

## VARIABILE ALEATORIA $x$

è variabile compiutamente definita, ma non conosciuta per mancanza di informazione.

$x_1, \dots, x_m$

valori che  $x$  può avere

DETERMINAZIONI

$$p_1, \dots, p_m \rightarrow \sum_{i=1}^m p_i = 1$$

Ammettiamo che le determinazioni siano distinte: capita una o capita l'altra; cioè

$$p\{x=x_1 \wedge x=x_2\} = 0$$

$m$  eventi

$$E_1 = \{x=x_1\}$$

$\vdots$

$$E_m = \{x=x_m\}$$

in Totale evento CERTO  $\bar{V}$  (vero)

$$E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_m = \bar{V}$$

Eventi sono a due a due incompatibili

$$\forall i, j \quad E_i \wedge E_j = F \quad (\text{evento falso})$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1 \quad (\text{probabilità dell'evento vero})$$

# DISTRIBUZIONE O VALUTAZIONE DELLE PROBABILITÀ

Esistono 3 metodi: 2 oggettivi, 1 soggettivo

"OGGETTIVI"  $\begin{cases} \text{CLASSICO, "a priori"} & A \\ \text{FREQUENTISTICO, "a posteriori"} & B \end{cases}$

"SOGGETTIVO"  $C$

A) es. Dado: senza fare delle prove diciamo: ogni faccia ha probabilità  $\frac{1}{6}$  di uscire.

B) Facciamo prove, abbiamo frequenza relativa (se numero di prove  $n \rightarrow \infty$  si ha la frequenza assoluta = probabilità)

A e B sono collegate dalla LEGGE DEI GRANDI NUMERI

$m$   
 $m_k$

$$p_k = \frac{m_k}{m} \quad p_k$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} p\{|p_k - p_k| > \varepsilon\} = 0$$

(nel senso di limite aritmetico)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{m} \quad \forall m > \bar{m} \quad |p_k - p_k| < \varepsilon$$

A e B oggettivi perché questi metodi vorrebbero prescindere da chi fa la valutazione.

C è legato alle informazioni di chi fa valutazione (in casi comuni coincide con A e B)

Per i soggettivisti tutte le determinazioni delle probabilità sono soggettive.

Ogni misura fatta nella stessa situazione sperimentale

$x_1 \dots x_m$

$p_1 \dots p_m$

VALORI CERTI:

\* MEDIA PONDERATA  
(VALORE MEDIO)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i x_i}{\sum_{i=1}^m p_i} = E(x)$$

\*\* VARIANZA

$$\text{var}(x) = \overline{(x - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 p_i}{\sum_{i=1}^m p_i} = \sigma^2$$

Il VALORE MEDIO è un'indicazione, una misura del VALORE CENTRALE

La VARIANZA è una misura dello SPARPAGLIAMENTO attorno al valore centrale

\* BARICENTRO  $p = m$   $x = \text{distanza}$

\*\* MOMENTO DI INERZIA BARICENTRICO

VALORE MEDIO

è lineare, è OPERATORE LINEARE; e variabili aleatorie  $x, y$

$$\overline{(x+y)} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{(ax+by)} = a\bar{x} + b\bar{y}$$

VARIANZA

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= \overline{(x^2 + \bar{x}^2 - 2x\bar{x})} = \overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2\overline{x\bar{x}} = \overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x} = \\ &= \overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x}$$

VARIANZA DI UNA SOMMA

$$\begin{aligned} \text{var}(x+y) &= \overline{(x+y)^2} - (\overline{x+y})^2 = \overline{x^2 + y^2 + 2xy} - (\bar{x} + \bar{y})^2 = \overline{x^2} + \overline{y^2} + 2\overline{xy} + \\ &- \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2 = \text{var}(x) + \text{var}(y) + 2\overline{xy} - 2\bar{x}\bar{y} \end{aligned}$$

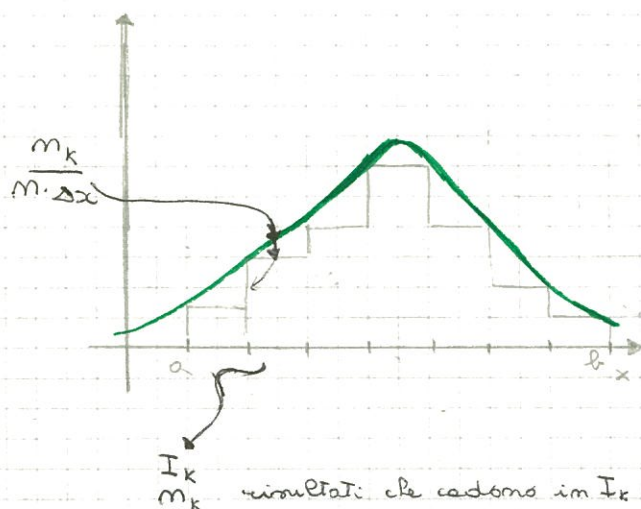
Quando le 2 variabili sono STATISTICAMENTE INDIPENDENTI (il valore che assume l'una non influisce su quello dell'altra):

$$p\{x=x_i \wedge y=y_j\} = p\{x=x_i\} \cdot p\{y=y_j\} \quad \overline{2xy} - 2\bar{x}\bar{y} = 0$$

Se dipendenti è il doppio della COVARIANZA

$n$  risultati:  $x_1, \dots, x_n$

Per vedere come si distribuiscono faccio ISTOGRAMMA



$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$k = 0, \dots, N$$

tendenza centrale

simmetria rispetto al centro

Possare al limite: stringere ampiezza del canale, aumentare misure

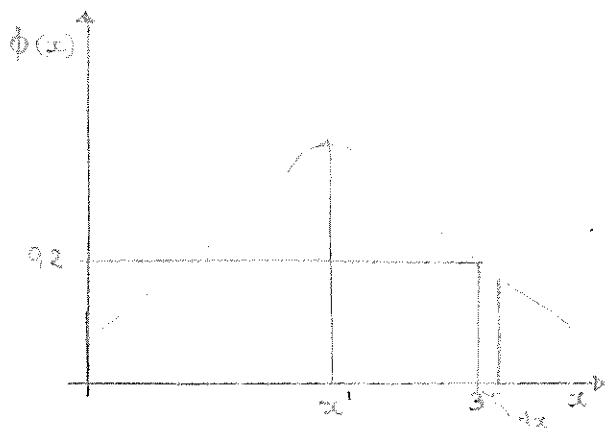
3 IPOTESI:

- 1) in ogni misura sono presenti degli errori
- 2) ogni errore macroscopico consiste di una somma di errori elementari  $\delta$
- 3) ogni  $\delta$  ha la stessa probabilità di capitare tanto in meno quanto in più.

Da queste ipotesi consegue:

- 1) E' + probabile che somma dei  $\delta$  sia  $= 0$  poiché  $\delta$  si compensano  $\Rightarrow$  sono più probabili errori macroscopici piccoli che grandi. (TENDENZA CENTRALE)
- 2)  $\delta$  sia in meno che in più (SIMMETRIA)

# Gaussiana



probabilità che cada in  
intervalli  $\bar{e} = 0,2 \cdot \Delta x$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}}$$

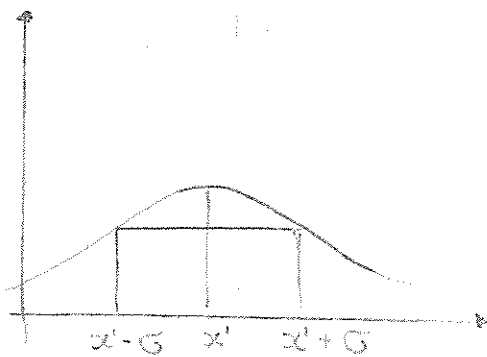
$\phi(x)$  = densità di probabilità

si ottiene come limite di una densità di frequenza

(integrale...)

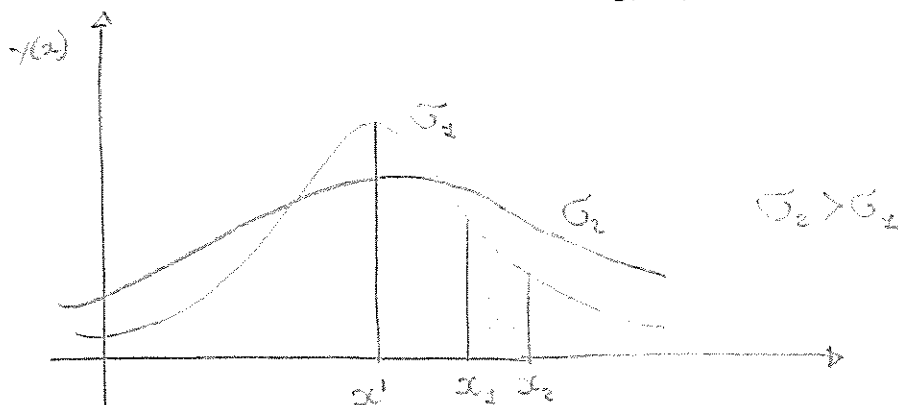


la probabilità è rappresentata da  
tutta l'area



probabilità che valore vers cada in intervalli fra  $x' - \sigma$  e  $x' + \sigma$   
 $\bar{e} = 68\%$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}}$$



$$p \{x \in [x_1, x_2]\} = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx$$

che è poi la densità di probabilità

Area sottesa dalla curva = 1

probabilità che  $x$  abbia un valore qualsiasi = 1

2 parametri  $x'$  e  $\sigma$

Posso cambiare forme della curva, ma area sottesa sempre = 1

quando  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}$

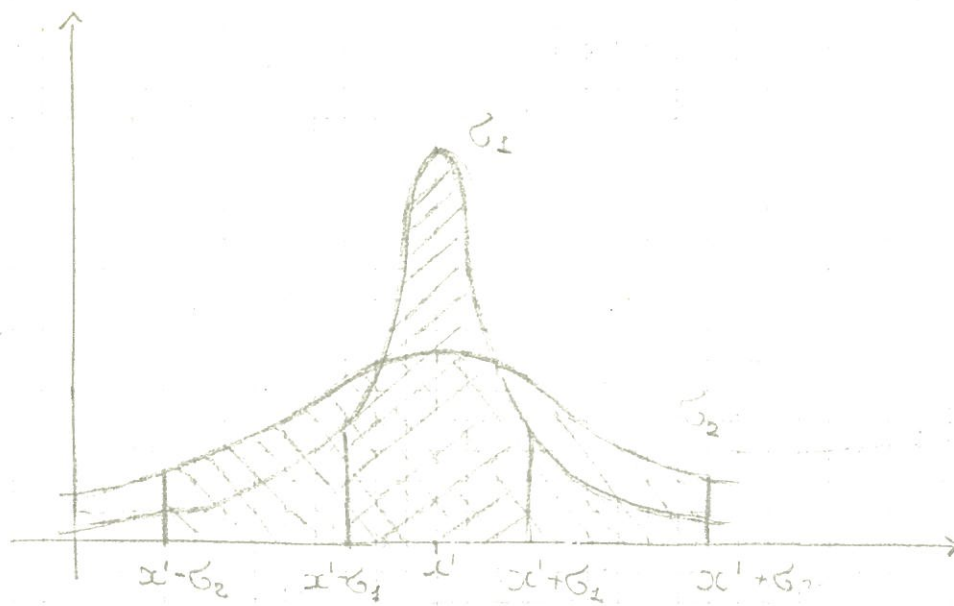
se  $x = x'$

massima altezza

+ grande  $\sigma$  + bassa la curva

$$\sigma_2 > \sigma_1$$

! valori + dispersi



più preciso quello con  $\sigma_1$

$$p\{x \in [x' - \sigma_2, x' + \sigma_2]\} = 0,68 = 68\%$$

$$p\{x' \in [x - \sigma, x + \sigma]\} = 0,68 = 68\%$$



$[x - \sigma, x + \sigma]$  INTERVALLO DI CONFIDENZA al 68%

Ci fidiamo di trovarci valore vero

m	p
1	0,68
2	0,95
3	0,99

$$[x - m\sigma, x + m\sigma]$$

informazioni + precise: 1) stessa probabilità con intervallo minore  
2) probabilità maggiore nello stesso intervallo

a) aumento misure

$$n \quad x_1, \dots, x_n$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \text{ var } \{\bar{x}\} = \text{var} \left\{ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right\} = \text{var} \left\{ \frac{x_1}{n} \right\} + \dots + \text{var} \left\{ \frac{x_n}{n} \right\} =$$

IPOTESI:

$x_1, \dots, x_n$  sono statisticamente indipendenti:

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var} \{x_i\} = \frac{n \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Ha senso quindi fare misure ripetute

$$\eta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

media delle misure è  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  + efficiente della misura  
singola per stabilire valore vero

STIMA DEL VALORE VERO

$$\bar{x} \approx x'$$

STIMA DELL'ERRORE

$$\underbrace{x_i - \bar{x}}_{\rightarrow v_i} \approx x_i - x'$$

SCARTO verso dalla media

VARIANZA = media dei quadrati degli scarti

STIMA DELLA VARIANZA

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1} \approx \sigma^2$$

scarto quadratico medio degli scarti

• Deviazione STANDARD

STIMA SULLA VARIANZA DALLA MEDIA

$$M^2 = m_{\bar{x}}^2 = \frac{m^2}{n} \approx \eta^2$$

Scarto quadratico medio della media

Deviazione STANDARD DELLA MEDIA

$$p \{ x' \in [x_i - m, x_i + m] \} = 0,68$$

$$p \{ x' \in [\bar{x} - M, \bar{x} + M] \} = 0,68$$

$$R = \bar{x} \pm M$$

modo standard per scrivere il risultato

indica l'intervallo in cui c'è il 68% di probabilità  
che all'interno vi sia il valore vero.



5 misure

$$l_1 = 100.2 \text{ cm}$$

$$v_1 = 0.3$$

$$v_1^2 = 0.09$$

$$l_2 = 100.0$$

$$v_2 = 0.1$$

$$v_2^2 = 0.01$$

$$l_3 = 100.1$$

$$v_3 = 0.2$$

$$v_3^2 = 0.04$$

$$l_4 = 99.7$$

$$v_4 = -0.2$$

$$v_4^2 = 0.04$$

$$l_5 = 99.5$$

$$v_5 = -0.4$$

$$v_5^2 = 0.16$$

$$\Sigma = 499.5 \text{ cm}$$

$$\Sigma = 0 \text{ cm}$$

$$\Sigma = 0.34 \text{ cm}^2$$

$$\bar{l} = 99.9 \text{ cm}$$

$$m^2 = \frac{0.34}{4} = 0.085 \text{ cm}^2$$

$$m = 0.29 \text{ cm}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = 0.13 \text{ cm}$$

$$R = (99.90 \pm 0.13) \text{ cm} \quad \text{oppure} \quad (99.9 \pm 0.1) \text{ cm}$$

$$y = f(u, v)$$

Se  $u$  e  $v$  non sono correlate valore più attendibile di  $y =$

$$\bar{y} = f(\bar{u}, \bar{v})$$

$$M_y = \eta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{\bar{u}, \bar{v}}^2 \eta_u^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{\bar{u}, \bar{v}}^2 \eta_v^2}$$

Misura Remota ~~ferma~~ attendibilità

ES.



$$A = a \cdot b$$

$$5a \quad \bar{a} = 25.15 \text{ mm} \quad M_a = 0.02 \text{ mm}$$

$$5b \quad \bar{b} = 14.25 \text{ mm} \quad M_b = 0.03 \text{ mm}$$

$$\bar{A} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 358.387 \text{ mm}^2$$

$$M_A = \sqrt{(\bar{b})^2 M_a^2 + (\bar{a})^2 M_b^2} = \sqrt{(14.25)^2 \cdot (0.02)^2 + (25.15)^2 \cdot (0.03)^2} =$$

$$= 0.81 \text{ mm}^2$$

$$A = (358.4 \pm 0.8) \text{ mm}^2$$

$$\text{oppure} = (358.39 \pm 0.81) \text{ mm}^2$$

## MISURA DEL MOMENTO D'INERZIA DI UN VOLANO

Un volano è uno strumento in grado di accumulare una grande quantità di energia meccanica. (Serve per regolare energia)

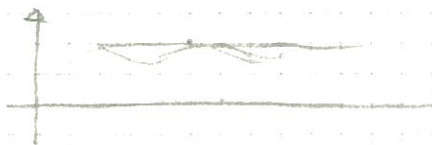
corrente alternata



per avere delle corrente continue



con condensatore



$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

Col pendolo di Torsione si può mettere sopra al piattello capo di cui si vuol studiare  $I$ .

Così sono compilate ad es. per una sfera, calcolare  $I$  rispetto al suo asse

