



- **Descrizione e stima dell'errore**
 - Errori di modellazione
 - Errori di discretizzazione
 - Errori dovuti alla procedura iterativa
 - Errori utente e di programmazione
- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**
 - Verifica di un codice CFD
 - Validazione di risultati CFD
 - Suggerimenti generali



- **Descrizione e stima dell'errore**
 - Errori di modellazione
 - Errori di discretizzazione
 - Errori dovuti alla procedura iterativa
 - Errori utente e di programmazione
- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**
 - Verifica di un codice CFD
 - Validazione di risultati CFD
 - Suggerimenti generali



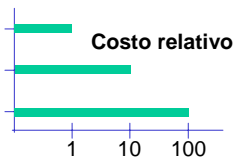
Descrizione e stima dell'errore

- E' importante conoscere gli errori, e stimarli quantitativamente;
- Il livello accettabile dell'errore varia a seconda dell'applicazione (es. fasi iniziali del progetto e sensibilità alle variazioni delle variabili progettuali);
- L'analisi metodica dei risultati e la stima degli errori rappresenta un'attività costosa, ma spesso irrinunciabile;
- L'analisi degli errori va fatta in ordine inverso:

1 Errori di iterazione;

2 Errori di discretizzazione;

3 Errori di modellazione.



- **Descrizione e stima dell'errore**
 - **Errori di modellazione**
 - **Errori di discretizzazione**
 - **Errori dovuti alla procedura iterativa**
 - **Errori utente e di programmazione**
- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**
 - **Verifica di un codice CFD**
 - **Validazione di risultati CFD**
 - **Suggerimenti generali**



Errori di modellazione - Descrizione

- Le equazioni rappresentano un *modello matematico*, e sono in genere affette da errori di varia natura:
 - La turbolenza, per problemi di interesse industriale, può solo venire approssimata da modelli semi-empirici;
 - Combustione, reazioni chimiche, flussi multi-fase, et. sono descritti da modelli approssimati;
 - Le proprietà termofisiche sono note in modo approssimativo; la loro dipendenza da alcune variabili di stato (es. pressione) non è nota, oppure viene approssimata (es. Boussinesq; incomprimibilità a basso Mach);
 - Conoscenza imprecisa o parziale delle condizioni al contorno e iniziali;
 - Geometrie troppo complesse (dettagli di dimensione molto inferiore a quella del dominio).
- La *soluzione esatta* delle equazioni, se disponibile, sarebbe comunque affetta da errore: *errore di modellazione*.



Errori di modellazione - Stima

- Sono gli errori più difficili da stimare, e variano per le varie grandezze;
- E' necessario disporre di misure effettuate su *prototipo reale* (no modello in scala);
- Nella gran parte dei casi tali dati non sono disponibili, e quindi si ricorre a *test-case* il più possibile simili (fisica, condizioni al contorno et.) al problema in esame:
 - Disponibilità di *accurate* misure sperimentali;
 - Disponibilità di data-base provenienti da *accurate* simulazioni DNS.
- Poiché talvolta gli errori di discretizzazione e quelli di modellazione si compensano, accade che l'accordo fra risultati calcolati e dati sperimentali sia migliore per una griglia (discretizzazione) rada;
- Il confronto con dati sperimentali va fatto solo quando si è verificata la convergenza a una soluzione *grid-independent*, e gli errori di discretizzazione sono sufficientemente piccoli.



- **Descrizione e stima dell'errore**
 - Errori di modellazione
 - Errori di discretizzazione
 - Errori dovuti alla procedura iterativa
 - Errori utente e di programmazione
- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**
 - Verifica di un codice CFD
 - Validazione di risultati CFD
 - Suggerimenti generali

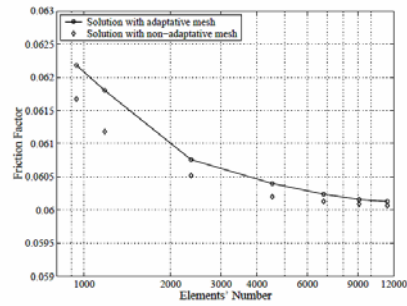
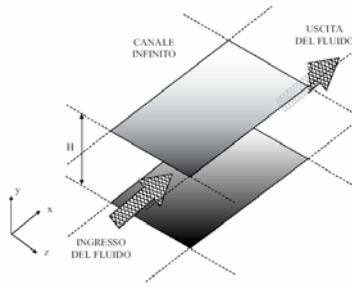


Errori di discretizzazione - Descrizione

- Non siamo mai in grado di ottenere la *soluzione esatta* del set di equazioni, ma solo *approssimata*.
- La bontà dell'approssimazione migliora con:
 - Aumento della risoluzione spaziale e temporale (costoso);
 - Uso di schemi più accurati (non sempre possibile/disponibile; talvolta più costoso e/o difficoltà di convergenza);
 - Distribuzione "intelligente" dei nodi/celle della griglia (trial-and-error; griglia adattativa).
- Definiamo *errore di discretizzazione* la differenza fra la *soluzione esatta delle equazioni*, e la *soluzione esatta dell'approssimazione discreta*.

Errori di discretizzazione - Stima

- Gli errori di discretizzazione possono venire valutati solo risolvendo il problema - senza variazione del modello matematico - su griglie via via più fini (raffinamento di griglia);
 - Esempio: canale piano-parallelo



Errori di discretizzazione - Stima

- Gli errori di discretizzazione sono dovuti all'uso di approssimazioni per i vari termini delle equazioni e le condizioni al contorno;
- Soluzione indipendente dalla griglia:
 - Sia G^0, G^1, \dots, G^N una serie di griglie a risoluzione crescente;
 - Definiamo una o più grandezze significative per il problema in esame, che per le varie griglie assume i valori $S(G^0), S(G^1), \dots, S(G^N)$;
 - Si afferma di aver raggiunto una soluzione indipendente dalla griglia (*grid-independent*) se, oltre all'andamento monotono, è verificata la:

$$|S(G^N) - S(G^{N-1})| \leq \varepsilon \quad (6.1)$$



Errori di discretizzazione - Stima – cont.

- Per problemi sufficientemente regolari, la qualità delle approssimazioni è descritta in termini dell'ordine di troncamento (potenza della spaziatura di griglia);
- E' importante notare che l'ordine dell'approssimazione è solo una misura della variazione dell'errore al variare della spaziatura di griglia, e NON è una misura dell'errore:
 - Approssimazioni di uguale ordine possono avere errori molto diversi ($\approx O(10)$) sulla stessa griglia;
 - Per una particolare griglia, un'approssimazione di basso ordine può avere un errore inferiore ad una di ordine maggiore;
 - L'approssimazione di ordine più elevato darà sicuramente luogo a errori inferiori raffinando la griglia.



Errori di discretizzazione - Stima – cont.

- La via migliore per analizzare gli errori di discretizzazione, è quella di dimezzare la spaziatura di griglia in ciascuna direzione, e per griglie strutturate ciò significa:
 - In 2D → aumento delle celle/nodi di un fattore 4;
 - In 3D → aumento delle celle/nodi di un fattore 8 (costoso).
- Tuttavia:
 - Solitamente il raffinamento non è necessario in tutte le tre direzioni;
 - Il raffinamento non è sempre necessario dappertutto (distribuzione errori);
 - Il raffinamento, per griglie non strutturate, avviene in modo diverso.
- E' comunque importante che il raffinamento sia sostanziale (> 50%).
- **IMPORTANZA FONDAMENTALE DI UNA CORRETTA GENERAZIONE DELLA GRIGLIA - QUALITÀ DELLA GRIGLIA !**



Errori di discretizzazione - Stima – cont.

- Griglia di buona qualità:
 - Il più possibile prossima ad una griglia ortogonale (per FV: angolo fra la normale alla faccia e la linea che connette i centri delle due celle adiacenti);
 - Addensamento celle/nodi nelle zone caratterizzate da gradienti maggiori - griglie adattative;
 - Criteri quantitativi della qualità della griglia.
- Errore di discretizzazione (*estrapolazione di Richardson*):

$$\varepsilon_h \approx \frac{\phi_h - \phi_{2h}}{r^p - 1}$$

(6.2)

ϕ_h = soluzione su una griglia con spaziatura media h
 ϕ_{2h} = soluzione su una griglia con spaziatura media $2h$
 p = ordine della discretizzazione
 r = fattore di raffinamento della griglia



Errori di discretizzazione - Stima – cont.

- L'uso dell'estrapolazione di Richardson, in generale, è difficile (e costoso) in applicazioni industriali;
- Le quantità integrali (es. resistenza, flusso termico) convergono con l'ordine della discretizzazione solo in casi regolari (laminare);
- Per problemi complessi - turbolenza, combustione, flussi multifase - la definizione di ordine dell'approssimazione è complicata.



- **Descrizione e stima dell'errore**
 - Errori di modellazione
 - Errori di discretizzazione
 - Errori dovuti alla procedura iterativa
 - Errori utente e di programmazione
- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**
 - Verifica di un codice CFD
 - Validazione di risultati CFD
 - Suggerimenti generali



Errori dovuti alla procedura iterativa - Descrizione

- La discretizzazione produce, di solito, un set accoppiato di equazioni non lineari;
- Queste sono linearizzate, ed i sistemi di equazioni lineari sono risolti, usualmente, attraverso procedure iterative;
- Ogni processo iterativo va fermato ad un certo punto: *criteri di convergenza*;
- Di solito, il processo iterativo continua sino a quando i livelli del residuo sono stati ridotti di una certa quota;
- Definiamo errore di iterazione la differenza fra la soluzione esatta e quella ottenuta tramite il processo iterativo;
- La scelta dei criteri di convergenza è spesso delicata:
 - Criterio troppo restrittivo → costoso;
 - Criterio troppo largo → errori maggiori di quelli di discretizzazione e modellazione.



Errori dovuti alla procedura iterativa - Stima

- Come regola generale, l'errore di iterazione - o errore di convergenza - dovrebbe essere un ordine di grandezza inferiore all'errore di discretizzazione;
- Inutile e costoso iterare troppo: spesso sufficienti 3-4 cifre significative;
- Ci sono varie tecniche per stimare gli errori di iterazione:
 - A parte le fasi iniziali, la riduzione dell'errore, in funzione del numero di iterazioni, è comparabile con la riduzione del residuo ϵ /o la riduzione della differenza fra iterazioni successive;
 - Noto l'errore all'inizio (soluzione nulla, o stima), si può assumere una riduzione dell'errore di 3-4 ordini di grandezza se la norma del residuo è stata ridotta anch'essa di tale entità;
 - Un errore comune è quello di controllare solo la differenza fra due iterazioni successive: problemi in caso di convergenza lenta.
- Sistemi di equazioni lineari: i residui sono spesso calcolati e disponibili.



Errori dovuti alla procedura iterativa - Stima

- La tolleranza sull'errore di iterazione deve aumentare se la griglia è fine:
 - Ciò avviene in modo automatico se il criterio di convergenza è basato sulla somma (normalizzata) dei residui, anziché sul residuo medio/cella.
- Per *applicazioni nuove*, ad esempio utilizzo di un modello ad-hoc (user routine), è necessario accertarsi che la soluzione converga sino all'errore di macchina (*round-off*);
- Un caso talvolta comune è l'assenza o difficoltà di convergenza per problemi particolari, instabili e/o inerentemente non stazionari (vedi **Problemi di convergenza**):
 - Separazioni da corpi non profilati (*bluff bodies*);
 - Domini simmetrici con soluzione simmetrica instabile (diffusori, espansioni);
 - Convezione naturale e/o mista con intensità elevata delle forze di galleggiamento.



- **Descrizione e stima dell'errore**

- Errori di modellazione
- Errori di discretizzazione
- Errori dovuti alla procedura iterativa
- Errori utente e di programmazione

- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**

- Verifica di un codice CFD
- Validazione di risultati CFD
- Suggerimenti generali



Errori utente e di programmazione - Descrizione

- **Errori utente** (*user errors*): introdotti nella fase di definizione del problema (*input data*), ad esempio:
 - Condizioni al contorno;
 - Geometria e/o griglia;
 - Modelli e parametri.
- **Errori di programmazione**: nello sviluppo di procedure CFD o, frequentemente in ambito industriale, nello sviluppo di sottomodelli e/o modifiche ad-hoc (*user routines*; *customizzazione*) implementati in pacchetti commerciali:
 - Mancata corrispondenza delle variabili;
 - Nomi variabili;
 -



Errori utente e di programmazione - Stima

- **Errori utente:**

- Spesso segnalati dal programma
- Talvolta evidenziati da mancata convergenza, anche per problemi canonici, o addirittura “esplosione” (blow up);
- Opportunità di analizzare criticamente i risultati (collaborazione con altri utenti; conoscenza della fluidodinamica e della tipologia del problema in particolare).

- **Errori di programmazione:**

- Mancata corrispondenza delle variabili;
- Nomi variabili;
- Mancato controllo del segno di grandezze definite positive (es. energia cinetica turbolenta);
-



- **Descrizione e stima dell'errore**

- **Errori di modellazione**
- **Errori di discretizzazione**
- **Errori dovuti alla procedura iterativa**
- **Errori utente e di programmazione**

- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**

- **Verifica di un codice CFD**
- **Validazione di risultati CFD**
- **Suggerimenti generali**



Verifica di un codice CFD

- Attività di pertinenza dello sviluppatore, ma talvolta di interesse anche all'utente:
 - Applicazione per la quale il codice non è mai stato testato e verificato estensivamente;
 - Sviluppo *in-house* di modelli e *parametizzazioni* non incluse nel sistema.
- In tali casi è opportuno verificare:
 - Convergenza (criteri);
 - Errori di discretizzazione;
 - Accordo con precedenti risultati di test-case analitici e/o numerici.
- Solo quando sia accertata la *qualità numerica dei risultati* - corrispondenza fra modello e soluzione - si può passare alla validazione dei risultati.



- **Descrizione e stima dell'errore**
 - **Errori di modellazione**
 - **Errori di discretizzazione**
 - **Errori dovuti alla procedura iterativa**
 - **Errori utente e di programmazione**
- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**
 - **Verifica di un codice CFD**
 - **Validazione di risultati CFD**
 - **Suggerimenti generali**



Validazione di risultati CFD

- Confronto con dati sperimentali:
 - Qualità dei test sperimentali: accuratezza, completezza, ripetitività, agevole riproducibilità delle condizioni al contorno;
 - Collaborazione fra sperimentatori e analisti CFD;
 - Conoscenza degli errori sperimentali;
 - Difficoltà nell'individuazione delle condizioni al contorno (es. caratteristiche della turbolenza nelle sezioni di ingresso);
 - Opportunità di variare - su un range adeguato - i parametri incogniti, in modo da valutare la sensibilità della soluzione a tali dati;
 - Attenzione nel caso di analisi di varianti di una stessa geometria: stesso modello e risoluzione garantiscono spesso - ma non sempre - la stessa qualità ottenuta sulla geometria oggetto di validazione sperimentale.
- Importanza della qualità - ed adeguata risoluzione - della griglia.



- **Descrizione e stima dell'errore**
 - **Errori di modellazione**
 - **Errori di discretizzazione**
 - **Errori dovuti alla procedura iterativa**
 - **Errori utente e di programmazione**
- **Raccomandazioni per l'analisi di accuratezza di una simulazione CFD:**
 - **Verifica di un codice CFD**
 - **Validazione di risultati CFD**
 - **Suggerimenti generali**



Suggerimenti generali

- Difficoltà nella definizione di regole rigide per la validazione di simulazioni CFD:
 - Utilizzare una griglia di *qualità adeguata*;
 - È opportuno controllare che la soluzione sia - ragionevolmente - *grid-independent*;
 - In presenza di numerosi modelli - turbolenza, flussi bifase, combustione etc. - è difficile separarne gli effetti;
 - Scegliere in modo oculato le condizioni al contorno e il dominio (sezioni di ingresso e uscita);
 - Modelli più complessi (es. RSM vs $k-\varepsilon$) non garantiscono necessariamente risultati più accurati;
 - La qualità minima - e quindi l'accettabilità - dei risultati varia da caso a caso;
 - Schemi del 1° ordine - *upwind* o *ibrido* - forniscono risultati inaccettabili, ma possono *talvolta* essere utilizzati per quelle grandezze dominate dai termini sorgente (es. dissipazione dell'energia cinetica turbolenta).



Suggerimenti generali

- Possiamo riassumere i passi più importanti di un'analisi CFD:
 - Attento esame del problema fisico (es. stazionarietà; 3D o 2D; proprietà termofisiche; parametri adimensionali);
 - Opportunità, nel caso di sviluppo di un modello ad-hoc, di validazione su casi test;
 - Scegliere un modello (es. turbolenza) adeguato, scelto sulla base del problema fisico in esame, esperienze precedenti e dati in letteratura;
 - Generare una griglia di qualità e risoluzione adeguata;
 - Possibilmente, raffinare la griglia in modo sistematico - due o più raffinamenti o utilizzo di procedure adattative;
 - Effettuare le analisi, verificando la convergenza monotona, altrimenti raffinare ulteriormente la griglia;
 - Confrontare i risultati - se possibile - con dati di confronto.