

Fisica Generale

Prof. L.Lanceri

*Misure di grandezze fisiche
e incertezze di misura*

Lezione 1



Grandezze Fisiche e Sistemi di Unità di misura



Grandezze fisiche

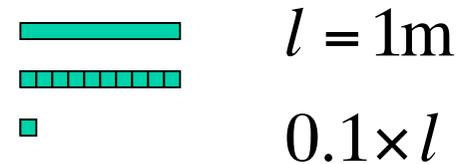
Definizione "operativa"!

Scelta di un **campione** e dei suoi (sotto) multipli

Procedura sperimentale di "**misura**"

Criterio operativo di confronto ($<$, $=$, $>$)

Criterio di somma (+)



Misure dirette:

confronto diretto con il campione e suoi multipli e sottomultipli

(Oppure: uso di *strumenti "tarati"* a lettura diretta (analogici o digitali))

Risultato: **numero razionale**, accompagnato da **unità di misura**

incertezza della misura, eventualmente implicita nel numero di *cifre significative*)



Grandezze fisiche

Misure indirette:

- Misure separate di grandezze da cui dipende la grandezza considerata
- Stima del valore da assegnare alla grandezza considerata e propagazione dell'incertezza!

Un esempio: misura di una lunghezza L , percorsa a velocità v costante

- misura del tempo impiegato t e della velocità v , uso della relazione:

$$L = vt$$

- Realizzazione pratica, ad esempio: autostrada con poco traffico, automobile dotata di opzione "cruise" (regolazione automatica della velocità v ad un valore fissato), cronometro per la misura di t .
- Le incertezze nelle misure di v e t determinano (come?) l'incertezza nella misura di L



Sistemi di unità di misura

- *Grandezze fondamentali e derivate*

- Scelta di un numero minimo di grandezze "fondamentali"
- Le altre grandezze: "derivate" da quelle fondamentali, cioè:
 - esprimibili in funzione di quelle fondamentali, per mezzo di
 - leggi note, ad esempio: $\vec{F} = m\vec{a}$

- definizioni , ad esempio: $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

- *Unità fondamentali e derivate*

- Stessa classificazione per le unità di misura

- *Sistema Internazionale*

- Diverse scelte delle grandezze fondamentali: diversi "sistemi di unità di misura"
- Useremo quasi esclusivamente il "Sistema Internazionale"
- Per altri sistemi usati in particolari applicazioni: vedi bibliografia (Fazio)



Sistema Internazionale (SI)

- *Grandezze e unità fondamentali*

TABELLA 1.1 Grandezze e unità fondamentali del sistema internazionale (SI)

Grandezza	Simbolo della grandezza	Unità di misura corrispondente	Simbolo della unità di misura
Lunghezza	l	metro	m
Massa	m	chilogrammo-massa	kg
Intervallo di tempo	t	secondo	s
Temperatura assoluta	T	grado Kelvin	K
Intensità luminosa	I	candela	cd
Intensità di corrente elettrica	i	ampère	A



Sistema Internazionale (SI)

- *Prefissi usati per sottomultipli e multipli*

TABELLA 1.2 Prefissi usati per ottenere i sottomultipli e i multipli di una unità di misura

Prefisso	Valore	Simbolo	Esempi
deci	10^{-1}	d	dm (decimetro); dg (decigrammo)
centi	10^{-2}	c	cm (centimetro); cP (centipoise)
milli	10^{-3}	m	mm (millimetro); mA (milliampère)
micro	10^{-6}	μ	μm (micrometro); μV (microvolt)
nano	10^{-9}	n	nm (nanometro); ns (nanosecondo)
pico	10^{-12}	p	pH (picohenry)
deca	10	D	Dm (decàmetro)
etto	10^2	h	hg (ettogrammo)
chilo	10^3	k	kg (chilogrammo); kW (chilowatt)
mega	10^6	M	MW (megawatt); MHz (megahertz)
giga	10^9	G	GW (gigawatt); Ghz (gigahertz)
tera	10^{12}	T	THz (terahertz)



SI - lunghezza

Unità: metro (m)

È la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo temporale di $1/(299\,792\,458)$ secondi

Metodi di misura

Misura diretta con regolo;
metodi indiretti, basati sulla geometria tridimensionale euclidea

Grandezza	Lunghezza (m)
	??
Limite dell'Universo	$\sim 10^{26}$
Distanza dalla galassia di Andromeda	$2,1 \cdot 10^{22}$
Raggio della nostra galassia	$6 \cdot 10^{19}$
Distanza dalla stella più vicina	$4 \cdot 10^{16}$
Anno luce	$9,5 \cdot 10^{15}$
Distanza Terra-Sole	$1,5 \cdot 10^{11}$
Distanza Terra-Luna	$3,8 \cdot 10^8$
Diametro orbite satelliti artificiali	$\sim 10^6$
Altezza di una torre	10^2
Altezza di un bambino	1
Dimensione di pulviscolo	10^{-4}
Dimensione di un virus	$\sim 10^{-7}$
Raggio atomico	$5 \cdot 10^{-11}$
Diametro del protone	$2 \cdot 10^{-15}$
Diametro di un elettrone	$< 10^{-18}$
	??



SI - massa

Unità: *kilogrammo (kg)*

È la massa del campione di platino-iridio, conservato nei laboratori del Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) a Sèvres (Parigi)

Metodi di misura

Confronto diretto con campione: bilancia a due bracci, utilizza l'attrazione gravitazionale della Terra (*massa gravitazionale*)

Metodi indiretti, basati sul Secondo Principio della Dinamica (*massa inerziale*)

(il rapporto esistente tra massa inerziale e massa gravitazionale sarà discusso in seguito)

Grandezza	Massa (kg)
	??
Universo osservabile	$\sim 10^{55}$
Una galassia	10^{41}
Sole	$2 \cdot 10^{30}$
Giove	$1,9 \cdot 10^{27}$
Terra	$6 \cdot 10^{24}$
Luna	$7,4 \cdot 10^{22}$
Transatlantico	$7 \cdot 10^7$
Elefante	$4,5 \cdot 10^3$
Automobile	$1,5 \cdot 10^3$
Uomo	$7 \cdot 10$
Matita	$2 \cdot 10^{-2}$
Goccia di pioggia	$2 \cdot 10^{-6}$
Granello di polvere	10^{-10}
Virus	$\sim 10^{-14}$
Molecola di penicillina	$5 \cdot 10^{-17}$
Atomo di idrogeno	$1,7 \cdot 10^{-27}$
Elettrone	$9,1 \cdot 10^{-31}$
	??



SI - tempo

Unità: Secondo (s)

Tempo richiesto per
9 192 631 770
oscillazioni della
radiazione non
perturbata,
emessa dall'atomo di
 ^{133}Cs nello stato
fondamentale $^2S_{1/2}$
nella transizione dal
livello iperfine
($F=4, M=0$) al livello
iperfine ($F=3, M=0$)

Metodi di misura

Basati su *orologi*
(fenomeni periodici)
e sul concetto di
simultaneità

Grandezza	Tempo (s)
Età dell'Universo	$\sim 5 \cdot 10^{17}$
Comparsa dell'uomo sulla Terra	10^{14}
Durata della vita umana	$2 \cdot 10^9$
Rivoluzione della Terra (un anno)	$3.2 \cdot 10^7$
Durata di un giorno	$8.6 \cdot 10^4$
Tempo impiegato dalla luce per il tragitto Sole-Terra	$5 \cdot 10^2$
Battito cardiaco normale	$8 \cdot 10^{-1}$
Periodo di un'onda sonora	$2 \cdot 10^{-3}$
Periodo di un'onda radio	$\sim 10^{-6}$
Periodo delle rotazioni molecolari	10^{-12}
Periodo di vibrazioni atomiche	10^{-15}
Periodo della radiazione X	$\sim 3 \cdot 10^{-19}$
Tempo di attraversamento di un protone da parte della luce	10^{-23}
Tempo di attraversamento di un elettrone da parte della luce	$< 10^{-26}$



Conversione di unità di misura

Le eguaglianze ed equazioni in fisica:

$$10 = 36 \quad \text{No !}$$

$$10 \text{ m/s} = 10 \times (10^{-3} \text{ km}) / ((3.6 \times 10^3)^{-1} \text{ h}) = 36 \text{ km/h}$$

Sì! (unità di misura!)

Fattori di conversione: facili da ricavare algebricamente

$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h}$$

"Dimensioni": esempio: superfici e lunghezze

Rettangolo: $S = 1 \times (\text{lato minore}) \times (\text{lato maggiore})$

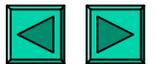
Triangolo: $S = 1/2 \times (\text{base}) \times (\text{altezza})$

Cerchio: $S = \pi \times (\text{raggio}) \times (\text{raggio})$

$$[S] = [L^2]$$



Analisi Dimensionale



Analisi dimensionale

- *Dimensioni di una grandezza fisica in un dato sistema di unità di misura (dipendono dalla scelta delle grandezze fondamentali!)*
 - Nel S.I., limitatamente alle grandezze meccaniche, la generica grandezza fisica "derivata" G sarà esprimibile attraverso potenze α, β, γ (dette "dimensioni" di G) delle grandezze fondamentali lunghezza L , massa M e tempo T ; in simboli:

$$[G] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma]$$

- Esempi: velocità v , accelerazione a , forza F :

$$[v] = [L^1 M^0 T^{-1}] = [L^1 T^{-1}]$$

$$[a] = [L^1 M^0 T^{-2}] = [L^1 T^{-2}]$$

$$[F] = [L^1 M^1 T^{-2}]$$



Criterio di omogeneità dimensionale

- *Nelle equazioni della fisica:*

- i due membri rappresentano grandezze fisiche che devono avere le stesse dimensioni
- L'omogeneità dimensionale è condizione necessaria, non sufficiente per la validità delle equazioni

$$G_1 = G_2 \Rightarrow [G_1] = [L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1}] = [G_2] = [L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2}]$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$$



Omogeneità dimensionale: esempi

Tra le due equazioni seguenti per la legge oraria di un moto uniformemente accelerato (accelerazione a), una è sicuramente sbagliata: quale?

$$s = \frac{1}{2} at$$

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

Risposta: la prima è sicuramente sbagliata, la seconda (corretta) potrebbe differire da quella corretta al più per una costante adimensionale. Infatti, confrontando le dimensioni dei due membri:

$$[s] = [L] = [L^1 M^0 T^0] \neq \left[\frac{1}{2} at \right] = [L^1 T^{-2} T^1] = [L^1 M^0 T^{-1}] \quad \text{Dimensioni diverse!}$$

$$[s] = [L] = [L^1 M^0 T^0] = \left[\frac{1}{2} at^2 \right] = [L^1 T^{-2} T^{-2}] = [L^1 M^0 T^0] \quad \text{Dimensioni uguali}$$

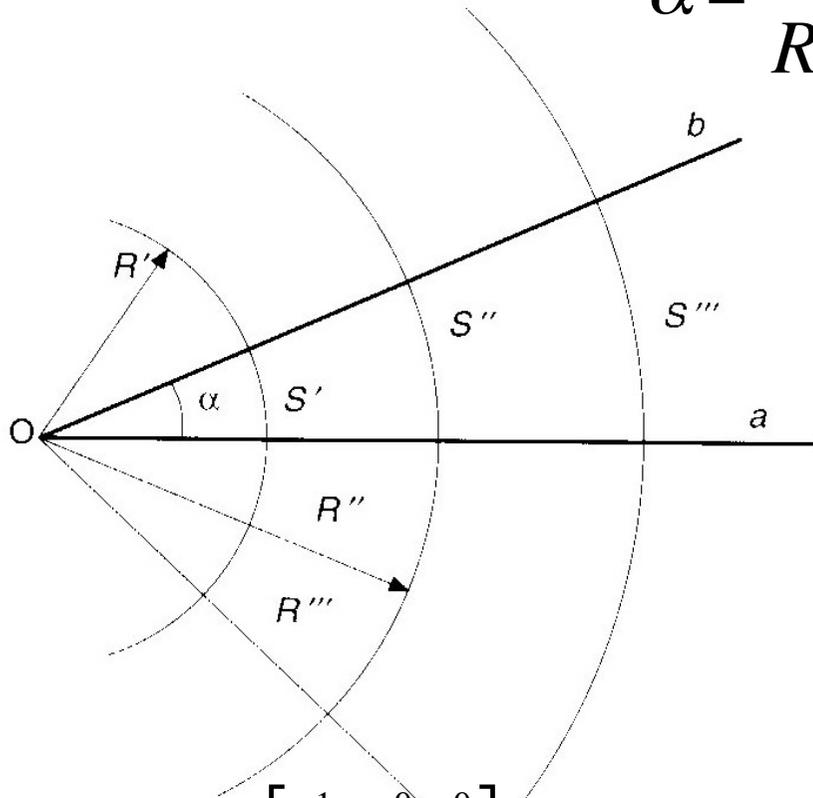


Grandezze a-dimensionali

• Angolo

- Unità: radiante

$$\alpha = \frac{S}{R}$$

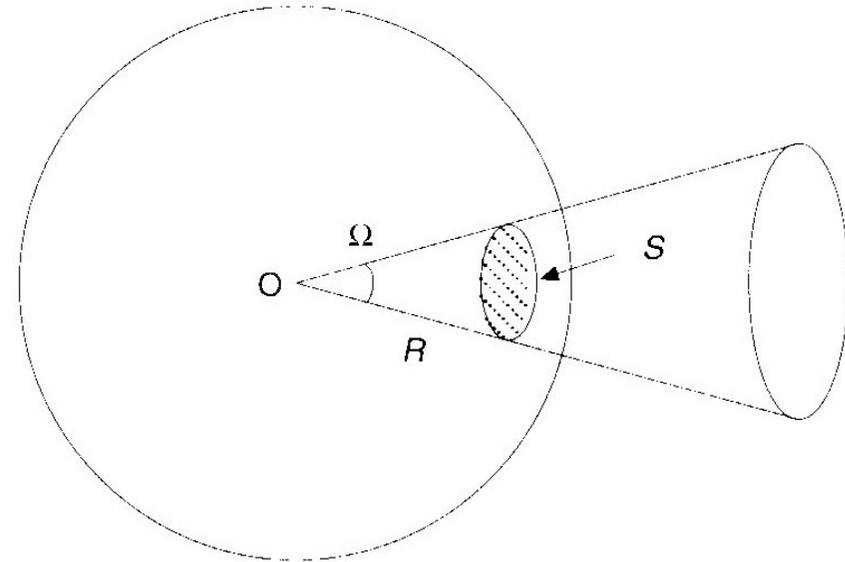


$$[\alpha] = \frac{[S]}{[R]} = \frac{[L^1 M^0 T^0]}{[L^1 M^0 T^0]} = [L^0 M^0 T^0]$$

angolo solido

Unità: steradiane

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$



$$[\Omega] = \frac{[S]}{[R^2]} = \frac{[L^2 M^0 T^0]}{[L^2 M^0 T^0]} = [L^0 M^0 T^0]$$



Grandezze a-dimensionali

Argomenti delle funzioni trascendenti

- Funzioni trigonometriche, esponenziale, logaritmo,...: sono approssimabili con polinomi (somme di termini con potenze crescenti): per il criterio di omogeneità dimensionale, l'argomento dev'essere a-dimensionale!!!

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Esempio: legge oraria di un moto oscillatorio:

$$x(t) = \cos t \quad \text{NO !!!}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad \text{OK, se :}$$

$$[A] = [x] = [L], \quad [\omega] = [T^{-1}] \Rightarrow [\omega t] = [T^{-1}T^1] = [L^0 M^0 T^0]$$



Incertezze o "errori" di misura



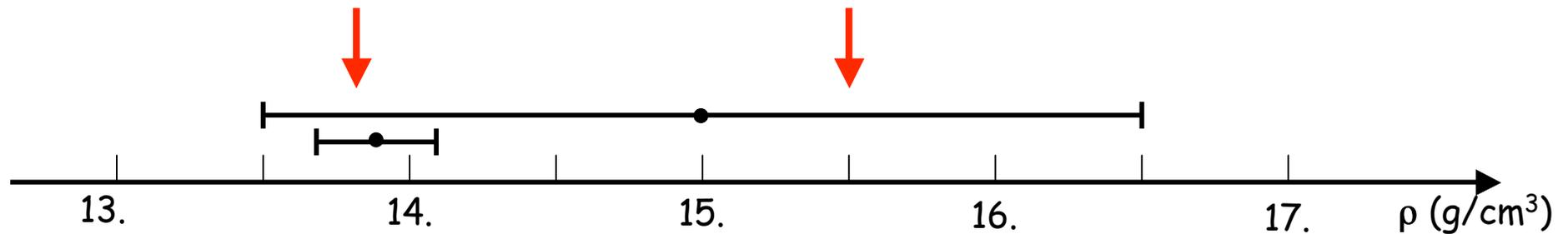
Perche' stimare le incertezze ?

• Esempio 1: una misura di g

- Dalle oscillazioni di un pendolo: $g = 9.70 \text{ m/s}^2$ (valore accettato: 9.81)
 - E' una buona misura, anche se non molto precisa ? $\delta g = \pm 0.15 \text{ m/s}^2$
 - E' una scoperta storica (quinta forza? anti-gravita' ?) ? $\delta g = \pm 0.01 \text{ m/s}^2$

• Esempio 2: una misura di densita'

- Lega non preziosa: $\rho = 13.8 \text{ g/cm}^3$
- Oro: $\rho = 15.5 \text{ g/cm}^3$



- I esperto: misura 15 g/cm^3 , intervallo di confidenza da 13.5 a 16.5 g/cm^3
- II esperto: misura 13.9 g/cm^3 , intervallo di confidenza da 13.7 a 14.1 g/cm^3
 - Le due misure sono compatibili l'una con l'altra ?
 - L'oggetto considerato e' prezioso o di valore trascurabile ? (cioe' : la densita' e' compatibile o no con quella nota dell'oro?)

Errori "accidentali" e "sistematici"

Errori "accidentali" o "statistici" ("*precisione*" della misura)

- Dovuti al concorso di un insieme di piccole perturbazioni non prevedibili e non controllabili, in parte positive e in parte negative
- possono essere analizzati con metodi statistici generali a partire dai risultati di misure ripetute

Errori "sistematici" ("*accuratezza*" della misura)

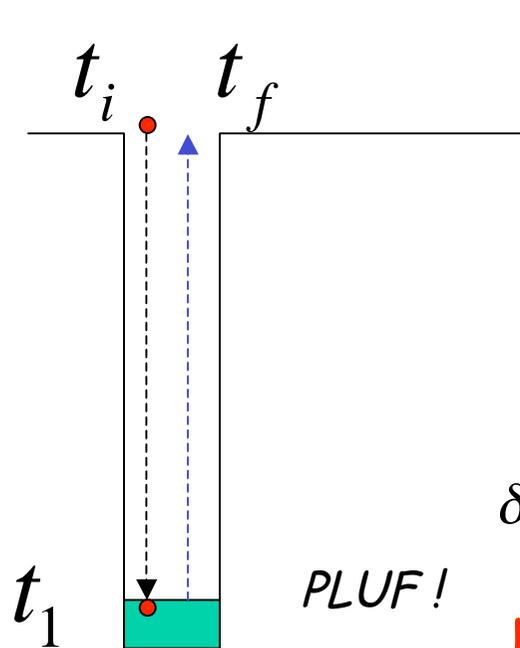
- Si ripresentano in misure ripetute con il medesimo valore e segno: perturbano il risultato sempre nello stesso verso (sempre in eccesso o sempre in difetto)
- non esistono regole generali: vanno individuati e ove possibile corretti caso per caso, attraverso una attenta analisi delle condizioni ambientali, del metodo di misura e delle caratteristiche della strumentazione



Errore sistematico: un esempio

- *Misura indiretta della profondità h di un pozzo*

- Profondità h dalla misura del tempo t impiegato da un sasso ad arrivare in fondo al pozzo
- Tempo t (e quindi h) sovrastimato sistematicamente se:
 - "start" = istante t_i in cui il sasso viene lasciato cadere
 - "stop" = istante t_f in cui arriva in superficie il suono (PLUF !)



$$t_i = 0.0 \text{ s}; \quad t_f = 2.5 \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} g (t_f - t_i)^2 \approx 31 \text{ m}$$

Il tempo impiegato dal suono per percorrere 31m

Dal fondo ($t=t_1$) alla superficie ($t=t_f$) è all'incirca:

$$\delta t = t_f - t_1 \cong \frac{31 \text{ m}}{330 \text{ m/s}} = 0.1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t}{t_f - t_i} = \frac{0.1}{2.5} = 0.04 = 4\%$$

Di quanto si sovrastima h se t è sovrastimato del 4% ?

Un bravo sperimentatore...

- Adotta strumenti e procedure che forniscano la **precisione** richiesta (cioè l'**errore statistico** richiesto)
- Si assicura che, fatte le opportune correzioni per gli effetti sistematici noti, il residuo errore sistematico sia inferiore a quello statistico: solo allora la misura potrà dirsi sufficientemente **accurata**
- *Discuteremo in seguito metodi per stimare le incertezze di misura; per ora ci limitiamo a qualche regola sulla rappresentazione implicita delle incertezze, per mezzo delle "cifre significative", di cui avremo bisogno subito*



Come rappresentare le incertezze?

- *La Migliore Stima* (x_m) \pm *Incertezza* (δx)

$$X = x_m \pm \delta x$$

- *L'intervallo* ($x_m - \delta x, x_m + \delta x$) *esprime*:
 - la confidenza dello sperimentatore nel fatto che il valore "vero" della grandezza misurata sia compreso nell'intervallo (o piuttosto: le aspettative sui risultati di future misure di precisione comparabile)
 - In misure semplici: la stima prudentiale ("errore massimo") corrisponde in pratica alla "certezza" che la grandezza misurata sia compresa nell'intervallo dichiarato
 - In misure più raffinate (p.es. ripetute): all'intervallo viene associato un contenuto di "probabilità", che discuteremo in seguito



Cifre significative

- *Regola per le incertezze*

- Le incertezze di misura dovrebbero (quasi) sempre essere arrotondate ad una cifra significativa
- (Possibile eccezione se l'incertezza ha come prima cifra significativa 1 o 2)

$$g = 9.82 \pm 0.02385 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad g = 9.82 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$$

(oppure: $g = 9.820 \pm 0.024 \text{ m/s}^2$)

- *Regola per la miglior stima (valore centrale)*

- L'ultima cifra significativa nella migliore stima di un risultato sperimentale dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza (cioè nella stessa posizione decimale) dell'incertezza corrispondente

$$v = 6051.78 \pm 31 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad v = 6050 \pm 30 \text{ m/s}$$

(oppure: $v = 6052 \pm 31 \text{ m/s}$)



Cifre significative - regole di calcolo

- *Somme e sottrazioni*

- Nel risultato compaiono solo le cifre nelle posizioni decimali in cui entrambi gli operandi hanno cifre; ad esempio:

$$5.2 + 3.1 = 8.3 \quad 6.843 + 1.2 = 8.0 \quad 6.843 + 0.001 = 6.844$$

$$5 \times 10^2 - 4 = 5 \times 10^2 \quad 5.00 \times 10^2 - 4 = 4.96 \times 10^2$$

- *Prodotti e quozienti*

- Il risultato ha lo stesso numero di cifre significative dell'operando che ne ha di meno; ad esempio:

$$5.2 \times 3.1 = 16. \quad 5.243 \times 3.1 = 16. \quad 5.243 \times 0.0031 = 0.016$$

$$\frac{37}{9} = 4 \quad \frac{37}{9.1} = 4.1$$

- *Conviene usare la notazione scientifica, non ambigua*

$$500 \quad ?(1 \text{ o } 3 \text{ cifre signif.}) \quad 5 \times 10^2 \text{ (1 cifra signif.)} \quad 5.00 \times 10^2 \text{ (3 cifre signif.)}$$



Errori assoluti e relativi

- **Errore (incertezza) assoluto**

- Def. $\varepsilon_a = |\delta x|$

- Esempio $\delta x = 2 \text{ mm} \Rightarrow \varepsilon_a = 2 \text{ mm}$

- **Errore relativo** (adimensionale!)

- Def. $\varepsilon_r = |\delta x|/|x_m|$

- Esempio $x_m = 1.327 \text{ m} \Rightarrow \varepsilon_r = 1.5 \times 10^{-3}$

- **Errore percentuale** (adimensionale!)

- Def. $\varepsilon_{\%} = 100 \times |\delta x|/|x_m| \quad (\%)$

- esempio $\Rightarrow \varepsilon_{\%} = 0.15 \%$

NB: spesso l'errore relativo è quello che conta

