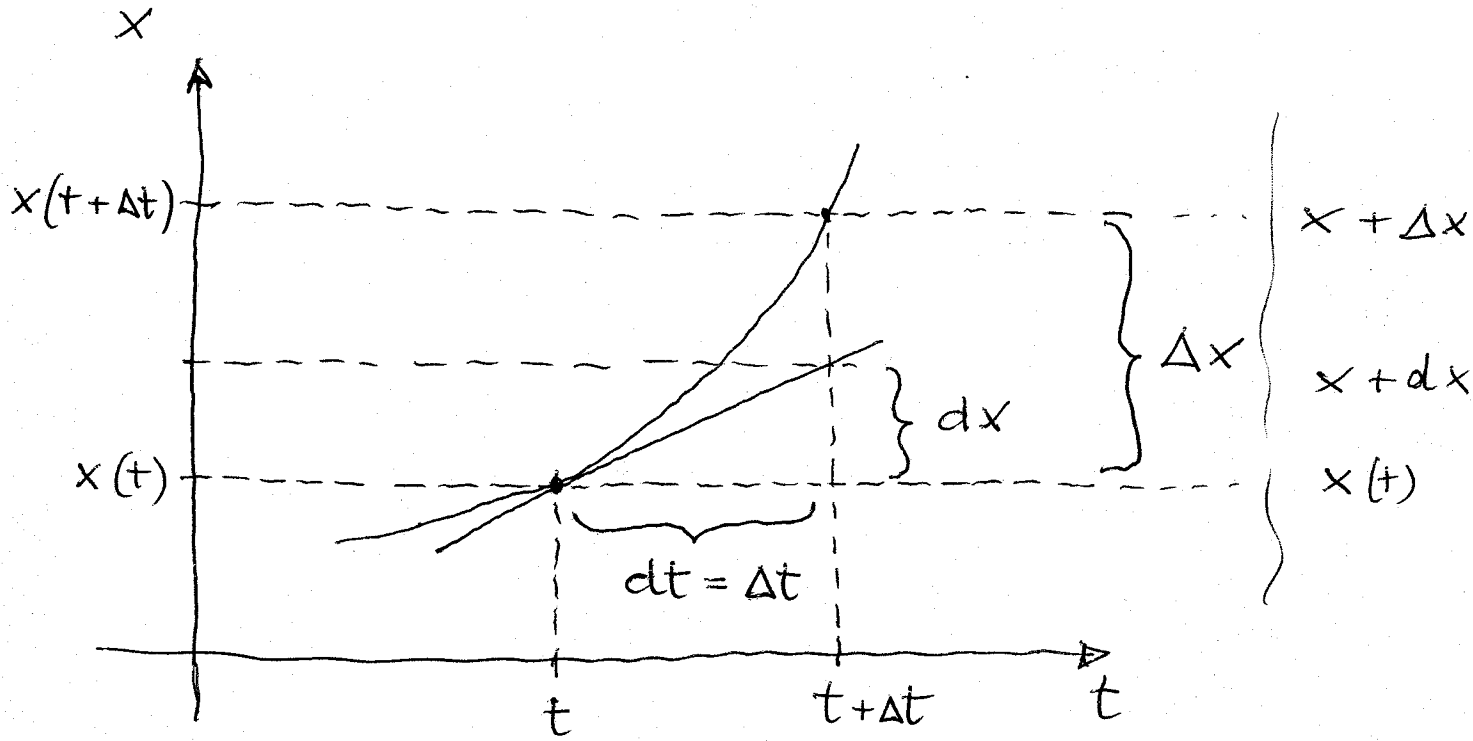
DERIVATA e DIFFERENZIALE



$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$$ "variazione della funzione" $x(t)$

$$dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt = x'(t)\, dt$$ "differenziale della funzione" $x(t)$

notazioni equivalenti
per indicare la "derivata della funzione" $x(t)$
calcolata in t.

$$dt = \Delta t$$

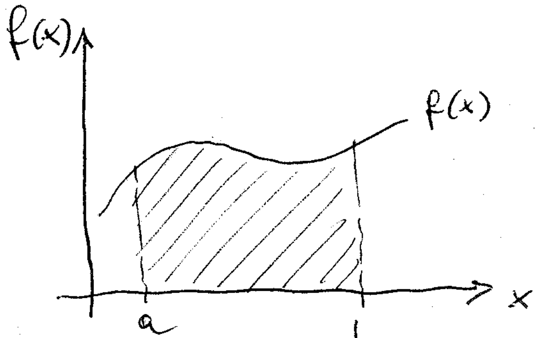
dx è un "approssimante lineare" della variazione della funzione Δx

non necessariamente "infinitesimo"! (può essere finito)

LL 21/11/05

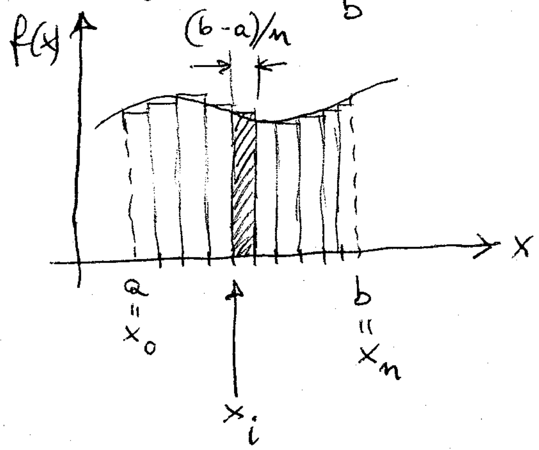
INTEGRALI ? NON E' POI COSÌ COMPLICATO

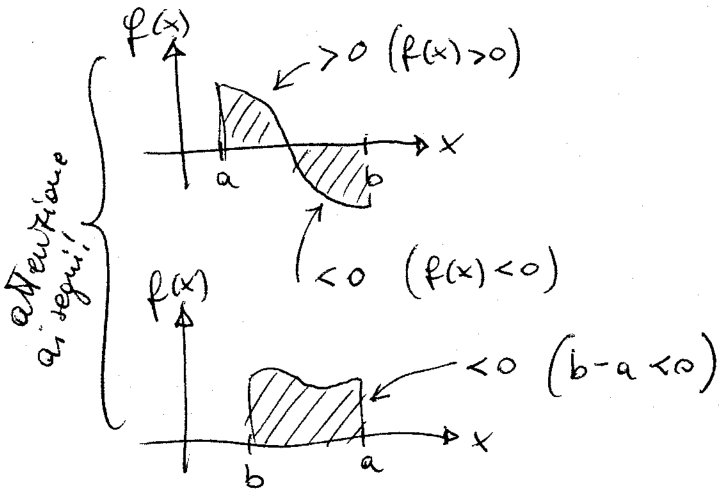
① INTEGRALE "DEFINITO"



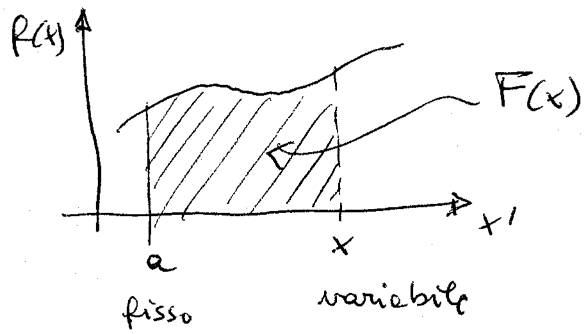
$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv$$ area racchiusa dall'asse x e dal grafico della funzione tra $x=a$ e $x=b$

$$\equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot \frac{b-a}{n}$$





② "FUNZIONE INTEGRALE"



$$F(x) \equiv \int_a^{x} f(x')\,dx'$$

(x ← variabile)

l'area è una funzione dell'estremo superiore x, considerato variabile.

↓

③ "PRIMITIVA" o "INTEGRALE INDEFINITO"

a) Data una funzione $f(x)$, una funzione $g(x)$ tale che $g'(x) = \frac{dg}{dx} = f(x)$ si chiama "primitiva" di $f(x)$

b) se $g(x)$ è primitiva, anche $g(x) + \text{cost.}$ lo è.

c) per confondere le idee, le primitive vengono anche chiamate "integrali <u>indefiniti</u>" ed indicate col simbolo

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{(senza estremi di integrazione)}$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Per calcolare l'<u>integrale definito</u> di una funzione $f(x)$ <u>tra due estremi</u> a e b, basta trovare una primitiva qualsiasi $F(x)$ e calcolare la differenza tra i valori che essa assume in a e b:

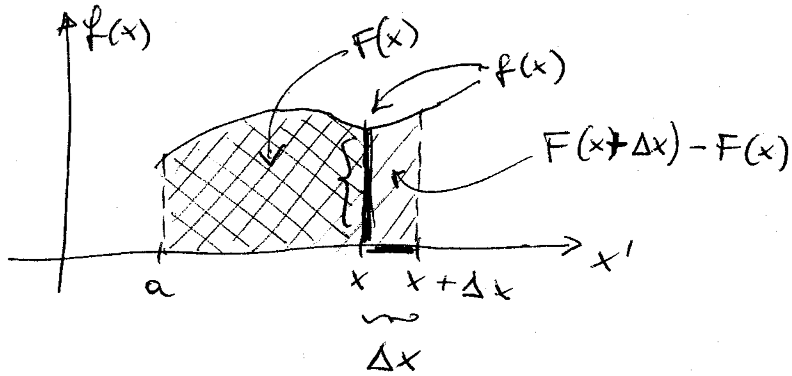
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$, cioè: $F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$

Dimostrazione in due passi:

1) la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(x')\,dx'$ è una primitiva di $f(x)$

infatti: $$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{f(x)\cdot \Delta x}{\Delta x} = f(x)$$



2) consideriamo una <u>primitiva arbitraria</u>: $G(x)$; a meno di una costante, deve essere uguale alla funzione integrale $\int_a^x f(x')\,dx'$

$$G(x) = \int_a^x f(x')\,dx' + c \;\Longrightarrow\; \begin{cases} G(a) = \cancel{\int_a^a f(x')\,dx'} + c = c \\ G(b) = \int_a^b f(x')\,dx' + c = \\ \quad = \int_a^b f(x')\,dx' + G(a) \end{cases}$$

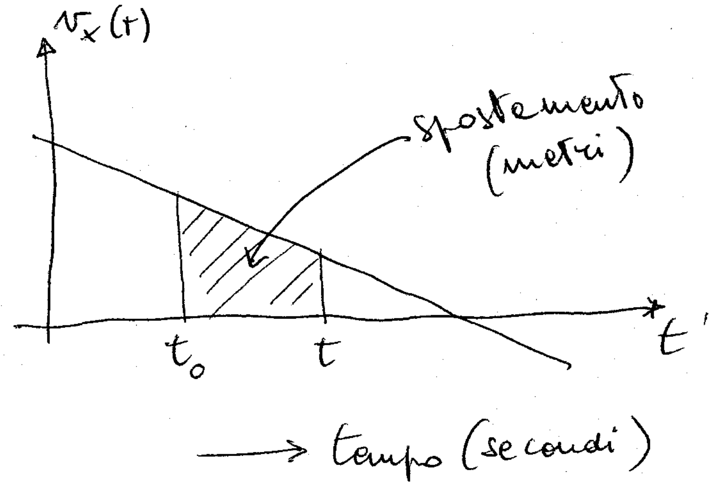
$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

<u>Ad esempio</u>: $$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

primitiva $G(x) = -\frac{1}{x}$

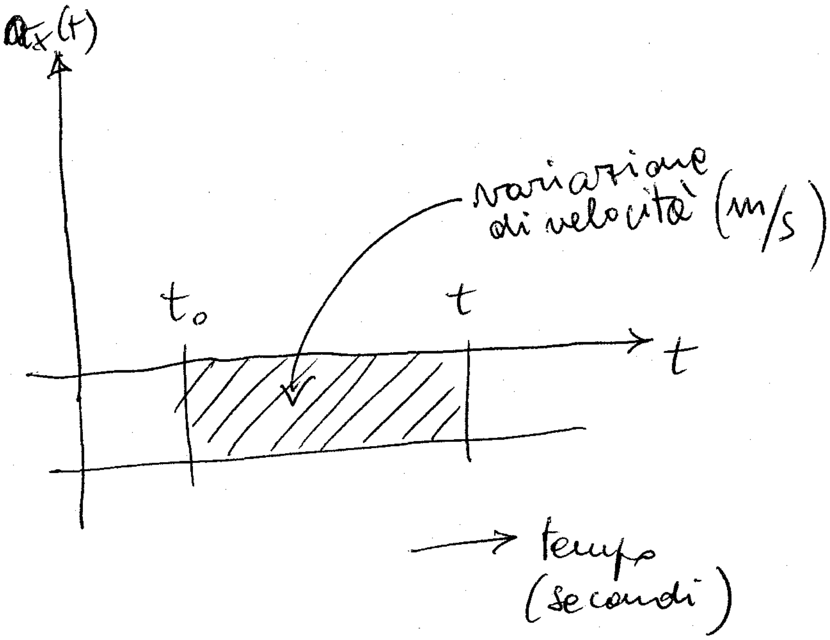
infatti: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$

Attenzione alle dimensioni! nei due esempi già visti, p. es.:



$$\underbrace{x(t) - x(t_0)}_{\text{numericamente eguale all'area tratteggiata}} \equiv \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt'$$

ma: espresso in metri! (prodotto di velocità (m/s) per intervalli di tempo (s))



$$\underbrace{v_x(t) - v_x(t_0)}_{\text{numericamente eguale all'area tratteggiata}} \equiv \int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt'$$

ma: espresso in m/s! (prodotto di accelerazione (m/s²) per intervalli di tempo (s))