di “upwinding”).
- **Problema**: accoppiamento tra campo di velocità e campo di pressione (interpolazioni “equal order” e “unequal order”).
- **Procedimenti** di soluzione di tipo **integrato**, **segregato** e “**penalty**”.



Struttura dei sistemi di equazioni lineari

APPROCCIO INTEGRATO

- **Approccio integrato:** equazioni risolte simultaneamente, per tutte le variabili, in analogia a quanto si fa nei problemi strutturali.
- **Vantaggi:**
 - ▷ **stabilità** soprattutto per valori elevati del numero di Reynolds.
- **Svantaggi:**
 - ▷ **tempi di calcolo** eccessivamente elevati per problemi di grandi dimensioni e con molte variabili;
 - ▷ vincoli nella scelta dei **metodi di soluzione** del sistema di equazioni;
 - ▷ necessità di utilizzare per l'approssimazione della pressione **elementi di ordine inferiore** a quelli utilizzati per l'approssimazione della velocità per evitare fenomeni di “**checkerboarding**” (“unequal order interpolation”).

PROCEDIMENTI SEQUENZIALI

- **Procedimenti sequenziali:** risoluzione di una equazione alla volta.
- **Equazione differenziale per la pressione** a partire dal vincolo di conservazione della massa.
- **Vantaggi:**
 - ▷ termini contenenti la **pressione** considerati **noti** nelle equazioni della quantità di moto (disaccoppiamento delle equazioni della quantità di moto e della pressione);
 - ▷ possibilità di utilizzare **elementi dello stesso ordine** per l'approssimazione della velocità e della pressione (“equal order interpolation”);
 - ▷ possibilità di utilizzare **solutori iterativi** per i sistemi di equazioni algebriche risultanti.

PROCEDIMENTI SEQUENZIALI (2)

- Possibili diverse strategie: procedure **parzialmente disaccoppiate** e **completamente sequenziali**.
- Molto utilizzati algoritmi di tipo “**Projection**”: campi di velocità approssimati, trovati in una prima fase del calcolo, successivamente “proiettati” in campi a divergenza nulla tenendo conto di opportune pressioni di correzione.
- Nome alternativo: algoritmi a **passo frazionato**, perchè nella prima fase del calcolo si stima la prima frazione delle componenti dell’accelerazione, mentre nella seconda parte si stima la frazione residua associata alle pressioni di correzione.

“PENALTY METHOD”

- “**Penalty method**”: consente di separare i calcoli relativi alla velocità da quelli riguardanti la pressione. Comporta l’assunzione di una modesta comprimibilità del fluido.

- Equazione di **continuità sostituita** da

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = -\varepsilon p \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{w}$$

- **Vantaggi:**
 - ▷ **pressione eliminata** dalle equazioni della quantità di moto.
- **Svantaggi:**
 - ▷ **sistema** di equazioni discretizzate **mal condizionato** (necessario l’uso di solutori diretti);
 - ▷ equazioni della quantità di moto **accoppiate** tra di loro (tutte le componenti della velocità devono essere determinate simultaneamente).

ESEMPIO DI PROCEDURA "EQUAL ORDER"

- Determinazione delle velocità di tentativo \mathbf{u}^* e \mathbf{v}^*

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta(\vartheta)_v} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{u}^* + (1 - \gamma) \mathbf{u}^n] + \mathbf{D}^u \mathbf{p}^* - \rho g_x \beta \mathbf{e} = 0$$

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta(\vartheta)_v} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{v}^* + (1 - \gamma) \mathbf{v}^n] + \mathbf{D}^v \mathbf{p}^* - \rho g_y \beta \mathbf{e} = 0$$

- Determinazione della correzione di pressione \mathbf{p}'

$$\mathbf{K} \mathbf{p}' = -\frac{\rho}{\Delta(\vartheta)_v} (\mathbf{D}^u \mathbf{u}^* + \mathbf{D}^v \mathbf{v}^*)$$

ESEMPIO DI PROCEDURA "EQUAL ORDER" (2)

- Determinazione delle velocità di correzione \mathbf{u}' e \mathbf{v}'

$$\frac{\rho}{\Delta(\vartheta)_v} \bar{\mathbf{M}} \mathbf{u}' = -\mathbf{D}^u \mathbf{p}'$$

$$\frac{\rho}{\Delta(\vartheta)_v} \bar{\mathbf{M}} \mathbf{v}' = -\mathbf{D}^v \mathbf{p}'$$

- Valori delle variabili alla fine del passo temporale

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}'$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^* + \mathbf{p}'$$

ESEMPIO DI PROCEDURA "EQUAL ORDER" (3)

- Determinazione della temperatura \mathbf{t}^{n+1}

$$\rho c_p \mathbf{M} \frac{\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}^n}{\Delta(\vartheta)_t} + (\lambda \mathbf{K} + \rho c_p \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{t}^{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{t}^n] = 0$$

- Tipici elementi di matrici

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} N_i \left(u^n \frac{\partial N_j}{\partial x} + v^n \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

ESEMPIO DI PROCEDURA "EQUAL ORDER" (4)

- Tipici elementi di matrici e vettori

$$D_{ij}^u = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$$

$$D_{ij}^v = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

$$e_i = \int_{\Omega} N_i (t^n - t_0) d\Omega$$

$$\bar{M}_{ij} = \int_{\Omega} N_i \delta_{ij} d\Omega$$

ESEMPIO DI PROCEDURA “UNEQUAL ORDER”

- Determinazione delle velocità di tentativo \mathbf{u}^* e \mathbf{v}^*

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{u}^* + (1 - \gamma) \mathbf{u}^n] + \mathbf{G}^u \mathbf{p}^* - \rho \mathbf{g}_x \beta \mathbf{e} = \mathbf{g}^u$$

$$\rho \mathbf{M} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mu \mathbf{K} + \rho \mathbf{A}) [\gamma \mathbf{v}^* + (1 - \gamma) \mathbf{v}^n] + \mathbf{G}^v \mathbf{p}^* - \rho \mathbf{g}_y \beta \mathbf{e} = \mathbf{g}^v$$

- Tipici elementi delle matrici \mathbf{G}^u e \mathbf{G}^v

$$G_{ij}^u = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{N}_j d\Omega$$

$$G_{ij}^v = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{N}_j d\Omega$$

ESEMPIO DI PROCEDURA “UNEQUAL ORDER” (2)

- Determinazione delle velocità di correzione \mathbf{u}' e \mathbf{v}'

$$\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{M}_L \mathbf{u}' = \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{M}_L (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) = -\mathbf{G}^u \mathbf{p}'$$

$$\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{M}_L \mathbf{v}' = \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{M}_L (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*) = -\mathbf{G}^v \mathbf{p}'$$

- Moltiplicazione da sinistra per $(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{M}_L^{-1}$ e $(\mathbf{G}^v)^T \mathbf{M}_L^{-1}$, sommando membro a membro e tenendo conto dell'equazione di continuità

$$(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{u}^{n+1} + (\mathbf{G}^v)^T \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{g}^D$$

- Determinazione della correzione di pressione \mathbf{p}'

$$\left[(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^u + (\mathbf{G}^v)^T \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^v \right] \mathbf{p}' = \frac{\rho}{\Delta t} \left[(\mathbf{G}^u)^T \mathbf{u}^* + (\mathbf{G}^v)^T \mathbf{v}^* - \mathbf{g}^D \right]$$

INTRODUZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO

- Introduzione della condizione $t_2 = (t_p)_2$ nel sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 + x_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

- **Prima possibilità:** semplice imposizione di $(t_p)_2$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ H_{31} & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - H_{12} (t_p)_2 \\ (t_p)_2 \\ f_3 - H_{32} (t_p)_2 \end{Bmatrix}$$

- Calcolo della “reazione” incognita $x_2 = -(r_1)_2$

$$x_2 = H_{21} t_1 + H_{22} t_2 + H_{23} t_3 - f_2$$

INTRODUZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO (2)

- **Seconda possibilità:** calcolo della “reazione”, perdita di simmetria della matrice

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} \\ H_{21} & -1 & H_{23} \\ H_{31} & 0 & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ x_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - H_{12} (t_p)_2 \\ f_2 - H_{22} (t_p)_2 \\ f_3 - H_{32} (t_p)_2 \end{Bmatrix}$$

- **Terza possibilità:** eliminazione equazione del nodo vincolato, rinumerazione

$$\begin{cases} H_{11} t_1 + H_{13} t_3 = f_1 - H_{12} (t_p)_2 \\ H_{31} t_1 + H_{33} t_3 = f_3 - H_{32} (t_p)_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{Bmatrix}$$

SOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

- **Due categorie** di metodi per la soluzione di sistemi di **equazioni lineari**:
 - ▷ **metodi diretti** (es.: eliminazione di Gauss, fattorizzazione triangolare LU) consentono di ottenere la soluzione dopo un numero finito di operazioni;
 - ▷ **metodi indiretti** (es.: Gauss–Seidel, SOR, SLOR, gradiente coniugato) di tipo iterativo, a partire da una soluzione di tentativo, consentono di affinarla sempre più, con un numero di iterazioni, e quindi di operazioni, in generale, non prevedibile a priori.
- Nell'ambito del **metodo degli elementi finiti**:
 - ▷ metodi di tipo diretto spesso utilizzati per la soluzione di problemi di piccole dimensioni;
 - ▷ metodi del gradiente coniugato vantaggiosi quando il numero di equazioni è elevato;
 - ▷ metodo di Gauss–Seidel e derivati (SOR e SLOR) raramente utilizzati.

METODO DI GAUSS

- Con il metodo di **eliminazione di Gauss** si trasforma il sistema in uno equivalente, caratterizzato dall'aver la matrice dei coefficienti di tipo **triangolare superiore**

$$\begin{cases} H_{11} t_1 + H_{12} t_2 + H_{13} t_3 = f_1 \\ H_{21} t_1 + H_{22} t_2 + H_{23} t_3 = f_2 \\ H_{31} t_1 + H_{32} t_2 + H_{33} t_3 = f_3 \end{cases}$$

- Eliminazione della parte della prima colonna posta sotto la diagonale

$$\begin{cases} H_{11} t_1 + H_{12} t_2 + H_{13} t_3 = f_1 \\ H_{22}^1 t_2 + H_{23}^1 t_3 = f_2^1 \\ H_{32}^1 t_2 + H_{33}^1 t_3 = f_3^1 \end{cases}$$

METODO DI GAUSS (2)

- Coefficienti modificati

$$\begin{aligned} H_{11} &= R_{11} ; & H_{12} &= R_{12} ; & H_{13} &= R_{13} ; & f_1 &= g_1 \\ H_{21}^1 &= H_{21} - \frac{H_{21}}{H_{11}} H_{11} = 0 ; & H_{22}^1 &= H_{22} - \frac{H_{21}}{H_{11}} H_{12} = R_{22} \\ H_{23}^1 &= H_{23} - \frac{H_{21}}{H_{11}} H_{13} = R_{23} ; & f_2^1 &= f_2 - \frac{H_{21}}{H_{11}} f_1 = g_2 \\ H_{31}^1 &= H_{31} - \frac{H_{31}}{H_{11}} H_{11} = 0 ; & H_{32}^1 &= H_{32} - \frac{H_{31}}{H_{11}} H_{12} \\ H_{33}^1 &= H_{33} - \frac{H_{31}}{H_{11}} H_{13} ; & f_3^1 &= f_3 - \frac{H_{31}}{H_{11}} f_1 \end{aligned}$$

METODO DI GAUSS (3)

- Eliminazione della parte della seconda colonna posta sotto la diagonale

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} t_1 + H_{12} t_2 + H_{13} t_3 = f_1 \\ H_{22}^1 t_2 + H_{23}^1 t_3 = f_2^1 \\ H_{33}^2 t_3 = f_3^2 \end{array} \right.$$

$$H_{32}^2 = H_{32}^1 - \frac{H_{32}^1}{H_{22}^1} H_{22}^1 = 0 ; \quad H_{33}^2 = H_{33}^1 - \frac{H_{32}^1}{H_{22}^1} H_{23}^1 = R_{33}$$

$$f_3^2 = f_3^1 - \frac{H_{32}^1}{H_{22}^1} f_2^1 = g_3$$

METODO DI GAUSS (4)

- Sistema equivalente

$$\begin{cases} R_{11} t_1 + R_{12} t_2 + R_{13} t_3 = g_1 \\ R_{22} t_2 + R_{23} t_3 = g_2 \\ R_{33} t_3 = g_3 \end{cases}$$

- “Backsubstitution”

$$t_3 = \frac{g_3}{R_{33}} = \frac{f_3^2}{H_{33}^2}$$
$$t_2 = \frac{g_2 - R_{23} t_3}{R_{22}} = \frac{f_2^1 - H_{23}^1 t_3}{H_{22}^1}$$
$$t_1 = \frac{1}{R_{11}} \left(g_1 - \sum_{j=2}^3 R_{1j} t_j \right) = \frac{1}{H_{11}} \left(f_1 - \sum_{j=2}^3 H_{1j} t_j \right)$$