



Introduzione ai Modelli di Turbolenza in CFD

Enrico Nobile

*Dipartimento di Ingegneria Navale, del Mare e per
l'Ambiente - DINMA, Sezione di Fisica Tecnica*

Facoltà di Ingegneria, Università di Trieste



- **Introduzione**
- **Simulazione Numerica Diretta (DNS) di moti turbolenti**
- **Large Eddy Simulation (LES)**
- **Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS)**
- **Nuovi approcci e prospettive future**
- **Considerazioni conclusive**

Introduzione

- **Considerazioni generali**
- **Difficoltà associate alla simulazione numerica di flussi turbolenti**
- **Classificazione dei metodi di analisi e previsione**

Introduzione

- Fenomeni turbolenti nell'esperienza quotidiana:
 - Fumo di sigaretta: evidenzia il **flusso disordinato** dell'aria che lo trasporta.
 - Vento a raffiche (bora): manifesta cambiamenti di direzione ed intensità bruschi ed **imprevedibili**.
 - Deflusso nei fiumi: **trasporto** di sedimenti con conseguente modifica del letto del fiume.
 - Flusso d'aria su un ostacolo o su un profilo alare: turbolenza nello strato limite e generazione di una scia turbolenta; si manifesta in genere un **aumento della resistenza idrodinamica**.
 - Fenomeni oceanici o atmosferici: sono di difficile previsione, in quanto manifestano una **forte sensibilità alle condizioni iniziali ed al contorno**.
- Altri fenomeni turbolenti:
 - Atmosfera di Giove e Saturno
 - Atmosfera Solare
 - Struttura delle galassie: similitudine con i vortici di Kelvin-Helmoltz in un *mixing layer*.



Introduzione

Considerazioni generali

- È possibile definire la turbolenza - almeno da un punto di vista fisico-ingegneristico ?
 - 1 Un moto turbolento presenta carattere disordinato (*caotico*) nel tempo e nello spazio;
 - 2 Un moto turbolento presenta caratteristiche di *imprevedibilità*: una piccola incertezza riguardo alle sue condizioni iniziali sarà amplificata sino a rendere impossibile una precisa previsione deterministica della sua evoluzione;
 - 3 Un moto turbolento è in grado di *mescolare* le quantità trasportate (quantità di moto, energia) molto più rapidamente che nel caso di sola diffusione molecolare (flusso laminare).



Introduzione

Considerazioni generali

- Altra definizione di turbolenza (Hinze, 1975):
 - Il regime turbolento è una condizione irregolare del flusso nel quale le varie grandezza (quantità) presentano variazioni casuali (random) nelle coordinate spaziali e temporale, tali che, dal punto di vista statistico, sia possibile derivare valori medi.
- La turbolenza ha un ampio range di scale (Bradshaw, 1974).
- La turbolenza è un fenomeno continuo (Tennekes & Lumley, 1983):
 - Anche le più piccole scale in un flusso turbolento sono comunemente molto più grandi di qualunque scala di lunghezza molecolare.

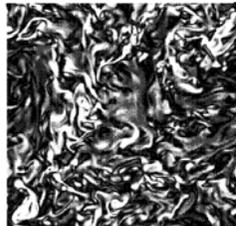
Introduzione

Considerazioni generali

- La turbolenza idrodinamica è uno degli argomenti più complessi e affascinanti di tutte le scienze fisiche. Problemi quotidiani, come la forma del getto che esce da un umile rubinetto, o – più poeticamente – la forma delle nuvole, sono al di là delle nostre attuali capacità di predizione.
- Trattazioni adeguate possono trovarsi in testi e trattati quali Tennekes e Lumley [1972], Hinze [1975] o Lesieur [1990].

Introduzione - *cont.*

Strutture turbolente - I

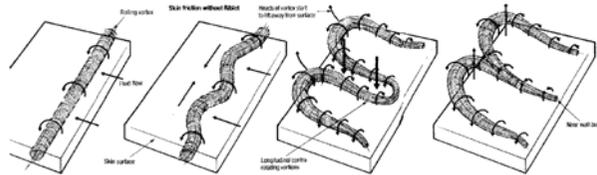


Distribuzione di vorticità in un piano in turbolenza isotropa. Da Meneveau [2001].



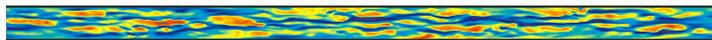
Vortici quasi-bidimensionali osservati all'interfaccia fra getti piani turbolenti. Da Brown e Roshko [1974].

Introduzione - cont. Strutture turbolente - II

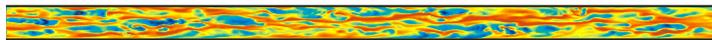


Strutture della turbolenza di parete. Da Barrett [1990].

Near-wall turbulent structures (streaks) at $z = 15$:



Streamwise velocity fluctuations (red-positive; blue-negative)

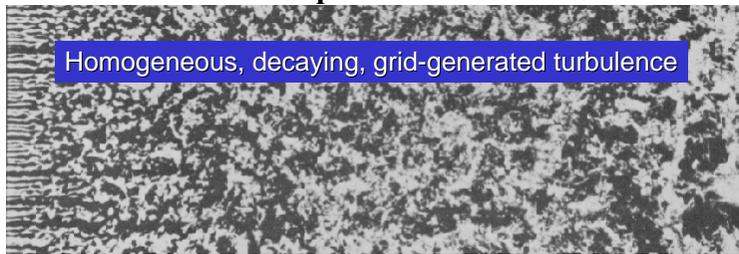


Temperature fluctuations (red-positive, blue-negative)

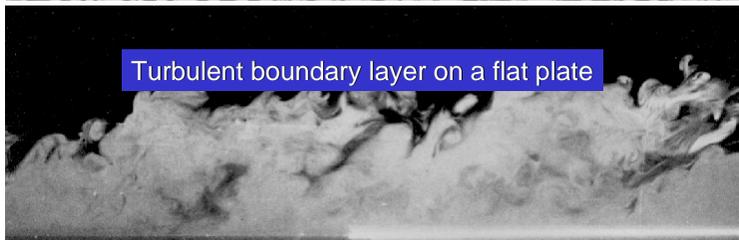
Strutture turbolente di parete (streaks) per un canale a sezione quadrata. Da Piller e Nobile, [2002].

Introduzione - cont. Two Examples of Turbulence

Homogeneous, decaying, grid-generated turbulence



Turbulent boundary layer on a flat plate



Caratterizzazione dei flussi turbolenti

- I diversi flussi turbolenti presentano molte caratteristiche peculiari:
 - 3D (es., turbolenza omogenea ed isotropa, flussi interni, ...) o quasi 2D (es., flussi atmosferici, flussi conduttivi in presenza di campi magnetici molto intensi e stabilmente orientati, ...)
 - Presenza di strutture coerenti persistenti in media (es., bolle di ricircolazione, moti secondari in canali a sezione quadrata, ...) o meno (es., turbolenza omogenea ed isotropa, canale piano parallelo, flusso in condotti a sezione circolare, ...)
 - Flussi transizionali
- Quindi, è difficile caratterizzare univocamente un flusso turbolento.
- **Intuitivamente**, un flusso turbolento è caratterizzato da disordine nello spazio e nel tempo.

Dinamica della vorticità per flussi isocorici - I

- La vorticità è definita come il rotore della velocità, e corrisponde a due volte la rotazione rigida dell'elemento fluido.

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

- La dinamica di un flusso incomprimibile è descritta dalle equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

- Forma rotazionale dell'equazione di quantità di moto:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

- Prendendo il rotore delle equazioni precedenti:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \times \left[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right] = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ \Rightarrow \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Strutture coerenti - I

- **Coherent vortex** [Lesieur, 1995]: è una regione di spazio in cui
 1. La vorticità è sufficientemente elevata da attrarre le traiettorie della particelle di fluido (*velocity induction*)

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\gamma}$$

2. La forma della regione di spazio interessata è riconoscibile per un tempo T_c superiore al *local turnover time* $2\pi/\omega$.
3. Sono strutture imprevedibili (sensibilità alle condizioni iniziali).

Strutture coerenti - II

- Definire una *coherent structure* è più complesso ed aleatorio.
- **Intuitivamente** [Lesieur, 1995]: ogni regione di spazio che presenti, in un dato istante di tempo, una qualche forma di organizzazione rispetto ad una o più grandezze che caratterizzano il flusso (velocità, vorticità, pressione, densità, temperatura, ...).
- **Ogni coherent vortex è una coherent structure, ma l'implicazione inversa non è sempre valida.** Ad esempio, le *streaks* non sono caratterizzate da vorticità elevata, e non attraggono significativamente le traiettorie delle particelle fluide \Rightarrow non sono configurabili come *coherent vortices*.

Strutture coerenti - III

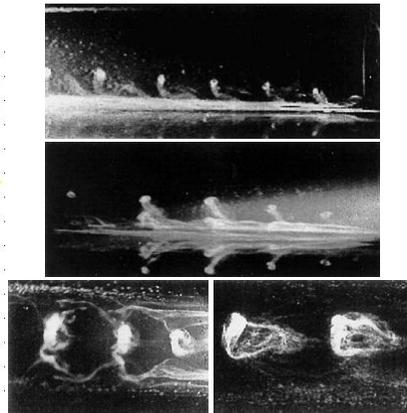
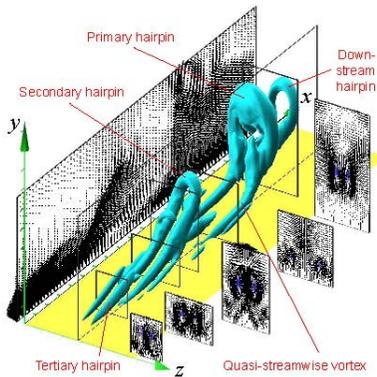
- Vortex Identification Methods:
 - Low-pressure regions [Robinson, 1991]
 - Conditional sampling
 - Correlation tensor
 - Reynolds averaging
 - Invarianti del *velocity-gradient tensor* [Hussaini]

$$\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

- Proper Orthogonal Decomposition (POD)
-

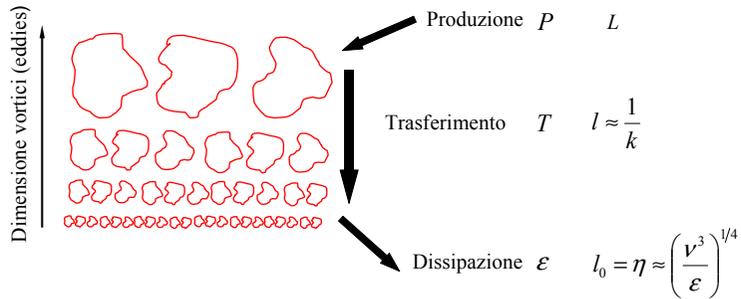
Strutture coerenti - IV

- Esempio di strutture coerenti: *hairpin vortices*.
- In funzione del metodo di identificazione, gli *hairpin vortices* sono individuabili o meno.



Introduzione - cont.

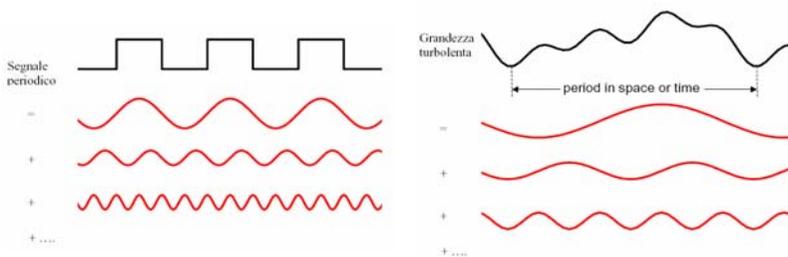
- Cascata di energia (*energy cascade*) - Kolmogorov 1941:



Una conseguenza importante di questo processo, è che, alle scale più piccole, non c'è più traccia dell'eventuale orientamento sulle scale maggiori: *isotropia della turbolenza per le scale più piccole.*

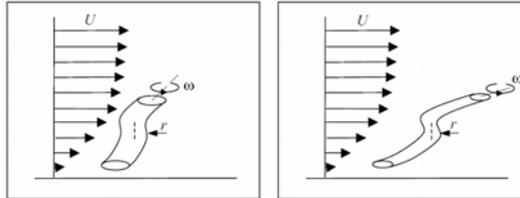
Introduzione - cont.

- La cascata di Kolmogorov è un costrutto teorico:



Introduzione - cont.

- Nei problemi ingegneristici la turbolenza è praticamente sempre un fenomeno tridimensionale, mentre esistono situazioni di turbolenza bidimensionale (es. atmosfera, circolazione oceanica). (Bradshaw 1978):
 - Il gradiente di velocità di grande scala, prevalente in una certa regione del campo di moto, stira e assottiglia un tubo di vorticità che sia inizialmente presente:



- In prima approssimazione, si deve conservare il momento angolare di quest'ultimo, che è dell'ordine di $\omega^2 r$ se ω è la velocità angolare del vortice e r il suo raggio.
- Quindi l'energia cinetica del vortice, che è dell'ordine di $\omega^2 r^2$, deve aumentare a spese dell'energia del campo di moto di grande scala.
- Lo stiramento dei vortici, quindi, trasferisce energia dalle grandi alle piccole scale e gioca un ruolo fondamentale nella cascata di energia.

Introduzione - cont.

- Scale spaziali della turbolenza:
 - Scala minima o dissipativa l_0 - dello stesso ordine dello spessore del substrato viscoso vicino a parete, oppure della stessa grandezza delle più piccole strutture turbolente responsabili della dissipazione viscosa (caratterizza le più piccole strutture spaziali che possono esistere nel campo di moto senza essere dissipate in calore da effetti viscosi);
 - large eddy energy supply rate \sim small eddy energy dissipation rate $\rightarrow \varepsilon = -dk/dt$.
 - $k \equiv \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)$ è l'energia cinetica (specifica) turbolenta [L^2/t^2].
 - ε rappresenta il tasso di dissipazione di k [L^2/t^3].
 - Sulla base dell'analisi dimensionale (Kolmogorov):

$$l_0 = \eta \approx \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}; \quad \tau = (\nu/\varepsilon)^{1/2}; \quad \nu = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad (1)$$

- Nella (1) ν [L^2/T] è la viscosità cinematica.

Introduzione - cont.

- Scale spaziali della turbolenza:
 - Scala massima o integrale L - dello stesso ordine della dimensione caratteristica del flusso per moti interni (bounded flows);
 - Dall'analisi dimensionale si ricava che l'ordine di grandezza della fornitura di k alle scale maggiori è k / t_{turnover}
 - t_{turnover} è la scala temporale associata alle strutture turbolente di dimensioni maggiori;
 - L'ordine di grandezza di t_{turnover} è stimato pari a $L / k^{1/2}$
- Poichè $\varepsilon \sim k / t_{\text{turnover}}$, $\varepsilon \sim k^{3/2} / L$ or $L \sim k^{3/2} / \varepsilon$
- Confrontando L con η

$$\frac{L}{\eta} \approx \frac{L}{(v^3 / \varepsilon)^{1/4}} = \frac{L(k^{3/2} / L)^{1/4}}{v^{3/4}} = \frac{(L k^{1/2})^{3/4}}{v^{3/4}} = \text{Re}_r^{3/4} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{\eta} \gg 1$$

- La cascata di energia, quindi, avviene fra le due scale $L > l > l_0$; il reciproco di l è chiamato κ , numero d'onda (*wave-number*).

Introduzione - cont.

- L'energia contenuta varia con k secondo la legge (Kolmogorov):

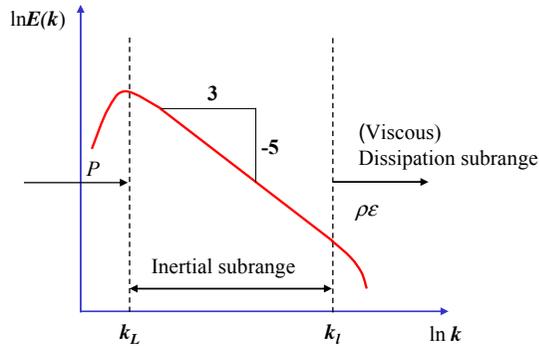
$$E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2)$$

dove $C_k = 1.6 \pm 0.06$ è la costante di Kolmogorov, confermata sperimentalmente, e $E(k)$ rappresenta lo spettro dell'energia specifica turbolenta, con:

$$\int_0^{\infty} E(k) dk = \underline{u}^2 / 2 \equiv E \quad (3)$$

- Tuttavia, l'andamento dello spettro dell'energia previsto dalla (2), vale solo nel cosiddetto campo inerziale (*inertial subrange*), cioè per valori di k compresi fra $1/L = k_L$ e $1/l_0 = k_l$.

Introduzione - cont.



Introduzione - cont.

Difficoltà associate alla simulazione numerica di flussi turbolenti

- I flussi turbolenti sono intrinsecamente tridimensionali, non stazionari e caotici, con un ampio range di scale spaziali e temporali; un approccio completamente statistico trascura l'esistenza delle *strutture coerenti*:
 - Eventi ripetibili e deterministici, responsabili della gran parte degli effetti delle turbolenza.
- È quindi particolarmente difficile mettere a punto una procedura di calcolo/modello, sufficientemente generale, in grado di:
 - Produrre previsioni accurate per tutte le situazioni di interesse pratico;
 - Di costo accettabile.
- Un modello di turbolenza ideale dovrebbe essere in grado di riprodurre (catturare) gli aspetti fisici di interesse con il minimo grado di complessità.

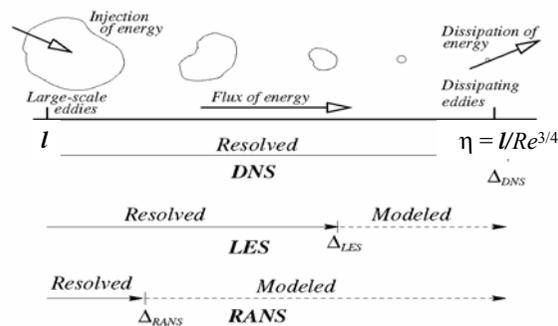
Introduzione - cont.

Classificazione dei metodi di analisi e previsione (Bardina et al.)

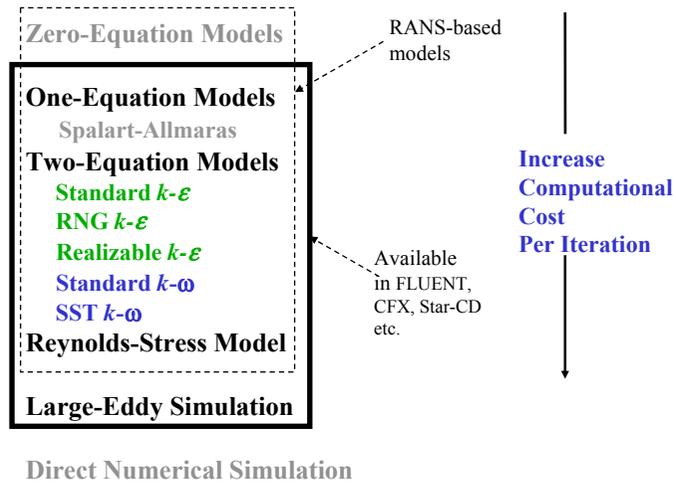
- 1 Correlazioni;
- 2 Equazioni integrali:
 - Derivate dalle equazioni del moto integrando lungo una o più coordinate - riduce il problema a una o più equazioni differenziali ordinarie.
- 3 Equazioni ottenute mediando le equazioni del moto nel tempo:
 - *Single Point Closure* - conduce a un set di equazioni alle derivate parziali detto RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*.
- 4 Two-point closures (non usati in CFD, se non per turbolenza isotropa);
- 5 Large Eddy Simulation (LES) - risolve le scale maggiori, ed il modello è limitato alle scale più piccole - intermedio fra RANS e DNS;
- 6 Simulazione Numerica Diretta (DNS) - nessun modello (*principi primi*).

Introduzione - cont.

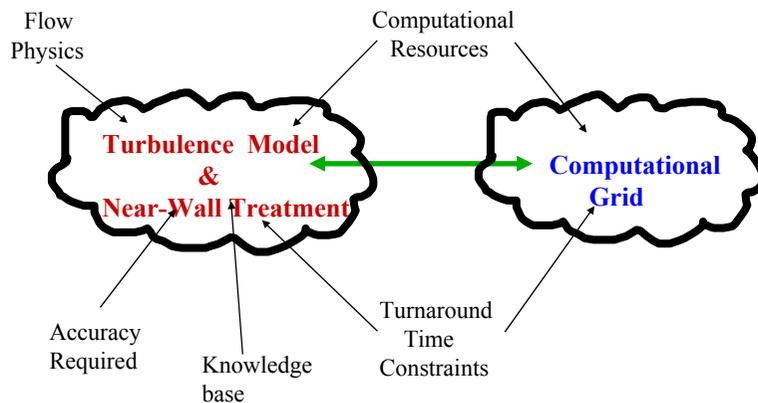
Metodi di previsione



Modelli di turbolenza usualmente presenti nei codici CFD industriali



Choices to be made



Simulazione Numerica Diretta (DNS) di moti turbolenti

- Vantaggi e limiti
- Cenni sui requisiti specifici dei metodi numerici per DNS
- Utilizzi tipici ed esempi applicativi

Simulazione Numerica Diretta (DNS) di moti turbolenti

- Nella DNS (*Direct Numerical Simulation*) le equazioni di Navier-Stokes (ed altre: energia etc.) vengono risolte numericamente nella loro formulazione *tridimensionale non-stazionaria*:
 - Le informazioni di interesse (coefficiente d'attrito, tensioni di Reynolds, numero di Nusselt etc.) vengono ottenute attraverso medie temporali (ed eventualmente spaziali), in analogia all'approccio sperimentale.
- **Vantaggi dell'approccio DNS:**
 - Assenza di modelli empirici e parametrizzazioni;
 - Qualità e quantità di informazioni (grandezze statistiche) altrimenti non disponibile;
 - Consente di studiare sistematicamente l'effetto di vari parametri (Re, Pr, Grashof etc.);
 - Offre la possibilità di studiare anche un flusso virtuale – metodologie di controllo della turbolenza.

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

- E limiti:
 - Estremamente costoso dal punto di vista computazionale - simulazione 3D non stazionaria (decine o più spesso centinaia/migliaia di ore di CPU);
 - Limitato a geometrie semplici e/o non troppo complesse;
 - Limitato a flussi debolmente turbolenti - bassi valori del numero di Reynolds;
 - Limitato - per problemi di scambio termico - a fluidi con numero di Prandtl non troppo elevato.
- Le limitazioni derivano, come visto in precedenza, dalla necessità di risolvere tutto il range della turbolenza, dalle macro-scale (dominio non troppo piccolo) sino alle più piccole scale dissipative:
 - Il range inerziale aumenta all'aumentare del numero di Reynolds.

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

- Complessità computazionale:
 - Numero di nodi/celle spaziali: $N_p \propto \text{Re}_\delta^{9/4}$
 - Numero di passi di tempo: $N_\tau \propto \text{Re}_\delta^{7/8}$
 - dove Re_δ è il numero di Reynolds basato sulla dimensione caratteristica δ .
- Per un tipico problema - canale piano parallelo con $\text{Re}_\delta \approx 6 \times 10^3$, dove δ rappresenta la semi-altezza del canale:
 - $N_p \approx 10^6$; $N_\tau \approx 10^5$
- Nella gran parte dei casi pratici, il numero di Reynolds è molto più elevato !

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

- In the 1980's, with the advancement of large-scale computers, DNS of turbulent flow and heat transfer became feasible;
- It is easy to show that the number of grid points in DNS grows with $Re^{9/4}$, while the number of time steps required is roughly proportional to $Re^{7/8}$;
- Additional scales may render these requirements even more serious:
 - Thermal turbulence microscales are hard to capture when the Prandtl number, Pr , is large (ratio of grid points N_T/N proportional to $Pr^{3/2}$, e.g. $N_T \approx 20 N$ for $Pr = 7$);
 - For low Pr , care must be taken so that the computational volume should be enlarged to capture larger scales of thermal turbulence.
- DNS traditionally limited to *transitional* or *weakly turbulent* flows.

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

- **Cenni sui requisiti specifici dei metodi numerici per DNS:**
 - Accuratezza - assenza di diffusività artificiale (no upwind, nemmeno di ordine elevatissimo), elevata risoluzione (numero di nodi/celle per semiperiodo);
 - Elevata efficienza computazionale - uso di tecniche di soluzione ad-hoc, espressamente mirate e che sfruttano la topologia della griglia;
- **Usualmente:**
 - Metodi spettrali - espansione in serie di Fourier/Chebyshev;
 - Elementi spettrali
 - FD e FV di ordine elevato e di caratteristiche particolari (schemi compatti);
 - **FD e FV del secondo ordine con adeguato numero di nodi/celle;**
 - Codici *mirati* al problema specifico (Fast Poisson solvers etc.);
 - Utilizzo di piattaforme di calcolo parallele.

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - *cont.*

- At DINMA-Trieste methods for incompressible flows:
 - Spectral methods for flows with two homogeneous directions;
 - Finite Volume (FV) schemes for Cartesian and boundary-fitted orthogonal grids;
 - Temporal integration by means of semi-implicit schemes (2nd order Adams-Bashfort, 3rd order RK);
 - Particular effort, in recent years, devoted to the development of *fast Poisson solvers*, and parallelisation of the codes;
 - High-order (*compact*) FV staggered methods.

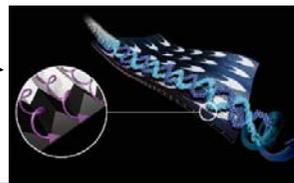
Simulazione Numerica Diretta (DNS) - *cont.*

- **Utilizzi tipici:**
 - Ricerche di base sulla dinamica della turbolenza, in presenza di uno o più effetti, quali rotazione, stratificazione, gradienti di pressione etc.
 - Simulazione della produzione di rumore di origine aerodinamica - CAA (*Computational Aeroacoustics*);
 - Elaborazione e stesura di *Data-Base* (valori medi; momenti di ordine elevato; *budgets*), per lo sviluppo di modelli di turbolenza;
 - Analisi di situazioni particolari, ma affrontabili con tecniche DNS, di difficile studio e/o analisi attraverso tecniche sperimentali o modelli RANS.
- **L'approccio DNS NON È uno strumento di indagine ingegneristica, e non lo sarà ancora per molto tempo;**
- **Le simulazioni 2D NON SONO DNS, così come non lo sono simulazioni non adeguatamente risolte;**

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

1) Scambio termico su riblets

- Riblets are small *v-grooves* (VVVVVVVV) aligned with the flow that are designed to reduce the skin friction:
 - Drag increase in laminar, steady flow;
 - Riblets have been shown to give skin friction reductions by as much as 8% for a wide range of applications.
- Several applications, particularly in sport events:
 - Full scale flight test on an Airbus A320; turbulent flow in pipes; sail;
 - Adhesive riblet film by 3M: *Scotchcal*® Marine Drag Reduction Tape 0.007 inches (0.18mm) thick - 1987 America's Cup *Stars and Stripes* - now banned;
 - SpeedWyre® by Spyder (skiers) - now banned;
 - SPEEDO® Fastskin™
 -



37

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

1) Simulazione Diretta di scambio termico su riblets

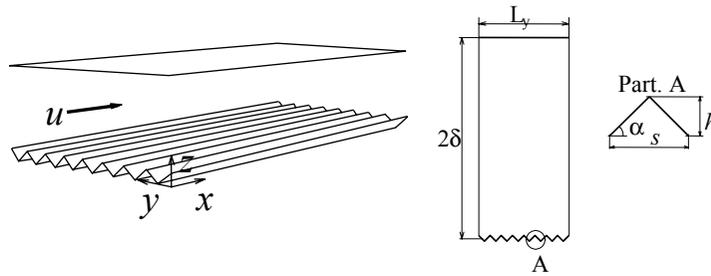
Riblets as heat transfer augmentation device

- Objective: surface geometry that decreases the skin friction coefficient, while augments the heat transfer rate:
 - A wall surface with riblets is a potential candidate;
 - Riblets might increase the Reynolds analogy factor $2S_f/C_f$.
- Effectiveness of riblets in heat transfer applications:
 - Experiments (Walsh and Weinstein, 1979; Lindemann, 1985; Maciejewski and Rivir, 1994; Choi and Orchard, 1997) did not clearly establish whether riblets produced a net variation in heat transfer in comparison to the flat plate;
 - Numerical analysis based on turbulence models (Launder and Li, 1993; Benhalilou and Kasagi, 1999);
 - Numerical analysis based on DNS, (Douglas and Karniadakis, 1993; Choi et al., 1993; Goldstein et al., 1995): successful reproduction of the drag reduction observed experimentally.

38

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

1) Simulazione Diretta di scambio termico su riblets



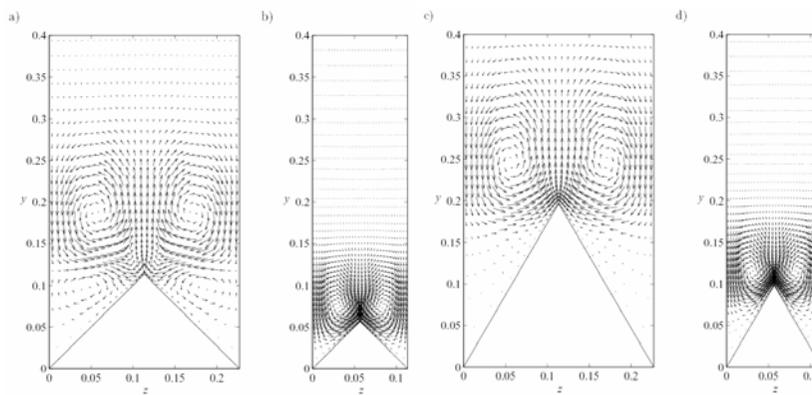
	$L_x/\delta, L_y/\delta, L_z/\delta$	$N_x \times N_y \times N_z$	α ($^\circ$)	s/δ	s^+	h/δ	h^+
case A	$1.5\pi, 2, 0.36125\pi$	$33 \times 129 \times 161$	45	0.227	40.9	0.113	20.4
case B	$1.5\pi, 2, 0.36125\pi$	$33 \times 129 \times 161$	60	0.227	40.9	0.197	35.4
case C	$1.5\pi, 2, 0.36125\pi$	$33 \times 129 \times 321$	45	0.113	20.4	0.056	10.2
case D	$1.5\pi, 2, 0.36125\pi$	$33 \times 129 \times 321$	60	0.113	20.4	0.098	17.7

• E. Stalio and E. Nobile, Direct Numerical Simulation of Heat Transfer over Riblets, *Int. J. Heat Fluid Flow*, in press (2003).

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

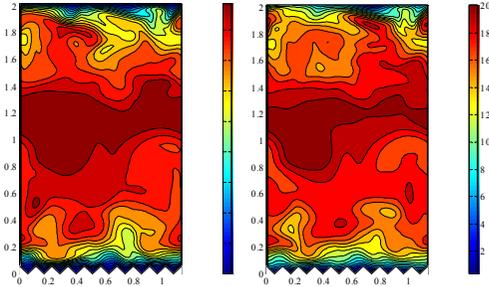
1) Simulazione Diretta di scambio termico su riblets

Moti secondari *medi* in prossimità delle riblets



Simulazione Numerica Diretta (DNS) - *cont.*

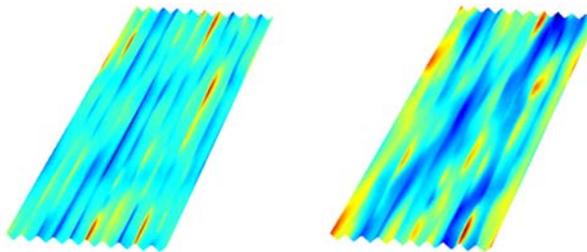
1) *Simulazione Diretta di scambio termico su riblets*



Andamento istantaneo del campo di moto (a sinistra) e del campo termico (a destra) in una sezione trasversale per il caso A.

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - *cont.*

1) *Simulazione Diretta di scambio termico su riblets*



Instantaneous drag (left) and temperature (right) fluctuations at the riblet surface. Red spots correspond to drag and heat transfer increase.

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

1) Simulazione Diretta di scambio termico su riblets

	D_r/D_f	St_r/St_f	η	Nu_r	Nu_f
Plane channel					
Present	1.000	1.000	1.000	-	8.233
Analytical (Bhatti et al.)	-	-	-	-	8.235
FEM, 6 refi nements	1.000	1.000	1.000	-	8.235
case A					
Present	1.0260	0.9554	0.9312	7.9628	8.3344
FEM, 8 refi nements	1.0252	0.9533	0.9298	7.9481	8.3379
case B					
Present	1.0662	0.8989	0.8431	7.6219	8.4793
FEM, 9 refi nements	1.0601	0.8931	0.8424	7.5771	8.4845
case C					
Present	1.0130	0.9765	0.9640	8.0895	8.2839
FEM, 8 refi nements	1.0132	0.9754	0.9627	8.0833	8.2867
case D					
Present	1.0328	0.9459	0.9159	7.9036	8.3554
FEM, 8 refi nements	1.0292	0.9428	0.9160	7.8807	8.3589

Risultati in regime laminare

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

1) Simulazione Diretta di scambio termico su riblets

Riblets più grandi:

- vortici longitudinali si avvicinano a parete (aumento di trasporto di q.d.m.)
- $Prandtl$ è probabilmente troppo basso per far emergere le riblets dallo strato limite termico: riduzione del Nusselt

Riblets più piccole:

- vortici longitudinali mantenuti lontani da parete (riduzione di trasporto di calore e q.d.m.)

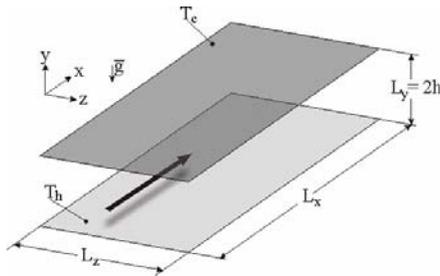
	D_r/D_f	St_r/St_f	η	Nu_r	Nu_f
Plane channel					
Present	1.00	1.00	1.00	-	40.5
Correlation (Bhatti et al.)	-	-	-	-	39.3
case A					
Present	1.05	0.89	0.84	35.1	39.6
Exp. [14]	1.03	-	-	-	-
DNS [20]	1.02	-	-	-	-
case B					
Present	1.13	0.78	0.69	30.5	38.9
Exp. [14]	1.11*	-	-	-	-
DNS [20]	1.12	-	-	-	-
case C					
Present	0.99	0.88	0.89	35.6	40.3
Exp. [14]	0.98	-	-	-	-
DNS [20]	0.95	-	-	-	-
case D					
Present	0.98	0.74	0.75	30.4	40.8
Exp. [14]	0.96*	-	-	-	-
DNS [20]	0.94	-	-	-	-

Risultati in regime turbolento

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

Esempi:

- 2) M. Piller, E. Nobile, T.J. Hanratty, DNS Study of Turbulent Transport at Low Prandtl Numbers in a Channel Flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 458, pp. 419-441, (2002).

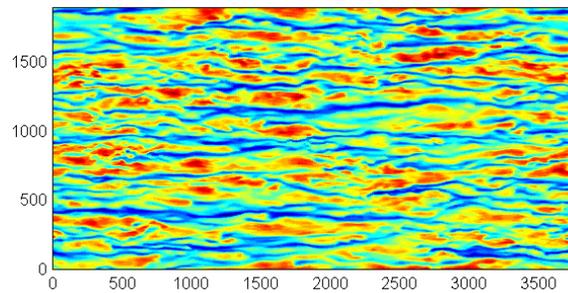


- $Re_\tau = 300$ ($Re_{2\delta} \approx 22000$), $Pr = 0.025 - 1$;
- Dominio: $4\pi\delta(x) \times 2\delta(z) \times 2\pi\delta(y)$
- Griglia: $256 \times 192 \times 256$
- Metodo: Spettrale (Fourier in x e y, Chebyshev lungo z)

Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

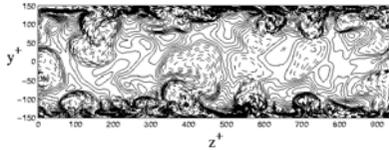
- 2) M. Piller, E. Nobile, T.J. Hanratty.

Andamento, sul piano x-y, della componente di velocità longitudinale in prossimità della parete, dove sono visibili zone ad alta e bassa velocità: *streaks*.



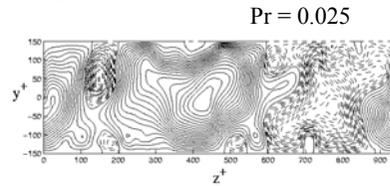
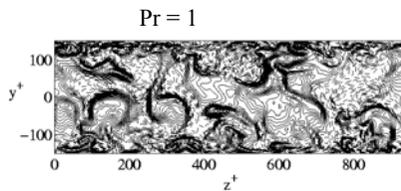
Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

2) M. Piller, E. Nobile, T.J. Hanratty.



Fluttuazioni della componente di velocità principale

Fluttuazioni di temperatura nello stesso istante



Simulazione Numerica Diretta (DNS) - cont.

DNS of turbulent forced convection in a pipe flow

Flow configuration and numerical setup

- Isocoric flow of Newtonian fluid with constant fluid properties. Negligible viscous energy dissipation.
- $Re_{\tau} = 360$, $Re_D = 5300$ (*Weakly turbulent regime*)
- $Pr = 0.71$
- Both $T_w = \text{const.}$ and $q_w = \text{const.}$ b.cs. How to impose them?
- Mean pressure gradient drives the flow. Consistent with physical b.cs?
- $L/D = 6.328$. Sufficient?
- $N_r \times N_{\phi} \times N_z = 101 \times 160 \times 324$

Numerical method

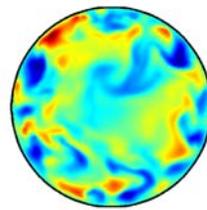
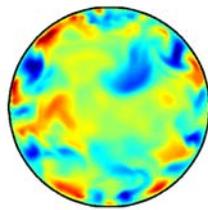
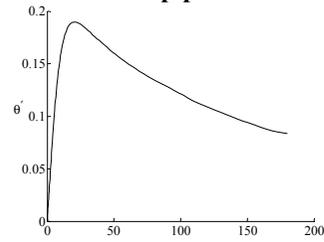
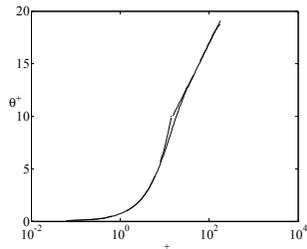
- Home-made second-order finite-volume method in cylindrical coordinates.
- Mixed second-/third-order Runge-Kutta fractional-step method.
- Approximate-factorization direction splitting.
- 2D FFT-based Poisson solver.
- Both scalar and OPEN MP parallel implementations available.
- $q_w = \text{const.}$ simulation: energy sink term added, in order to enforce periodicity on temperature.
- $T_w = \text{const.}$ simulation: *proportionality* conditions enforced using a *running* evaluation of the inlet bulk temperature.

Open issues

1. Influence of wall curvature.
2. Influence of temperature boundary conditions.
3. Buoyancy effects on both the hydraulic and thermal efficiency (work in progress).

Simulazione Numerica Diretta (DNS) – XXIV

DNS of turbulent forced convection in a pipe flow

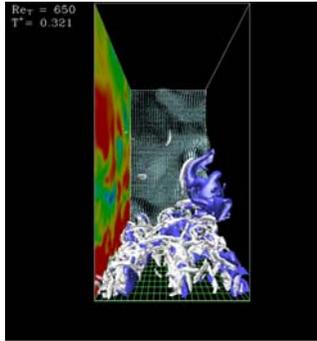


Simulazione Numerica Diretta (DNS) - XXV

Gli attuali punti caldi in DNS:

1. Simulazioni a numeri di Reynolds e Prandtl sempre più elevati (Reynolds and Peclet similarity)
 - Parallelismo MPI e brute force
 - Doppie griglie per Pr elevati
 - LES per campo termico a Pr elevati
 - Schemi sempre più accurati (FD-FV compatti, spettrali inerentemente divergence-free [Paolucci, 2003], adaptive wavelet methods [Paolucci 2003],)
2. Controllo passivo (riblets, wavy walls, ...) ed attivo (injection/suction, deformable walls, ...) della turbolenza
3. Stabilità dei flussi (es., Orr-Sommerfeld)
4.

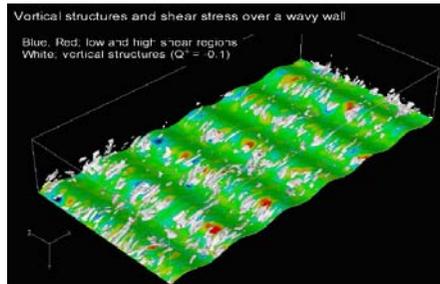
Simulazione Numerica Diretta (DNS) - XXVI



• Turbulent flow field in the plane channel at $Re_{\tau} = 650$. The white and blue iso-surfaces in the sequence represent the vortical structures (the second invariant of the deformation tensor $Q^+ = -0.05$) and the low-speed regions ($u^+ = -3$), respectively.

• Reference: Iwamoto, K., Suzuki, Y., and Kasagi, N., 2002. "Reynolds Number Effect on Wall Turbulence: Toward Effective Feedback Control," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 678-689.

• Copyright(C) 2002 K. IWAMOTO, N. KASAGI and Y. SUZUKI. All rights reserved.



DNS of turbulent flow over a wavy wall at $Re_{\tau} = 150$ was carried out by means of a pseudo-spectral method. The amplitude and wave length of the surface are $0.1h$ and $1.31h$ respectively, where h is the depth of the channel. a) The white represents vortical structures (the second invariant of deformation tensor $Q^+ = -0.1$), and the color contour indicate low and high shear regions (blue to red) on the surface. b) The color contour and vectors represent the pressure (blue to red, -20 to 20) and the velocity fluctuations on the x - y plane (parallel to the mean flow direction and normal to the surface). Copyright(C) 2003 Y. HASEGAWA and N. KASAGI. All rights reserved.

Large Eddy Simulation (LES)

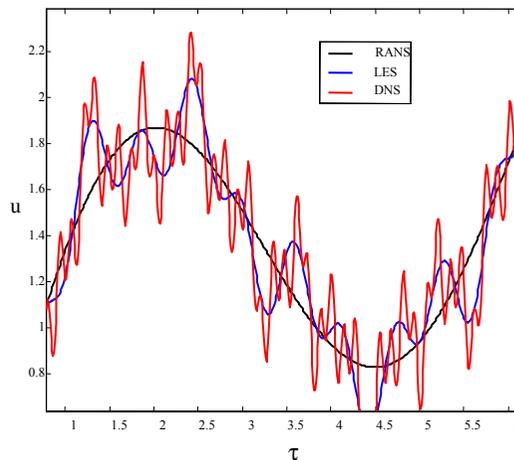
- Vantaggi e limiti
- Equazioni fondamentali
- Cenni sui modelli di sottogriglia (subgrid)
- Cenni sui requisiti specifici dei metodi numerici per LES
- Utilizzi tipici
- LES vs RANS e tendenze attuali

Large Eddy Simulation (LES)

- L'idea base dell'approccio LES si basa sulle seguenti osservazioni sperimentali:
 - Le *strutture turbolente di dimensione maggiore*, oltre ad avere caratteristiche *anisotropiche e dipendenti dal problema specifico* (es. geometria, condizioni al contorno), costituiscono il contributo energetico più rilevante (“energy-containing eddies”) e quindi sono responsabili della gran parte degli effetti: aumento del trasporto/miscelamento; aumento dei coefficienti di attrito e di scambio termico etc;
 - Viceversa, le *strutture più piccole* - dissipative - sono essenzialmente *isotropiche e universali*, non dipendono cioè dal problema specifico (geometria etc.).
- Pertanto, appare logico utilizzare un approccio numerico che *catturi direttamente*, attraverso una simulazione 3D non stazionaria, le scale spaziali e temporali di dimensione maggiore (*Large Eddies*), demandando ad un opportuno modello/parametrizzazione - SGS *SubGrid Scale model* - il compito di tenere conto degli effetti delle scale più piccole non risolte.

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

- L'approccio LES è quindi intermedio fra DNS e RANS:



Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

Vantaggi:

- Facilità - a differenza dell'approccio RANS - nella messa a punto di modelli SGS più universali e con numero minore di costanti empiriche, dato il carattere fondamentalmente isotropo e generale della turbolenza di piccola scala;
- Minore influenza del modello SGS, e quindi di eventuali errori di modellazione, poiché il suo contributo è limitato alle scale spaziali e temporali di contenuto energetico inferiore;
- Notevole qualità e quantità dei risultati disponibili, nei confronti dei metodi RANS, data la possibilità di prevedere numerosi fenomeni (separazioni non stazionarie; macrostrutture etc.) di interesse ingegneristico;
- Disponibilità di dati statistici di rilievo per analisi multi-fisiche e/o multi-disciplinari (es. generazione di rumore; carichi dinamici etc.);
- Possibilità, nei confronti di DNS, di affrontare problemi con valori del numero di Reynolds di interesse pratico.

Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

... e limiti:

- Molto più costoso, dal punto di vista computazionale, dei metodi RANS sebbene meno costoso, teoricamente, di DNS:
 - l'interesse nell'utilizzo di LES in problemi di tipo industriale, caratterizzati da geometrie complesse e valori più elevati del numero di Reynolds, lo rendono talvolta comparabile a DNS in termini di costo.
- Difficoltà nella definizione ed implementazione (vedi oltre) delle operazioni di filtraggio su griglie non strutturate arbitrarie;
- Difficile/costoso ottenere stime degli errori di discretizzazione e modellazione;
- Difficoltà, utilizzando schemi numerici standard (FD, FEM, FV) nel separare il contributo del modello SGS dagli effetti degli schemi numerici (diffusività artificiale);
- Difficoltà nella scelta dei parametri della simulazione (es. tempi di raccolta statistiche) e nell'interpretazione dei risultati.

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

Equazioni fondamentali

- Limitiamo la trattazione, semplificata a causa della complessità matematica, al caso di fluidi incompressibili, utilizzando la notazione monodimensionale (il caso 3D è semplicemente un'estensione):
 - Per separare le scale più piccole da quelle più grandi, introduciamo l'operazione di filtro:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, x') dx' = 1 \quad \forall x' \quad (4)$$

- Quindi la velocità $u(x, \tau)$ può essere scomposta nella componente filtrata (su larga scala) $\bar{u}(x, \tau)$ e nella componente sub-grid $\tilde{u}(x, \tau)$ (su piccola scala) secondo le definizioni:

$$\bar{u}(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) G(x, x') dx' \quad (5)$$

$$u(x, \tau) = \bar{u}(x, \tau) + \tilde{u}(x, \tau) \quad (6)$$

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

Equazioni fondamentali

- In LES si sono utilizzati numerosi tipi di filtri: filtro Gaussiano; filtro a scatola (box filter); e filtro ideale (cutoff);
- Ad ogni filtro è associata una lunghezza caratteristica Δ ; i vortici – strutture turbolente – più grandi di Δ vengono risolti, mentre quelli più piccoli vengono modellati;
- Filtrando in tal modo le equazioni di Navier-Stokes, otteniamo delle equazioni che *assomigliano* (media spaziale e non temporale) alle equazioni RANS:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (8)$$

Con: $\tau_{ij} \equiv \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

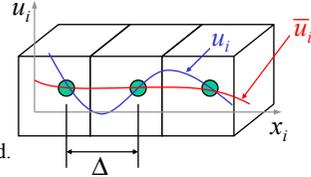
Filtering

- In finite-volume schemes, the cell size in a mesh can determine the filter width.

– e.g., in 1-D,

$$\frac{u_i(x+\Delta) - u_i(x-\Delta)}{2\Delta} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2\Delta} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} u_i(\xi) d\xi \right)$$

- more or less information is filtered as Δ is varied.



- In general,

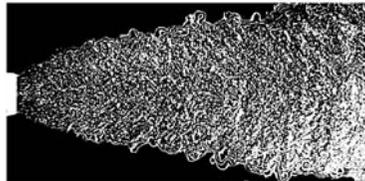
$$\bar{u}_i(\bar{x}, t) \equiv \frac{1}{V} \iiint_V u_i(\bar{\xi}, t; \bar{x}) d\bar{\xi}, \quad \bar{\xi} \in V \quad \text{where } V \text{ is the volume of cell}$$

– where the subgrid scale (SGS) velocity, $u'_i = u_i - \bar{u}_i$

Resolvable-scale filtered velocity \bar{u}_i

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

Filtering



Struttura della turbolenza in un getto conico (fiamma) visualizzata mediante interferometria. Da Schumann [1993].

media azimutale

media temporale



Large Eddy Simulation (LES) - cont.

Equazioni fondamentali

– È importante notare che:

$$\overline{u_i u_j} \neq \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (9)$$

e poiché la quantità a sinistra non è calcolata, è necessario introdurre una approssimazione - modello - che tenga conto di questa differenza:

$$\tau_{ij}^{SGS} = -\rho(\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) \quad (10)$$

– Il contributo modellato τ_{ij}^{SGS} è chiamato sforzo di Reynolds di sottogriglia (*subgrid scale Reynolds stress*).

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

Cenni sui modelli di sottogriglia (subgrid)

- Modello di Smagorinsky

– Si tratta di un modello basato sulla viscosità turbolenta (di sottogriglia), ed è basato sul concetto che gli sforzi di Reynolds di sottogriglia contribuiscono al trasporto e alla dissipazione;

– Pur essendo considerato in parte superato, data la sua semplicità e generalità, è quello più utilizzato in ambito industriale (codici commerciali):

$$\tau_{ij}^{SGS} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = 2\mu_t \overline{S_{ij}} \quad (11)$$

dove:

$$\mu_t = C_S^2 \rho \Delta^2 (\overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}})^{1/2} = C_S^2 \rho \Delta^2 |\overline{S}| \quad (12)$$

– Tipicamente $C_S \approx 0.2$, tuttavia non è una costante, ed è funzione del numero di Reynolds, del tipo di flusso e dalla distanza da parete; Δ è la dimensione del filtro.

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

Cenni sui modelli di sottogriglia (subgrid)

- Il modello di Smagorinsky può essere opportunamente manipolato, per tenere ad esempio conto della riduzione del valore di C_S in prossimità della parete (*van Driest damping*), o anche essere utilizzato con funzioni di parete (*wall function*);
- RNG-based subgrid-scale model

$$v_{eff} \equiv v + v_{\Delta} \equiv v \left[1 + H \left(\frac{v_s^2 v_{eff}}{v^3} - C \right) \right]^{1/3}, \quad v_S \equiv (C_{RNG} \Delta)^2 \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$$

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

Cenni sui modelli di sottogriglia (subgrid)

- Esistono numerose altre proposte di modelli di sottogriglia, i più noti sono i cosiddetti modelli *Multilevel - scale similarity* e *dynamic* : nella decomposizione del campo di moto si considerano più di due livelli (risolto e di sottogriglia) - Bardina et al., Germano, Piomelli, Germano et al.
- Sebbene questi modelli diano risultati decisamente migliori e più consistenti con l'evidenza sperimentale, la loro applicazione in codici CFD general-purpose è tutt'altro che agevole, ed attualmente oggetto di attività di ricerca.

Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

Possibile classificazione (da Pope, 2000)

Modello	Acronimo	Risoluzione
Direct Numerical Simulation	DNS	Tutte le fluttuazioni turbolente sono completamente risolte.
Large-Eddy Simulation with Near-Wall Resolution	LES-NWR	Il filtro e la griglia sono sufficientemente fini da risolvere l'80% del contenuto energetico dappertutto
Large-Eddy Simulation with Near-Wall Modelling	LES-NWM	Il filtro e la griglia sono sufficientemente fini da risolvere l'80% del contenuto energetico nelle zone lontane dalla parete, ma non in prossimità di queste ultime
Very-Large-Eddy Simulation	VLES	Il filtro e la griglia sono troppo grossolani per risolvere l'80% dell'energia turbolenta.

Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

- **Cenni sui requisiti specifici dei metodi numerici per LES:**
 - Accuratezza - assenza di diffusività artificiale (perplexità nell'uso di upwind, anche di ordine elevato), elevata risoluzione (in modo da massimizzare le scale risolte dalla griglia);
 - Elevata efficienza computazionale - spesso ottenuta dall'uso di metodi espliciti o semi-impliciti (es. trattamento esplicito dei termini convettivi, e discretizzazione implicita dei flussi diffusivi) ;
 - Necessità di definire - in modo coerente - le operazioni di filtro (su scale diverse per i modelli *multilevel* o *dinamici*).
- **Utilizzi tipici:**
 - Ricerche di base: analisi di problemi non alla portata dell'approccio DNS (es. numeri di Reynolds elevati);
 - Problemi di interesse pratico-applicativo la cui analisi con metodi RANS è difficoltosa e/o produce risultati affetti da errori eccessivi (es. aeroacustica).

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

- LES vs RANS

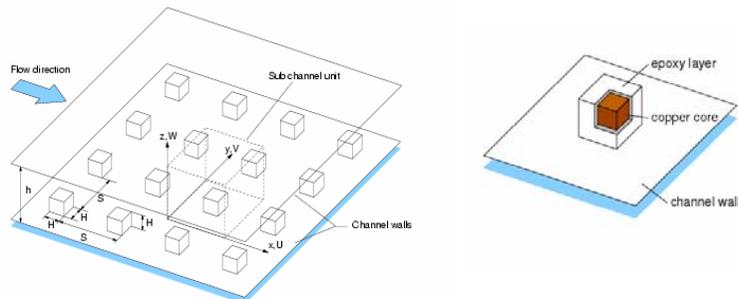
- L'attuale popolarità (forse eccessiva ?) goduta dall'approccio LES non deve far ritenere che esso sia la soluzione a tutti i problemi che si riscontrano nell'utilizzo dei modelli RANS;
- Infatti, oltre al costo decisamente maggiore, vi sono difficoltà nella definizione di modelli subgrid di uso universale, nell'utilizzo di funzioni di parete (per evitare un numero eccessivo di nodi), e nella scelta degli schemi numerici più idonei (interazioni complesse fra modello SGS e schema di discretizzazione);

- ... e tendenze attuali

- Alcuni prodotti di CFD industriale prevedono una *opzione LES*;
- Si riscontra, soprattutto nel mondo accademico, una certa perplessità nell'utilizzo di LES, attraverso codici non espressamente progettati per tale scopo, in ambito industriale;
- Tuttavia, in *alcune* applicazioni industriali, l'utilizzo di LES con codici FV non strutturati, ha fornito risultati sensibilmente più accurati dei migliori modelli RANS.

Large Eddy Simulation (LES) - cont.

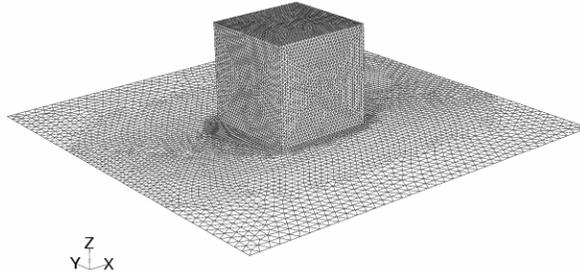
- Esempio (per gentile cortesia di B. Niceno, Delft, NL) – calcolo del flusso e dello scambio termico su una matrice di cubi.



Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

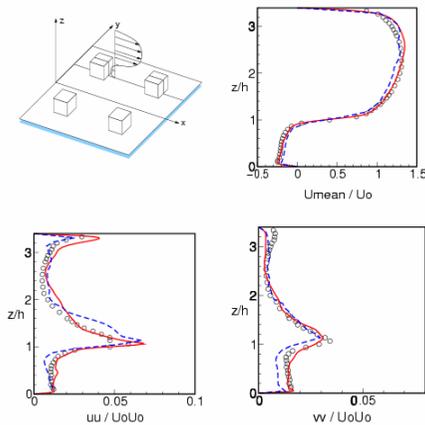
- Calcolo del flusso e dello scambio termico su una matrice di cubi.

Magliatura superficiale (surface grid)



Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

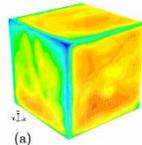
- Calcolo del flusso e dello scambio termico su una matrice di cubi.



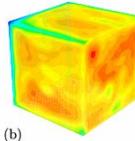
Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

- Calcolo del flusso e dello scambio termico su una matrice di cubi.

Andamento istantaneo della temperatura sulla superficie

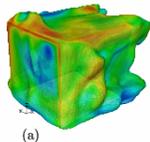


(a)

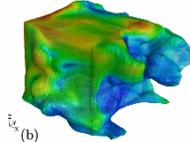


(b)

Andamento istantaneo di un'isoterma



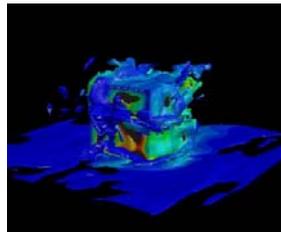
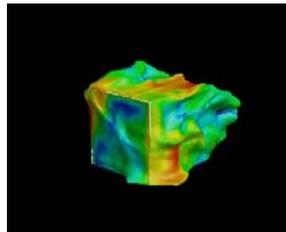
(a)



(b)

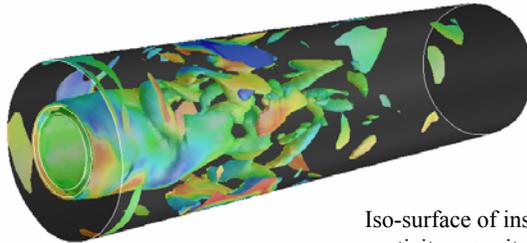
Large Eddy Simulation (LES) - *cont.*

- Calcolo del flusso e dello scambio termico su una matrice di cubi.



LES Example - Dump Combustor (gent. cortesia FLUENT)

- A 3-D model of a lean premixed combustor studied by Gould (1987) at Purdue University
- Non-reacting (cold) flow was simulated with a 170K cell hexahedral mesh using second-order temporal and spatial discretization schemes.

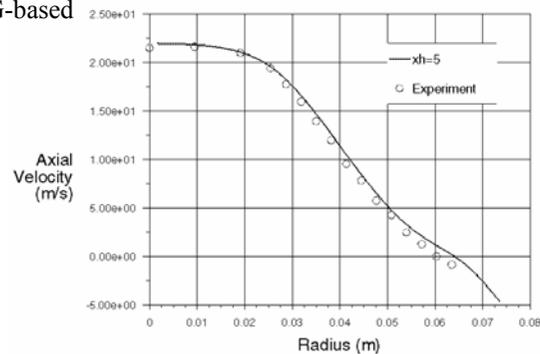


Iso-surface of instantaneous vorticity magnitude colored by velocity angle

LES Example - Dump Combustor (gent. cortesia FLUENT)

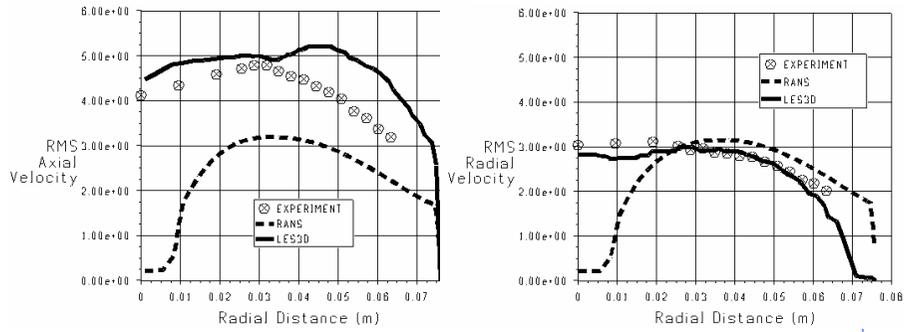
- Simulation done for:
 $Re_d = 10^5$ ($Re_\lambda \approx 150$)
- Computed using RNG-based subgrid-scale model

Mean axial velocity prediction
at $x/h = 5$;



LES Example - Dump Combustor (gent. cortesia FLUENT)

- RMS velocities predictions at $x/h = 10$;



75

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS)

- Vantaggi e limiti
- Equazioni fondamentali
- Modello $k-\epsilon$
- Funzioni di parete
- Cenni sui modelli low-Reynolds
- Cenni sui modelli Reynolds Stress (RSM)

76

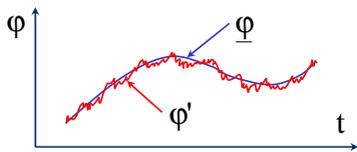
Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

- L'idea alla base dei modelli RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) è che, ai fini ingegneristici, l'interesse è quasi sempre relativo ai valori medi delle grandezze:
 - Coefficienti di attrito;
 - Coefficiente di scambio termico;
 - Andamento medio del campo di moto.
- Per tale ragione i metodi visti in precedenza, DNS e LES, sono ridondanti, oltretutto costosi, rispetto alle usuali necessità;
- È quindi opportuno utilizzare un metodo che, a costi accettabili, fornisca i risultati di immediato interesse pratico: si utilizza un modello basato sulle grandezze medie (nel tempo), dove per media si intende *media temporale*;
- L'operazione di media è eseguita su un intervallo infinito, per flussi stazionari, oppure su un intervallo (grande) ma finito per flussi non stazionari (*ensemble averaging*).

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Equazioni fondamentali

- Ogni quantità caratteristica del moto turbolento φ è scomposta in un termine mediato nel tempo $\underline{\varphi}$ e in un disturbo o fluttuazione φ' :



$$\varphi = \underline{\varphi} + \varphi' \quad (13)$$

$$\underline{\varphi} = \frac{1}{\vartheta} \int_t^{t+\vartheta} \varphi dt \quad (14)$$

Ed in particolare:

$$\underline{\varphi'} = 0 \quad \underline{\varphi + \varphi'} = \underline{\varphi} \quad \underline{\varphi \varphi'} = 0 \quad \underline{\varphi_i' \varphi_j'} \neq 0 \quad (15)$$

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Equazioni fondamentali

- Secondo l'ipotesi di Boussinesq gli sforzi turbolenti di Reynolds possono venire assimilati agli effetti di una viscosità aggiuntiva, variabile da punto a punto, detta *viscosità turbolenta* μ_t :

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

che, inserita nell'equazione della quantità di moto, fornisce:

$$\rho \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}} + \nabla \overline{p} - (\mu + \mu_t) \nabla^2 \overline{\mathbf{u}} + \rho \overline{\mathbf{F}_m} = 0 \quad (17)$$

- Nell'approccio più semplice, la turbolenza viene caratterizzata da due parametri: una *scala delle lunghezze*, L , e l'*energia cinetica turbolenta*, k (o una *velocità* $q=(2k)^{1/2}$), dove k :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (18)$$

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Equazioni fondamentali

- Sulla base dell'analisi dimensionale, si può dimostrare che:

$$\mu_t = C_\mu \rho q L \quad (19)$$

- Sempre sulla base dell'analisi dimensionale, e nell'ipotesi di produzione e dissipazione dell'energia cinetica turbolenta perfettamente bilanciate (*equilibrium turbulent flows*), si ha:

$$L \approx \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (20)$$

dove:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (21)$$

è la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta.

- Data la necessità di disporre di *due grandezze*, velocità e scala delle lunghezze, appare naturale adottare un modello a *due equazioni*.

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Modello k-ε

- Nel modello k-ε, ma anche nella gran parte degli altri modelli, la scala delle velocità è determinata da un'equazione per l'energia cinetica turbolenta:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \underline{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon \quad (22)$$

dove σ_k è il numero di Prandtl turbolento, e P_k rappresenta la produzione di energia cinetica turbolenta dovuta al flusso medio, ed altro non è che il trasferimento di energia dal flusso medio alla turbolenza:

$$P_k = -\rho \underline{u}_i \underline{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \approx \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (23)$$

dove si è fatto uso della viscosità turbolenta per valutare gli sforzi di Reynolds.

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Modello k-ε

- Come seconda equazione, nel modello k-ε, si adotta ε, che è correlata alla scala delle lunghezze sulla base della relazione (20).

L'equazione - di complessa derivazione - per ε è la:

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \underline{u}_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - \rho C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (24)$$

- La viscosità turbolenta è quindi ottenuta dalle (19) e (20), ed è espressa nella forma:

$$\mu_t = \rho C_\mu \sqrt{k} L = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (25)$$

- Il modello contiene cinque costanti, i cui valori più comuni sono:

$$C_\mu = 0.09; \quad C_{\epsilon 1} = 1.44; \quad C_{\epsilon 2} = 1.92; \quad \sigma_k = 1.0; \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (26)$$

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Funzioni di parete

- Per elevati valori del numero di Reynolds, lo spessore del sottostato viscoso (laminare) dello strato limite è molto piccolo, per cui risulta costoso descriverlo numericamente - numero elevato di nodi/celle, e quindi costo computazionale elevato;
- Una possibile soluzione è quella di sfruttare le funzioni di parete (wall function), che si basano sull'esistenza di una zona logaritmica nel profilo della velocità in prossimità della parete:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 0.52 \quad (27)$$

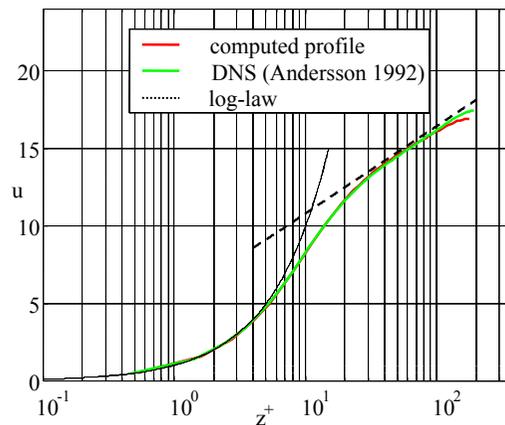
dove κ è la costante di Von Karman, ed y^+ è la distanza adimensionale dalla parete:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (28)$$

con $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, essendo τ_w lo sforzo d'attrito a parete.

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Funzioni di parete



Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Funzioni di parete

- Sulla base della legge logaritmica, è possibile correlare il valore della velocità sul primo nodo/cella in prossimità della parete, ed il valore di τ_w ;
- Tralasciando i dettagli dell'implementazione, è importante notare che la legge logaritmica vale circa per $y^+ > 20$, mentre per valori inferiori l'andamento è lineare;
- L'utilizzo delle funzioni di parete, pur conveniente, può produrre errori considerevoli in flussi con separazioni importanti, specialmente nelle zone di separazione e di riattacco.

Modelli low-Reynolds

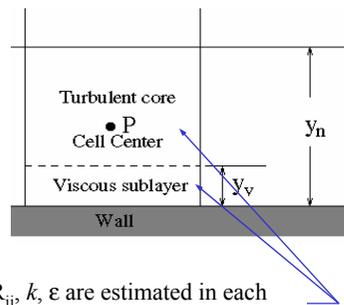
- Si tratta di modelli che, non facendo uso di funzioni di parete, impongono di risolvere numericamente lo strato limite, ed inoltre, avendo validità nelle zone turbolente e in quelle laminari, si prestano meglio per problemi caratterizzati da comportamento laminare in alcune zone del flusso;
- Esistono numerose varianti e modifiche dei modelli low-Reynolds.

Limitations of Standard Wall Functions

- Wall functions become less reliable when flow departs from the conditions assumed in their derivation:
 - Local equilibrium assumption fails
 - Severe ∇p
 - Transpiration through wall
 - strong body forces
 - highly 3D flow
 - rapidly changing fluid properties near wall
 - Low-Re flows are pervasive throughout model
 - Small gaps are present

Non-equilibrium Wall Functions

- Log-law is sensitized to pressure gradient for better prediction of adverse pressure gradient flows and separation.
- Relaxed local equilibrium assumptions for TKE in wall-neighboring cells.



$$\frac{\tilde{U} C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\tau_w / \rho} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2} y}{\mu} \right)$$

where $\tilde{U} = U - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[\frac{y_v}{\rho \kappa^* k^{1/2}} \ln \left(\frac{y}{y_v} \right) + \frac{y - y_v}{\rho \kappa^* k^{1/2}} + \frac{y_v^2}{\mu} \right]$

R_{ij} , k , ϵ are estimated in each region and used to determine average ϵ and production of k .

Enhanced Wall Treatment

• Enhanced Wall Treatment

– Enhanced wall functions

- Momentum boundary condition based on *blended* law-of-the-wall (Kader). $u^+ = e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{1/\kappa} u_{turb}^+$
- Similar blended ‘wall laws’ apply for energy, species, and ω .
- Kader’s form for blending allows for incorporation of additional physics.
 - Pressure gradient effects
 - Thermal (including compressibility) effects

– Two-layer model

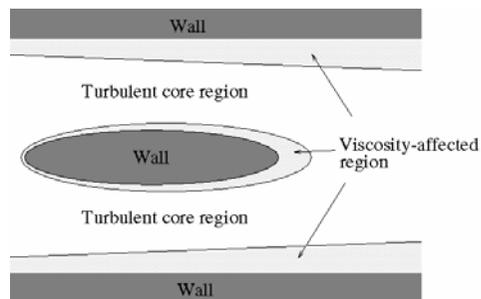
- A *blended* two-layer model is used to determine near-wall ϵ field.
 - Domain is divided into viscosity-affected (near-wall) region and turbulent core region.
 - Based on ‘wall-distance’ turbulent Reynolds number: $Re_y \equiv \rho \sqrt{k} y / \mu$
 - Zoning is dynamic and solution adaptive.
 - High Re turbulence model used in outer layer.
 - ‘Simple’ turbulence model used in inner layer.
- Solutions for ϵ and μ_t in each region are blended, e.g. $\lambda_\epsilon (\mu_t)_{outer} + (1 - \lambda_\epsilon) (\mu_t)_{inner}$
- The Enhanced Wall Treatment near-wall model are options for the k - ϵ and RSM turbulence models.

Two-Layer Zonal Concept

- Approach is to divide flow domain into two regions
 - Viscosity affected near-wall region
 - Fully turbulent core region
- Use different turbulence models for each region.
 - One-equation (k) near-wall model for the viscosity affected near-wall region.
 - High-Re k - ϵ or RSM models for turbulent core region.
- Wall functions, and their limitations, are avoided.

Two-Layer Zones

- The two regions are demarcated on a cell-by-cell basis:
 - $Re_y > 200$
 - turbulent core region
 - $Re_y < 200$
 - viscosity affected region
 - $Re_y = \rho k^{1/2} y / \mu$
 - y is shortest distance to nearest wall
 - zoning is dynamic and solution adaptive



Models Used in Two-Layer Zones

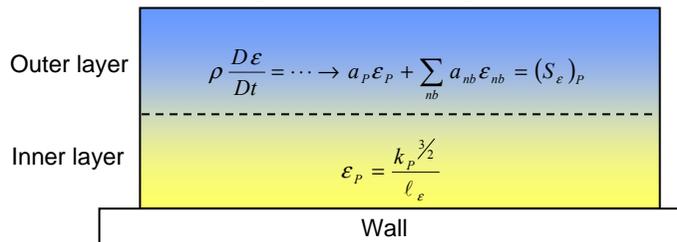
- In the turbulent region, the selected high-Re turbulence model is used.
- In the viscosity-affected region, a one-equation model is used.
 - k equation is same as high-Re model.
 - Length scale used in evaluation of μ_t is not from ϵ .
 - $\mu_t = \rho C_\mu k^{1/2} l_\mu$
 - $l_\mu = c_l \gamma (1 - \exp(-Re_\gamma / A_\mu))$
 - $c_l = \kappa C_\mu^{3/4}$
 - Dissipation rate, ϵ , is calculated algebraically and not from the transport equation.
 - $\epsilon = k^{3/2} / l_\epsilon$
 - $l_\epsilon = c_l \gamma (1 - \exp(-Re_\gamma / A_\epsilon))$
 - The two ϵ -fields can be quite different along the interface in highly non-equilibrium turbulence.

Blended ϵ Equations

- The transition (of ϵ -field) from one zone to another can be made smoother by blending the two sets of ϵ -equations (Jongen, 1998).

$$\lambda_\epsilon \times \left[a_p \epsilon_p + \sum_{nb} a_{nb} \epsilon_{nb} = (S_\epsilon)_p \right] + (1 - \lambda_\epsilon) \times \left[\epsilon_p = \frac{k_p^{3/2}}{\ell_\epsilon} \right]$$

$$\text{with } \lambda_\epsilon = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{Re_y - Re_y^*}{A} \right) \right]$$

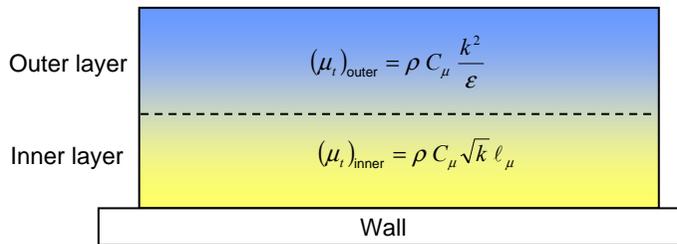


Blended Turbulent Viscosity

- Turbulent viscosity (μ_t) is also blended using the individual formulations

$$\lambda_\varepsilon (\mu_t)_{\text{outer}} + (1 - \lambda_\varepsilon) (\mu_t)_{\text{inner}}$$

$$(\mu_t)_{\text{outer}} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (\mu_t)_{\text{inner}} = \rho C_\mu \sqrt{k} \ell_\mu, \quad \ell_\mu = c_t y \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{A_\mu}\right) \right]$$



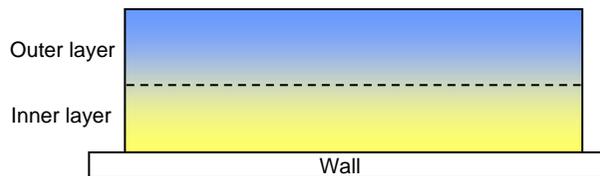
Zonal Blending Parameters

- The blending is controlled by two parameters.
 - Re_y^* (Re_y at zonal interface)

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{Re_y - Re_y^*}{A}\right) \right] \quad Re_y^* = 200 \quad (\text{by default})$$

- ΔRe_y^* Width of blending layer

$$A = \frac{\Delta Re_y^*}{\tanh 0.98} \quad \Delta Re_y^* = 40 \quad (\text{by default})$$

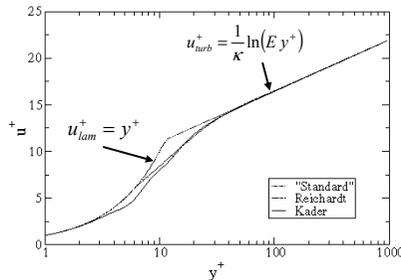


Blended Wall Laws

- Mean velocity $u^+ = e^\Gamma u_{lam}^+ + e^{1/\Gamma} u_{urb}^+$

$$\Gamma = -\frac{a(y^+)^4}{1+by^+}, \quad a = 0.01c,$$

$$b = \frac{5}{c}, \quad c = \exp\left(\frac{E''}{E} - 1\right)$$



where

$$u_{lam}^+ = y^+$$

$$u_{urb}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+)$$

- Blended 'wall laws' for temperature and species as well.

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Cenni sui modelli Reynolds Stress (RSM)

- I modelli basati sulla viscosità turbolenta presentano alcune lacune:
 - L'ipotesi di perfetta correlazione fra k ed ϵ non è, in generale, sempre vera;
 - In flussi 3D la relazione fra sforzi di Reynolds e tensore di deformazione non è affatto semplice, come farebbe ritenere la (16);
- Ciò significa che, a rigore, la viscosità turbolenta non è una quantità scalare (isotropia), ma piuttosto un tensore (anisotropia della turbolenza);
- I modelli più complessi sono quelli basati direttamente sugli sforzi di Reynolds - *RSM, Reynolds Stress Models* - ed ottenuti attraverso equazioni di trasporto, una per ciascuna componente del tensore degli sforzi di Reynolds;
- La complessità di tali modelli è rilevante: in 3D, oltre alle equazioni del moto, vi sono altre 7 equazioni di trasporto: $\underline{u'_i u'_j}$ ed ϵ .

Reynolds Averaged Navier-Stokes equations - cont.

Vantaggi e svantaggi dei modelli a due equazioni e RSM :

Modelli a due equazioni (viscosità turbolenta)	Modelli RSM
<ul style="list-style-type: none"> + Ben collaudati; ampia disponibilità di dati e confronti; + Semplicità, stabilità e basso costo computazionale; - Isotropia: problemi con curvature, swirl e galleggiamento. 	<ul style="list-style-type: none"> + Tiene conto dell'anisotropia, curvatura, swirl e galleggiamento; + Generalità; - Complesso, minore stabilità ed elevato costo computazionale; - Difficoltà nelle condizioni al contorno.

Model	Behavior and Usage
Spalart-Allmaras	Economical for large meshes. Performs poorly for 3D flows, free shear flows, flows with strong separation. Suitable for mildly complex (quasi-2D) external/internal flows and b.l. flows under pressure gradient (e.g. airfoils, wings, airplane fuselage, missiles, ship hulls).
Standard $k-\epsilon$	Robust. Widely used despite the known limitations of the model. Performs poorly for complex flows involving severe Vp, separation, strong stream line curvature. Suitable for initial iterations, initial screening of alternative designs, and parametric studies.
RNG $k-\epsilon$	Suitable for complex shear flows involving rapid strain, moderate swirl, vortices, and locally transitional flows (e.g., b.l. separation, massive separation and vortex-shedding behind bluff bodies, stall in wide-angle diffusers, room ventilation)
Realizable $k-\epsilon$	Offers largely the same benefits and has similar applications as RNG. Unable to use with multiple rotating reference frames. Possibly more accurate and easier to converge than RNG.
Standard $k-\omega$	Superior performance for wall-bounded b.l., free shear, and low Re flows. Suitable for complex boundary layer flows under adverse pressure gradient and separation (external aerodynamics and turbomachinery). Can be used for transitional flows (though tends to predict early transition). Separation is typically predicted to be excessive and early.
SST $k-\omega$	Similar benefits as SKO. Dependency on wall distance makes this less suitable for free shear flows.
RSM	Physically the most sound RANS model. Avoids isotropic eddy viscosity assumption. More CPU time and memory required. Tougher to converge due to close coupling of equations. Suitable for complex 3D flows with strong streamline curvature, strong swirl/rotation (e.g. curved duct, rotating flow passages, swirl combustors with very large inlet swirl, cyclones).

Nuovi approcci e prospettive future

- Modelli RANS:
 - Low-Re RSM with elliptic relaxation (Elliptic blending model, Manceau and Hanjalic, 2002.)
- Modelli/approcci LES:
 - MILES: Monotone Integrated Large-Eddy Simulation (Boris et al. 1992, Fureby and Grinstein 2002):
 - Assenza di filtro esplicito, e di modello subgrid;
 - Metodo numerico appropriato, che da origine a valori significativi degli sforzi di *natura numerica*;
 - Il metodo numerico svolge le funzioni di *filtro e modello* di sottogriglia;
 - Boris usa metodi numerici monotoni (upwind-biased).
 - Modello dinamico (Germano 1992) – Basato sull'ipotesi di similarità di scala (Bardina et al. 1980);
 - Variational Multiscale LES (Hughes et al. 2001).

Nuovi approcci e prospettive future

- Combinazione RANS + LES:
 - DES, Detached Eddy Simulation (Spalart et al., 1997, Nikitin et al. 2000);
 - Integrazione di Rans-unsteady + LES (Schlüter et al. 2002):
 - Condizioni al contorno ed all'interfaccia.
- SAS – Scale Adaptive Simulation:
 - Menter et al., 2003;
 - One equation turbulence model, which can be applied to the resolution of turbulent flow structures without the introduction of an explicit grid dependency;
 - Relies on the Von Karman length-scale as a scale determining variable:

$$L_{VK} = \left| \frac{\partial U_1 / \partial x_2}{\partial^2 U_1 / \partial x_2^2} \right|$$

- Different from DES, as it does not explicitly split up the flow in RANS and LES regions.

Considerazioni conclusive - I

- Tre grandi famiglie di modelli:
 - simulazioni dirette;
 - simulazioni “alla Reynolds” (basate su medie temporali);
 - LES (basate sul filtraggio spaziale).
- Simulazioni dirette DNS:
 - Preziose come strumento di indagine sui meccanismi fondamentali della turbolenza.
 - Si affiancano sempre più spesso alle ricerche sperimentali, rispetto alle quali offrono l’enorme vantaggio di un accesso completo all’intero campo di moto e di temperatura.
 - Praticamente inattuabili per valori del numero di Reynolds superiori a $\sim 10^4$ e quindi essenzialmente confinate a problemi transizionali e comunque a basso Re.

Considerazioni conclusive - II

- Simulazioni “alla Reynolds” basate su medie temporali:
 - Storicamente le prime ad essere realizzate.
 - Tuttora lo strumento più diffuso in applicazioni industriali.
 - Grandi attese sollevate dai modelli RSM in parte deluse.
 - Lunga vita per il modello $k-\epsilon$, in una o nell’altra delle sue molteplici varianti.
- Simulazioni LES:
 - Uscite ormai, dagli anni ‘80, dalla loro fase pionieristica.
 - Hanno dimostrato ampiamente di poter diventare validi strumenti predittivi anche per problemi complessi.
 - La tendenza attuale è verso l’inclusione di modelli sub-grid per la “Large Eddy Simulation” fra le opzioni standard dei più evoluti codici di calcolo termofluidodinamici.