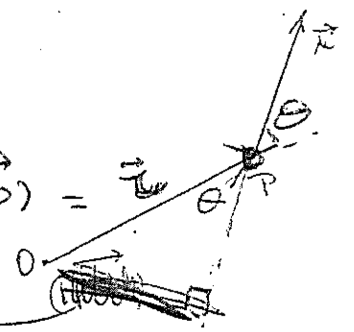
Teorema del momento della quantita' di moto.

Il teorema del momento della quantita' di moto é una conseguenza meno diretta del secondo Principio della dinamica poiché esso deriva dal teorema dell'impulso opportunamente esteso dall'introduzione dei concetti di momento di una forza e momento della quantita' di moto. Tali concetti rientrano nella categoria piu' vasta di momento di un vettore rispetto ad un punto. Sia $\vec{\mu}$ un vettore qualsiasi ed O un punto non appartenente alla retta di azione di $\vec{\mu}$.



$(P-O) = \overrightarrow{(P-O)} = \vec{r}$

$r \operatorname{sen}\theta$

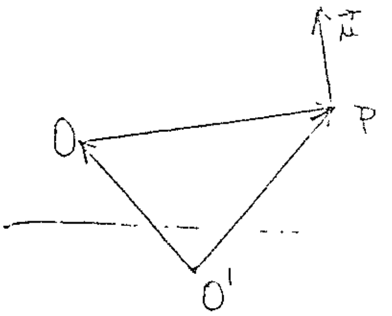
Sia P il punto di applicazione del vettore $\vec{\mu}$. Definiamo come momento di $\vec{\mu}$ rispetto al punto O il seguente prodotto vettoriale : $\vec{M}_o = \underbrace{(P-O)}_{\vec{r}} \wedge \vec{\mu}$. (1)

L'indice O in basso sta' a ricordare il punto rispetto al quale M_o é stato calcolato. Osserviamo anzitutto che il vettore $\vec{M}_o$, contrariamente ad $\vec{\mu}$, non é un vettore applicato in nessun punto particolare nello spazio. Dalla definizione del prodotto vettoriale abbiamo che il modulo é dato da : $|\vec{M}_o| = |P-O| \times |\vec{\mu}| \times \operatorname{sen}\vartheta$, il cui significato geometrico é dato dall'area del parallelogramma costruito sui lati PO ed $|\vec{\mu}|$. Da cio' consegue l'importante proprieta' che $\vec{M}_o$ non varia se il punto di applicazione P di $\vec{\mu}$ si sposta lungo la retta di azione di $\vec{\mu}$, fisso restando il punto O. $\vec{M}_o$ risulta inoltre ortogonale ai vettori (P - O) ed $\vec{\mu}$ e quindi al piano da essi individuato.

VARIO P (su retta di $\vec{\mu}$) $\Downarrow$ VARIANO r, θ $\Rightarrow$ $r \operatorname{sen}\theta = \text{cost}$

VARIO O

Supposto ora di mantenere fisso il punto P vogliamo vedere come varia il momento $\vec{M}_o$ al variare di O. Sia pertanto O' un punto distinto da O; risulta dalla definizione : $\vec{M}_{O'} = (P-O') \wedge \vec{\mu}$.



Dalla figura osserviamo che :

$(P-O') = (P-O) + (O-O')$ per cui

$\vec{M}_{O'} = (P-O) \wedge \vec{\mu} + (O-O') \wedge \vec{\mu}$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_o + (O-O') \wedge \vec{\mu} \qquad (2)$$

CASI PARTICOLARI

$\vec{\mu} = m\vec{v} = \vec{p} \longrightarrow \vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ momento della q. di moto / momento angolare

$\vec{\mu} = \vec{F} \longrightarrow \vec{C} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$ momento di una forza / momento meccanico

Questa relazione é importante quando si estende il concetto di momento ad un sistema di più vettori $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \dots \vec{\mu}_n$ applicati rispettivamente ai punti $P_1, P_2, P_3 \dots\dots\dots P_n$. Sia di nuovo O un punto di riferimento, scelto arbitrariamente. Avremo quindi tanti momenti $\vec{M}_o^{(1)}, \vec{M}_o^{(2)}$, $\dots\dots\dots \vec{M}_o^{(n)}$ calcolati rispetto ad O con la definizione data. Sarà naturale definire come momento risultante $\vec{M}_{on}$ la somma vettoriale

$$\vec{M}_{on} = \vec{M}_o^{(1)} + \vec{M}_o^{(2)} + \dots \vec{M}_o^{(n)} = (P_1-O)\wedge\vec{\mu}_1 + (P_2-O)\wedge\vec{\mu}_2 + \dots (P_n-O)\wedge\vec{\mu}_n = \sum_{i=1}^{n}(P_i-O)\wedge\vec{\mu}_i$$

Passando dal punto O ad un altro O' abbiamo:

$$\vec{M}_{O'} = (P_1-O)\wedge\vec{\mu}_1 + (O-O')\wedge\vec{\mu}_1 + (P_2-O)\wedge\vec{\mu}_2 + (O-O')\wedge\vec{\mu}_2 + \dots + (P_n-O)\wedge\vec{\mu}_n + (O-O')\wedge\vec{\mu}_n$$

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n}(P_i-O)\wedge\vec{\mu}_i + (O-O')\wedge\sum_{i=1}^{n}\vec{\mu}_i$$

Indichiamo con $\vec{R}$ la somma vettoriale $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{\mu}_i$ per cui avremo:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O-O')\wedge\vec{R} \qquad (3)$$

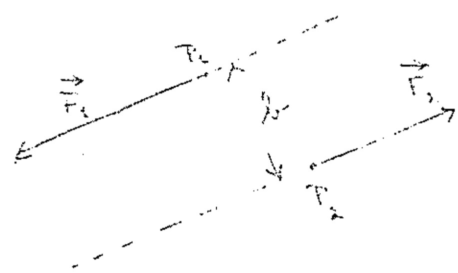
Particolarmente importante é il caso in cui $\vec{R}=0$ perché in tal caso $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$ per cui, data l'arbitrarietà dei punti O, O' si ha l'importante proprietà che il momento totale di un sistema di vettori a risultante nulla (norma vettoriale nulla) é indipendente dal punto di riferimento O rispetto al quale viene calcolato; esso risulta quindi una proprietà intrinseca del sistema di vettori dato. Questo risultato é molto importante nel caso ché i vettori dati siano delle forze.

Se $\vec{R}=0$
$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$

In un sistema di forze la cui risultante é nulla, il momento totale del sistema di forze é indipendente dal punto di riferimento rispetto al quale viene applicato. Ciò é importante in quei casi in cui si studia l'equilibrio dei corpi cioé la cosidetta statica dei sistemi materiali. Un caso particolarmente semplice ed interessante si ha quando vi sono solo due forze $\vec{F}_1$ ~~ed $\vec{F}_2$,~~ uguali e contrarie i cui punti di applicazione però si trovano su due rette parallele ma distinte. Tale sistema costituisce una $\boxed{\text{doppia di forze.}}$ (4)

36

Sia b la distanza minima fra le due rette di applicazione. Essendo $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ovviamente $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$



NO

Calcoliamo il momento totale $\vec{M}_c$ (momento della coppie di forze); come punto di riferimento per il calcolo possiamo prendere un punto qualsiasi, dato che $\vec{R} = 0$. Pertanto prendiamo P_1 (o P_2) come punto di riferimento in modo che uno dei due momenti parziali sia nullo.

Sarà, $\vec{M}_c = (P_2 - P_1) \wedge \vec{F}_2 = (P_1 - P_2) \wedge \vec{F}_1$.

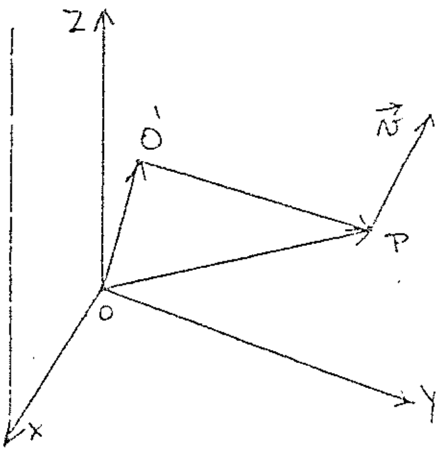
Tale momento risulta ortogonale al piano individuato dalla coppia di forze ed il suo modulo é uguale al prodotto del modulo di $\vec{F}_1$ (o $\vec{F}_2$) per la distanza minima b fra le due rette d'azione; $|\vec{M}_c| = F \cdot b$, (5)
essendo $F = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$. Quindi si può ottenere lo stesso momento della coppia variando F e b in modo che il prodotto sia costante .

L'esperienza ed anche l'intuizione ci dice che l'effetto di una coppia di forze é quello di porre in rotazione il corpo al quale la coppia stessa viene applicata. Più in generale vedremo che l'esistenza di momenti non nulli é responsabile dei moti rotatori dei corpi.

Teorema del momento angolare

Riprendendo in esame la relazione, data dal teorema dell'impulso,

(A) $\vec{F}dt = d(m\vec{v})$, possiamo fare le seguenti considerazioni. Si scelga un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e sia O' un punto fisso ma distinto dall'origine O del sistema di riferimento.



Se moltiplichiamo vettorialmente a sinistra ambo i membri della relazione precedente (P − O') otteniamo:

$$(P - O') \wedge \vec{F}dt = (P - O') \wedge d(m\vec{v}) \qquad (B)$$

dove P rappresenta un punto materiale di massa m e velocità $\vec{v}$. Chiameremo momento dell'impulso $\vec{\mu}$, rispetto ad O', il prodotto vettoriale

$$d\vec{\mu} = (P - O') \wedge \vec{F} dt ,$$

Osserviamo ancora quanto segue:

$$(C) \quad (P - O') \wedge d(m\vec{v}) = d[(P - O') \wedge m\vec{v}] - \overbrace{d[(P - O')] \wedge m\vec{v}}^{=0} \quad \text{poichè:}$$

$$d[(P - O') \wedge m\vec{v}] = (P - O') \wedge d(m\vec{v}) + d[(P - O')] \wedge m\vec{v} .$$

$F = ma$
$F = \frac{dp}{dt}$
$\tau = \frac{dL}{dt}$
indip. dal punto O'

$$\vec{F}dt = d(m\vec{v})$$

$$\vec{r} \wedge \vec{F}dt = \vec{r} \wedge d(m\vec{v}) \quad \to 0$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} = d(\vec{r} \wedge m\vec{v}) - (d\vec{r} \wedge d(m\vec{v}))$$