10 + 10 + 10 = 30/30

CORSO DI FISICA GENERALE 1 per INGEGNERIA - UNIVERSITÀ DI TRIESTE, A.A. 2013/2014
II appello sessione estiva – 08.07.2014

Cognome COGNOME **Nome** NOME **CdS ..... Anno .....**

Istruzioni:
Per ciascuna domanda rispondere fornendo solo il risultato finale: ***la grandezza incognita espressa simbolicamente in funzione delle grandezze date, e poi il corrispondente risultato numerico, con il corretto numero di cifre significative e con le unità di misura appropriate.***

Fig. 1

Problema 1. Due corpi, etichettati 1 e 2, rispettivamente di massa m_1 = 2.0 kg e m_2 = 1.5 kg (si veda la figura 1), inizialmente in quiete, per effetto di forze repulsive interne (ad esempio un'esplosione) vengono lanciati in direzioni opposte e scivolano su un piano orizzontale; nel loro moto sono rallentati dall'attrito con la superficie orizzontale, con coefficienti rispettivamente μ_1 = 0.10 per il corpo 1 e μ_2 = 0.05 per il corpo 2. Conoscendo il modulo della velocità iniziale v_{1i} = 1.5 m/s del corpo 1, determinare:

a. il modulo della velocità iniziale $\vec{v}_{2i}$ del corpo 2;

3 $$v_{2i} = \frac{m_1}{m_2} v_{1i} = 2{,}0 \text{ m/s}$$

b. la variazione ΔK dell'energia cinetica totale del sistema, dall'istante iniziale ad un istante in cui in cui le due masse sono entrambe ferme, ed i lavori W_1 e W_2 compiuti dalle forze di attrito rispettivamente sui due corpi;

3 $$\Delta K = -\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = -5{,}2 \text{ J}$$

$$W_1 = -\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = -2{,}2 \text{ J} \qquad W_2 = -\frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = -3{,}0 \text{ J}$$

c. la posizione $x_C(t_f)$ del centro di massa del sistema nell'istante t_f in cui si ferma il corpo 1, mentre il corpo 2 è ancora in movimento. Per il calcolo si utilizzi come sistema di riferimento un asse x, con origine nella posizione iniziale dei due corpi, orientato come indicato in figura 1.

4 $$t_f = \frac{v_{1i}}{\mu_1 g}$$

$$x_c(t_f) = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 m_1 - \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_{1i}^2}{\mu_1^2 g} = 0{,}41 \text{ m}$$

Problema 2. Due corpi *A* e *B* rispettivamente di massa m_A = 1.6 kg ed m_B = 1.2 kg sono appesi alle due estremità di un filo, che passa su una puleggia P, assimilabile ad un disco omogeneo di massa m_P = 1.4 kg e raggio *R* = 15 cm, libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al disco e passante per il suo centro. Supponendo che il filo sia inestensibile e di massa trascurabile, che non scivoli sulla puleggia, e che la puleggia possa ruotare con attrito trascurabile, determinare:

a. il modulo *a* dell'accelerazione lineare dei due blocchi;

4 $$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + m_P/2} g = 1{,}1 \ m/s^2$$

b. la tensione T_A del tratto di fune tra il corpo A e la puleggia;

3 $$T_A = m_A(g - a) = 14 \ N$$

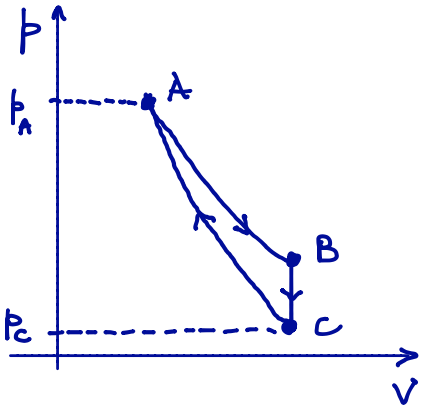
c. la tensione T_B del tratto di fune tra il corpo B e la puleggia.

3 $$T_B = m_B(g + a) = 13 \ N$$

Problema 3. Un gas ideale monoatomico compie un ciclo reversibile ABCA, in cui la trasformazione AB è un'espansione isoterma, la trasformazione BC è un raffreddamento isocoro (a volume costante), e la trasformazione CA è una compressione adiabatica. Sapendo che p_A = 32 p_C, dove p_A e p_C sono rispettivamente le pressioni dello stato A e dello stato C:

a. Disegnare il diagramma della trasformazione ciclica ABCA nel piano (V, p); determinare il rapporto V_C/V_A tra i volumi del gas V_C nello stato C e V_A nello stato A.

3 $$\frac{V_C}{V_A} = \left(\frac{p_A}{p_C}\right)^{1/\gamma} = 8{,}0 \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$$



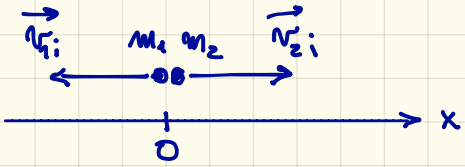
b. determinare il rapporto T_C/T_A tra la temperatura T_C nello stato *C* e T_A nello stato *A*.

3 $$\frac{T_C}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_C}{p_A}\right)^{1-1/\gamma} = 0{,}25$$

c. Determinare il rendimento η del ciclo.

4 $$\eta = 1 - \frac{3}{2}\frac{1 - \frac{T_C}{T_A}}{\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)} = 0{,}46$$

PROBLEMA 1 - soluzione



dati: $\begin{cases} m_1 = 2{,}0 \text{ kg} \\ m_2 = 1{,}5 \text{ kg} \\ v_{1i} = |\vec{v}_{1i}| = 1{,}5 \text{ m/s} \\ \mu_1 = 0{,}10 \quad , \mu_2 = 0{,}05 \end{cases}$

a) modulo della velocità iniziale $v_{2i} = |\vec{v}_{2i}| = ?$

forze impulsive solo interne al sistema
⇒ risultante delle forze esterne: nulla
⇒ conservazione della quantità di moto totale

$$0 = \vec{P} = m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} \rightarrow \vec{v}_{2i} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{1i}$$

$$\Rightarrow \quad v_{2i} = \frac{m_1}{m_2} v_{1i} = 2{,}0 \text{ m/s}$$

b) variazione ΔK dell'energia cinetica totale
(fino all'arresto di entrambi i corpi)

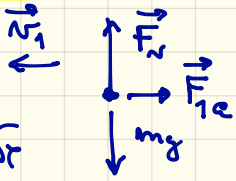
$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \begin{cases} \simeq -5{,}2 \text{ J} \\ -5{,}25 \text{ J} \end{cases}$$

per il teorema dell'energia cinetica, lavori delle f. di attrito:

corpo 1: $W_1 = \Delta K_1 = 0 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = -2{,}25 \text{ J} \simeq -2{,}2 \text{ J}$

corpo 2: $W_2 = \Delta K_2 = 0 - \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = -3{,}9 \text{ J}$

c) corpo 1: $\Sigma \vec{F}_1 = \vec{F}_{1a} = \mu_1 m_1 g \, \hat{\imath}$



accelerazione: $a_{1x} = \frac{\mu_1 m_1 g}{m_1} = \mu_1 g = \text{costante}$

velocità: $v_{1x}(t) = -v_{1i} + \mu_1 g \, t$

il corpo 1 si arresta all'istante t_f tale che $v_{1x}(t_f) = 0$

$$-v_{1i} + \mu_1 g\, t_f = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{v_{1i}}{\mu_1 g}$$

NB: non conviene c'è una via più rapida, vedi pagina successiva

posizione dei due corpi a quell'istante:

corpo 1: $x_1(t_f) = -v_{1i}\, t_f + \frac{1}{2} a_{1x} t_f^2 =$

$$= -\frac{v_{1i}^2}{\mu_1 g} + \frac{1}{2} \mu_1 g \frac{v_{1i}^2}{(\mu_1 g)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{v_{1i}^2}{\mu_1 g}$$

corpo 2: $x_2(t_f) = v_{2i}\, t_f + \frac{1}{2} a_{2x} t_f^2$

dove $\vec{a}_{2x} = \frac{\sum \vec{F}_2}{m_2} = \frac{-\mu_2 m_2 g\, \hat{i}}{m_2} = -\mu_2 g\, \hat{i} = \text{cost.}$ ($a_{2x} < 0$)

$$\Rightarrow x_2(t_f) = \frac{m_1}{m_2} v_{1i} \cdot \frac{v_{1i}}{\mu_1 g} + \frac{1}{2}(-\mu_2 g) \frac{v_{1i}^2}{\mu_1^2 g^2}$$

da cui, con qualche passaggio: posizione del C.M. all'istante t_f

$$x_c(t_f) = \frac{m_1 x_1(t_f) + m_2 x_2(t_f)}{m_1 + m_2} = \ldots \text{ (sostituendo e semplificando)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_1 m_1 - \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_{1i}^2}{\mu_1^2 g} = 0{,}41 \text{ m}$$

NB: allo stesso risultato si può arrivare più rapidamente, utilizzando il teorema del moto del C.M., vedi pagina seguente

Inizialmente (fase "esplosiva" iniziale) il C.M. è fermo:

$$\vec{P}_i = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1+m_2)\vec{v}_{ci} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{ci} = 0$$

Successivamente però la risultante delle forze esterne $\neq 0$ determina un moto del C.M. uniformemente accelerato:

$$\sum \vec{F}^{(est)} = \vec{F}_{1a} + \vec{F}_{2a} = \mu_1 m_1 g\,\hat{\imath} + (-\mu_2 m_2 g)\hat{\imath} =$$

$$= (m_1+m_2)\,\vec{a}_c = \text{cost.}$$

$\Rightarrow$ accelerazione del C.M. lungo l'asse x:

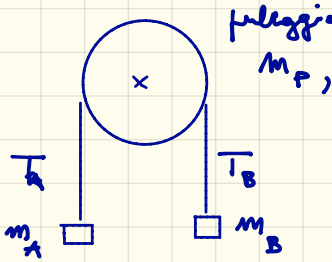
$$\vec{a}_c = \frac{\mu_1 m_1 - \mu_2 m_2}{m_1+m_2} g\,\hat{\imath} = a_{cx}\,\hat{\imath}$$

$\rightarrow$ posizione del C.M all'istante $t_f = \frac{v_{1i}}{\mu_1 g}$:

$$x_c(t_f) = \frac{1}{2} a_{cx} t_f^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 m_1 - \mu_2 m_2}{m_1+m_2} g \frac{v_{1i}^2}{\mu_1^2 g^2}$$

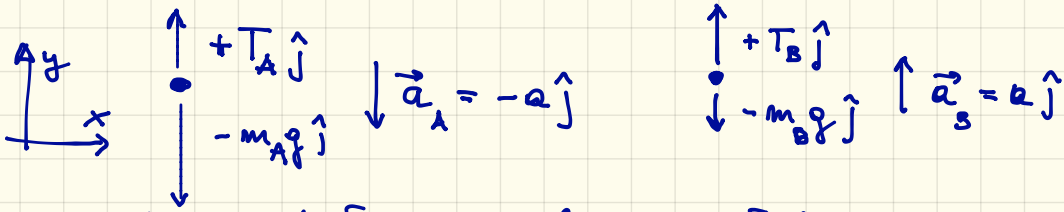
NB: la conoscenza della teoria aiuta a trovare scorciatoie + agevoli per risolvere ...

PROBLEMA 2 – Soluzione



dati:
$m_A = 1{,}6\ kg$
$m_B = 1{,}2\ kg$
$m_P = 1{,}4\ kg$
$R = 15\ cm = 0{,}15\ m$

a) accelerazione lineare in modulo: $a = |\vec{a}_A| = |\vec{a}_B|$
richiede le eq. del moto per i tre corpi A, B, P
+ vincoli cinematici (la fune non scivola sulla puleggia)

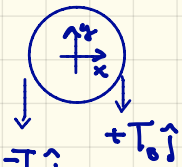


II legge di Newton, usando le componenti lungo y:

A: $-m_A g + T_A = m_A(-a)$ (1)

B: $-m_B g + T_B = m_B a$ (2)

Teorema del momento angolare per P, con asse z fisso di rotazione: $\Sigma \tau_z = I\alpha$



$(T_A - T_B)\cdot R = I\alpha_z$ (3)

(5) $I = \frac{1}{2} m_P R^2$ mom. d'inerzia

vincolo cinematico: accelerazione angolare

$\alpha_z = \frac{a}{R}$ (4)

Le tre incognite a, T_A, T_B si trovano risolvendo per sostituzione:

(4), (5) $\rightarrow$ (3): $\frac{m_P}{2} a = T_A - T_B$ (3')

(1) $T_A = m_A g - m_A a$, (2) $T_B = m_B g + m_B a$

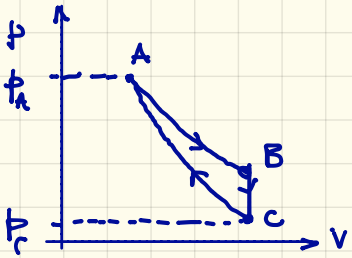
$\Rightarrow$ sostituendo nella (3'):

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + \frac{m_P}{2}} g = 1{,}12 \text{ m/s}^2 \simeq 1{,}1 \text{ m/s}^2$$

$T_A = m_A (g - a) = 13{,}9 \text{ N} \simeq 14 \text{ N}$

$T_B = m_B (g + a) = 13{,}1 \text{ N} \simeq 13 \text{ N}$

PROBLEMA 3 - soluzione



ciclo reversibile ABCA

AB : isoterma, espansione

BC : isocora, raffreddamento

CA : adiabatica, compressione

dato : $p_A = 32\, p_C$

a) rapporto $V_C / V_A = ?$

CA : trasf. adiabatica reversibile

$$\Rightarrow p_A V_A^\gamma = p_C V_C^\gamma \Rightarrow \frac{V_C}{V_A} = \left(\frac{p_A}{p_C}\right)^{1/\gamma} = 32^{3/5} = 8{,}0$$

dove $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$; $1/\gamma = 3/5 = 0{,}6$

gas monoatomico : $C_p = \frac{5}{2}R$, $C_v = \frac{3}{2}R$

b) rapporto T_C / T_A

per lo stesso motivo : $T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

(da : $p = \frac{nRT}{V}$, se $pV^\gamma = \text{cost.}$ allora $nRT\frac{V^\gamma}{V} = nRTV^{\gamma-1} = \text{cost}$)

$$\Rightarrow \frac{T_C}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_C}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_C}{p_A}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

$$= \left(1/32\right)^{2/5} = 0{,}25$$

c) rendimento $\eta = ?$ $\qquad T_A = T_B = \text{cost.}$

calore assorbito in AB, isoterma (gas ideale $\Delta U = 0$)

$$Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

$p = \frac{nRT_A}{V}$ $\qquad = \frac{V_C}{V_A}$

calore ceduto in BC, isocora

$$Q_{BC} = nC_V (T_C - T_B) = n\tfrac{3}{2}R (T_C - T_B) < 0$$

$C_V = \frac{3}{2}R$ $\qquad T_B = T_A$

adiabatica CA: $Q_{CA} = 0$

rendimento $\eta = \dfrac{W}{Q_{AB}} = 1 + \dfrac{Q_{BC}}{Q_{AB}} = 1 - \dfrac{|Q_{BC}|}{|Q_{AB}|}$

vedi nota alla pagina seguente

su un ciclo $\Delta U = 0$

$\Rightarrow W = Q = Q_{AB} + Q_{BC} = |Q_{AB}| - |Q_{BC}|$

$$\eta = 1 + \frac{\tfrac{3}{2}R(T_C - T_A)}{RT_A \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)} = 1 + \frac{T_A\left(\frac{T_C}{T_A} - 1\right)}{T_A \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)} \frac{3}{2}$$

$$= 1 - \frac{1 - T_C/T_A}{\ln\left(V_C/V_A\right)} \frac{3}{2} = 1 - \frac{0{,}75}{2{,}08} 1{,}5 = 0{,}46$$

Nota sul rendimento

Il ciclo considerato è reversibile, ma NON soddisfa il teorema di Carnot, che fornisce il rendimento per qualsiasi ciclo reversibile, indipendentemente dal fluido usato, purché (ipotesi essenziale!) la macchina scambi calore con 2 sole sorgenti, a temperature T_C e T_F rispettivamente.

Nel ciclo del problema 3 la trasformazione isocora BC, per essere reversibile, deve scambiare calore con molte (al limite infinite) sorgenti, a temperature intermedie tra quella massima iniziale T_B e quella minima finale T_C.

$\Rightarrow$ come si può verificare con calcolo esplicito, in questo caso il rendimento è diverso (inferiore!) e non soddisfa la relazione di Carnot...

$$\eta < 1 - \frac{T_C}{T_B} \quad !$$