

3.8 FORZE FITTIZIE

Dalla seconda legge di Newton sappiamo che in un sistema di riferimento inerziale

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_I, \quad (47)$$

dove \mathbf{F} è la forza applicata, \mathbf{a}_I è l'accelerazione osservata nel sistema inerziale ed M è la massa che si suppone costante. Ad \mathbf{a} è stato aggiunto l'indice I per sottolineare che si tratta di un sistema *inerziale*. È noto che in un sistema non inerziale, per esempio in uno solidale con la terra che ruota, la (47), così com'è scritta, non è valida, in quanto non si è tenuto conto dell'accelerazione \mathbf{a}_0 del sistema non inerziale rispetto al sistema inerziale. Se \mathbf{a} è l'accelerazione di un corpo misurata nel sistema non inerziale, si ha $\mathbf{a} + \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_I$, da cui

$$\mathbf{F} = M(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0). \quad (48)$$

Se si eseguono esperimenti in un sistema di riferimento non inerziale, non si deve mai dimenticare di includere \mathbf{a}_0 nell'equazione della forza. Quando si lavora in un sistema non inerziale è spesso conveniente introdurre una grandezza \mathbf{F}_0 tale che la (48) assuma la forma

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = M\mathbf{a}, \quad (49)$$

dove

$$\mathbf{F}_0 \equiv -M\mathbf{a}_0 \quad (50)$$

è chiamata *forza fittizia* o *apparente*. La forza fittizia, così definita, è uguale e opposta al prodotto della massa che si considera per l'accelerazione del sistema non inerziale e rappresenta semplicemente

l'effetto dell'accelerazione del sistema non inerziale stesso: si tratta della grandezza che occorre aggiungere alla forza vera F per far sì che la somma risulti uguale alla quantità Ma osservata nel sistema non inerziale. Qualcosa di fittizio in fisica può creare confusione, ma, rifacendosi all'Eq. (48) si può sempre risolvere qualunque problema.

ESEMPIO - L'ACCELEROMETRO

Sia $F_x = -Kx$ la forza esercitata su una massa M da una molla tesa lungo la direzione x ; K è una costante; consideriamo inoltre un sistema di riferimento non inerziale avente accelerazione $\mathbf{a}_0 = a_0 \hat{x}$ nella direzione x . Se la molla è in quiete nel sistema non inerziale, allora la sua accelerazione \mathbf{a} in questo sistema è zero, $\mathbf{F} = M(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0)$ si riduce a $F_x = Ma_0$ e $\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = M\mathbf{a}$ si riduce a

$$F_x + F_{0x} = 0. \quad (51)$$

Quindi

$$-Kx + F_{0x} = 0; \quad -Kx - Ma_0 = 0, \quad (52)$$

$$o \quad x = -\frac{Ma_0}{K}. \quad (53)$$

Lo spostamento x è proporzionale all'accelerazione a_0 del sistema non inerziale; tale sistema potrebbe essere un aeroplano o un'automobile. Vediamo che la (53) descrive il funzionamento di un *accelerometro* in cui la massa M è attaccata a una molla ed è costretta a muoversi in una dimensione: lo spostamento x della massa misura l'accelerazione a_0 del sistema non inerziale.

ESEMPIO - FORZA CENTRIFUGA E ACCELERAZIONE CENTRIFUGA IN UN SISTEMA IN MOTO ROTATORIO UNIFORME

Sebbene i sistemi rotanti vengano trattati in dettaglio poche pagine avanti, vale la pena di discutere subito un semplice e facile esempio comune. Consideriamo una massa puntiforme M , ferma in un sistema non inerziale, sicché in esso $\mathbf{a} = 0$; il sistema non inerziale ruota uniformemente attorno a un asse fisso rispetto a un sistema inerziale.

94 L'accelerazione del punto in questione, come si è visto al Cap. 2, è

$$\mathbf{a}_0 = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (54)$$

rispetto al sistema inerziale; il vettore $\boldsymbol{\rho}$ è diretto verso l'esterno, dall'asse alla particella, ed è perpendicolare all'asse. Si è usata la lettera $\boldsymbol{\rho}$ per indicare che questo vettore è l'analogo bidimensionale del vettore posizione tridimensionale \mathbf{r} .

La (54) esprime la famosa *accelerazione centripeta* (fig. 3.29). La massa può essere vincolata a rimanere ferma da una molla tesa. La

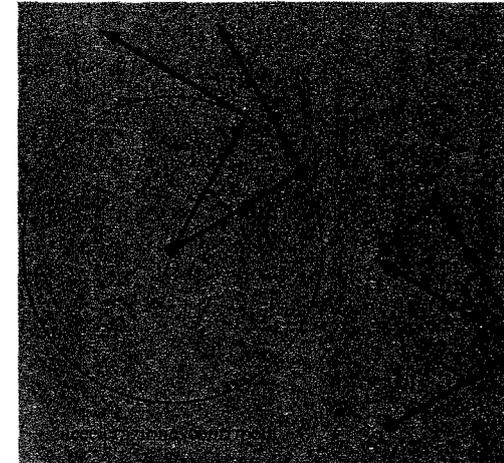


FIGURA 3.29 Se il punto P descrive una orbita circolare di raggio ρ con velocità costante v , l'accelerazione \mathbf{a} di P è sempre diretta verso il centro O e il suo modulo vale $a = v^2/\rho = \omega^2\rho$, dove $\omega = d\phi/dt = v/\rho$. Per capire questo osserviamo che $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ è diretta sempre verso O . Inoltre

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \sin \Delta \phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \phi}{\Delta t}.$$

Perciò $a = v\omega = v^2/\rho = \omega^2\rho$. Questo risultato è già stato ricavato analiticamente.

specificazione che nel sistema non inerziale $\mathbf{a} = 0$ conduce, per la (49), a

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_0 = M\mathbf{a}_0 = -M\omega^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (55)$$

La forza fittizia \mathbf{F}_0 che compare in questo esempio è detta *forza centrifuga*: essa vale $F_0 = M\omega^2\rho$ ed è orientata dall'asse verso l'esterno. La forza centrifuga, in questo esempio, è bilanciata dalla forza elastica \mathbf{F} della molla, così che nel sistema rotante non inerziale l'accelerazione è nulla (massa in quiete).

Se $M = 100$ gm, $\rho = 10$ cm, e il sistema ruota a 100 giri al secondo, quanto vale la forza centrifuga? Si ha

$$F_0 = M\omega^2\rho = (10^2)(2\pi \cdot 100)^2(10) \approx 4 \times 10^8 \text{ dine.}$$

ESEMPIO - ESPERIENZE IN UN ASCENSORE IN CADUTA LIBERA

L'accelerazione di un sistema non inerziale (un ascensore in caduta libera) sia

$$\mathbf{a}_0 = -g\hat{z}, \quad (56)$$

dove \hat{z} è un versore perpendicolare alla superficie della terra e che punta verso l'alto, e g è l'accelerazione di gravità. Questa accelerazione quindi è equivalente a quella che si ha nella caduta libera di un grave. Dalla (50) si ricava la forza fittizia agente su una massa M nel sistema non inerziale:

$$\mathbf{F}_0 = -M\mathbf{a}_0 = Mg\hat{z}. \quad (57)$$

Un corpo libero all'interno dell'ascensore è sottoposto contemporaneamente alla forza di gravità $\mathbf{F} = -Mg\hat{z}$ e alla forza fittizia

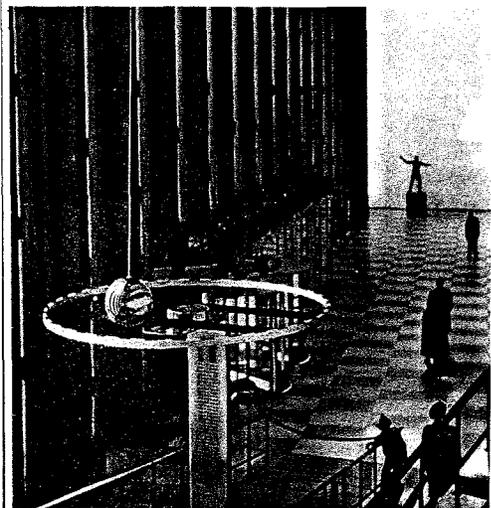


FIGURA 3.30 Il pendolo di Foucault installato nel palazzo delle Nazioni Unite a New York. La sfera che si vede a sinistra è placcata in oro e pesa circa 90 kg; pende dal soffitto, a circa 23 metri dal pavimento dell'atrio, attaccata a un filo di acciaio inossidabile che le permette di oscillare liberamente in qualunque piano al di sopra di un anello metallico di circa 2 metri di diametro, tenuto sollevato da terra. La sfera oscilla continuamente come un pendolo e il suo piano di oscillazione, ruotando lentamente in senso orario, offre una prova visiva della rotazione terrestre. Un giro completo viene eseguito in 36 ore e 45 minuti circa. Sul pendolo è incisa una frase della regina-Giuliana d'Olanda «È un privilegio vivere oggi e domani». (Fotografia Nazioni Unite).

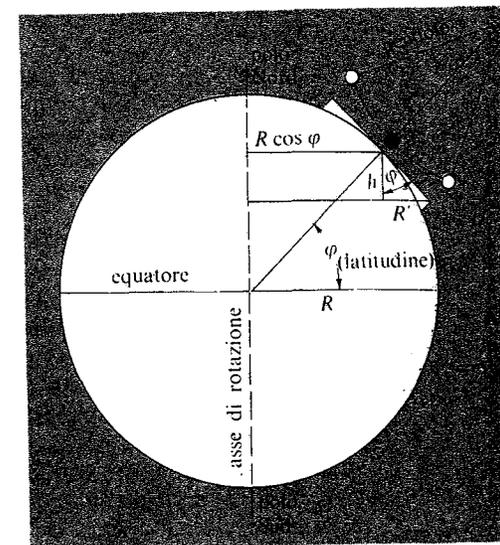


FIGURA 3.31 Il pendolo di Foucault, enormemente ingrandito rispetto alle dimensioni della terra, è posto circa alla stessa latitudine φ di Parigi. Il cerchio di sabbia al di sotto del pendolo ha raggio r, e la distanza tra l'asse della terra e il centro di oscillazione del pendolo è R cos φ. A causa della rotazione terrestre la parte sud del disco di sabbia si muove più velocemente della parte nord (rispetto a un sistema inerziale).

$F_0 = Mg\hat{z}$, per cui la forza totale che si manifesta nel sistema non inerziale dell'ascensore in caduta libera è nulla:

$$F + F_0 = 0. \quad (58)$$

Quindi in questo sistema non inerziale il corpo non è accelerato e si ha un esempio di «assenza di peso»: il corpo, se non possiede una velocità iniziale relativa all'ascensore, appare sospeso nello spazio.

ESEMPIO - IL PENDOLO DI FOUCAULT

Il pendolo di Foucault (fig. 3.30) è un dispositivo che serve a illustrare la rotazione della terra, e quindi a dimostrare che la terra non è un sistema di riferimento inerziale. L'esperimento fu eseguito pubblicamente per la prima volta da Foucault nel 1851, sotto la grande cupola del Pantheon di Parigi, usando una massa di 28 kg sospesa a un filo metallico lungo circa 70 m, attaccato alla cupola in modo che il pendolo potesse liberamente oscillare in qualunque direzione. Il periodo di un pendolo di questa lunghezza è di circa 17 sec. (vedi Cap. 7).

96

Sul pavimento venne sistemata una rotaia circolare, di circa 3 m di raggio, con centro giusto sotto il punto di sospensione del pendolo, sulla quale venne accumulato uno strato di sabbia in modo che una punta, infissa nel pendolo, potesse lasciare una traccia a ogni oscillazione.

Con successive oscillazioni apparve evidente che il piano del moto del pendolo si muoveva, visto dall'alto, in senso orario: in un'ora ruotò di 11 gradi, una rotazione completa fu eseguita in circa 32

ore e, in una oscillazione, il piano si mosse di 3 mm, misurati sulla circonferenza di sabbia.

Perché il piano di oscillazione del pendolo ruota? Se eseguiamo l'esperimento di Foucault al polo nord, vedremo immediatamente che il piano del pendolo rimane fisso, rispetto a un sistema inerziale, mentre la terra compie un giro completo sotto il pendolo ogni 24 ore. La rotazione della terra, osservata dall'alto, al di sopra del polo nord (per esempio dalla Stella Polare), è in senso antiorario, perciò a un osservatore su una scala, fissata a terra al polo nord, sembra che il piano del pendolo ruoti, rispetto alla propria posizione, in senso orario.

La situazione si presenta diversa (e più difficile da analizzare) quando ci spostiamo dal polo nord e il tempo per una rotazione completa del pendolo diventa più lungo. Si considerino le velocità relative dei punti all'estremo nord e sud della circonferenza di sabbia di raggio r: il punto sud è più lontano dall'asse di rotazione della terra e pertanto si muoverà nello spazio più velocemente del punto nord (fig. 3.31). Se ω indica la velocità angolare della terra ed R il raggio della terra, allora il centro del cerchio di sabbia si muove con velocità ωR cos φ, dove φ è la latitudine di Parigi (48°51'N) misurata dall'equatore. Il punto più a nord dell'anello si muove con velocità

97

$$v_N = \omega R \cos \varphi - \omega r \sin \varphi, \quad (58a)$$

come si vede dalla figura, e quello più a sud con velocità

$$v_S = \omega R \cos \varphi + \omega r \sin \varphi. \quad (58b)$$

La differenza tra ciascuna di queste velocità e quella del centro dell'anello è

$$\Delta v = \omega r \sin \varphi. \quad (58c)$$

Se il pendolo inizia il suo moto nel piano nord-sud, a partire dal centro dell'anello, la componente est-ovest della velocità nello spazio sarà la stessa di quella del centro del cerchio. La circonferenza dell'anello è $2\pi r$ e, se Δv è costante lungo tutto l'anello, il tempo T_0 impiegato a compiere un intero giro è

³
Invarianza
galileiana

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\omega r \sin \varphi} = \frac{24 \text{ ore}}{\sin \varphi}. \quad (58d)$$

All'equatore $\sin \varphi = 0$ e il tempo diventa infinito.

Cosa succede quando il piano del pendolo raggiunge il piano est-ovest passante per il centro del cerchio? Perché Δv dovrebbe avere qui lo stesso valore che nel piano nord-sud? Questo è difficile da capire se non ci si serve di un mappamondo. Si prenda un pezzo di cartone, o di carta rigida, e lo si tenga disteso in modo che sia quasi a contatto con un mappamondo, vicino al punto corrispondente a Parigi, perpendicolarmente al globo e disposto da est a ovest: la normale alla superficie del globo coincide col filo del pendolo. Ora si cerchi di tenere fisso con una mano il piano del pezzo di cartone, mentre con l'altra si fa ruotare lentamente il globo: si noti che un estremo della linea di quasi contatto tra foglio di cartone e globo sembra muoversi verso sud e l'altro verso nord. Osservando o analizzando nei particolari il fenomeno si ottiene lo stesso valore di Δv trovato sopra: il piano del pendolo ruota effettivamente, rispetto al cerchio posto sul pavimento del Pantheon, con velocità angolare costante $\omega \sin \varphi$, dove ω è la velocità angolare della terra e φ la latitudine. La trattazione matematica dell'equazione del moto di un pendolo di Foucault si trova in molti testi di meccanica razionale per i corsi del primo biennio.

COMPLEMENTI - VELOCITÀ E ACCELERAZIONE IN SISTEMI DI COORDINATE ROTANTI (*)

Consideriamo ora un sistema di riferimento non inerziale che ruoti con velocità angolare costante ω attorno all'asse z di un sistema inerziale. L'importanza di questo problema sta nel fatto che la terra ruota e pertanto un sistema di riferimento ad essa solidale non è inerziale. Nell'equazione $F = Ma$ dovremo aggiungere dei termini che tengano conto dell'accelerazione di tale sistema: oltre l'accelerazione centripeta, nell'analisi incontreremo e impareremo a conoscere l'accelerazione di Coriolis, importante nei moti su grande scala delle correnti marine e aeree.

Le coordinate (x_R, y_R, z_R) di un punto P , valutate nel sistema rotante, possono essere

103

(*) Questo paragrafo e i cinque esempi che seguono immediatamente possono essere omessi in un programma ridotto.

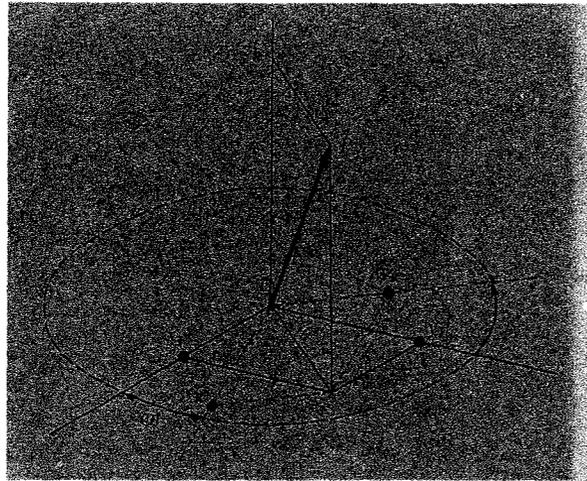
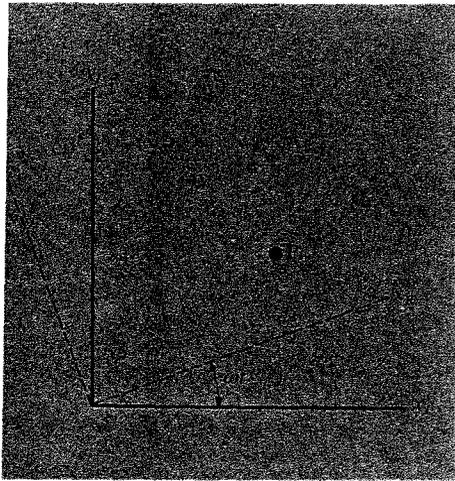


FIGURA 3.35

FIGURA 3.36 La posizione del punto P può venire individuata per mezzo delle coordinate x_I, y_I, z_I del sistema di riferimento inerziale oppure utilizzando le x_R, y_R, z_R del sistema di riferimento che ruota intorno all'asse z , $x_I = x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t$, $y_I = x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t$, $z_I = z_R$.

messe in relazione con le coordinate (x_I, y_I, z_I) dello stesso punto, osservato dal sistema inerziale, in maniera molto semplice: dalla figura 3.36 si vede che

$$x_I = x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t ; \quad (65a)$$

$$y_I = x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t ; \quad (65b)$$

$$z_I = z_R . \quad (65c)$$

Le relazioni tra le componenti della velocità nei due sistemi si ricavano derivando rispetto al tempo le (65). (Per motivi di concisione metteremo talvolta un punto sopra la lettera che rappresenta una grandezza per indicare la derivata della grandezza rispetto al tempo: così $\dot{x} \equiv dx/dt \equiv v_x$ e $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2 \equiv \dot{v}_x \equiv dv_x/dt$). Si ottiene

$$\dot{x}_I = \dot{x}_R \cos \omega t - \omega x_R \sin \omega t - \dot{y}_R \sin \omega t - \omega y_R \cos \omega t ; \quad (66a)$$

$$\dot{y}_I = \dot{x}_R \sin \omega t + \omega x_R \cos \omega t + \dot{y}_R \cos \omega t - \omega y_R \sin \omega t ; \quad (66b)$$

$$\dot{z}_I = \dot{z}_R . \quad (66c)$$

Per semplicità, ω si è considerata costante. Si osservi che per una particella ferma ($\dot{x}_R = \dot{y}_R = \dot{z}_R = 0$) nel sistema rotante, le (66) si riducono a

$$\dot{x}_I = -\omega x_R \sin \omega t - \omega y_R \cos \omega t ; \quad \dot{y}_I = \omega x_R \cos \omega t - \omega y_R \sin \omega t . \quad (67)$$

Allo stesso modo, per una particella ferma nel sistema inerziale ($\dot{x}_I = \dot{y}_I = \dot{z}_I = 0$), sempre dalle (66), si ricava

$$\dot{x}_R - \omega y_R = 0 ; \quad \dot{y}_R + \omega x_R = 0 ; \quad \dot{z}_R = 0 , \quad (68)$$

Derivando ulteriormente le (66) rispetto al tempo si ottengono le componenti della accelerazione:

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R \cos \omega t - 2\omega \dot{x}_R \sin \omega t - \omega^2 x_R \cos \omega t - \ddot{y}_R \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_R \cos \omega t + \omega^2 y_R \sin \omega t ; \quad (69a)$$

$$\ddot{y}_I = \ddot{x}_R \sin \omega t + 2\omega \dot{x}_R \cos \omega t - \omega^2 x_R \sin \omega t +$$

$$+ \ddot{y}_R \cos \omega t - 2\omega \dot{y}_R \sin \omega t - \omega^2 y_R \cos \omega t ; \quad (69b)$$

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R . \quad (69c)$$

Osserviamo che, per una particella ferma nel sistema rotante, le (69), tenendo conto delle (65), si riducono a

$$\ddot{x}_I = -\omega^2(x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t) = -\omega^2 x_I ; \quad (70a)$$

$$\ddot{y}_I = -\omega^2(x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t) = -\omega^2 y_I . \quad (70b)$$

Le equazioni (70) possono scriversi in forma vettoriale

$$\mathbf{a}_I = -\omega^2 \mathbf{r}_I , \quad (71)$$

dove $\mathbf{a}_I = \mathbf{r}_I$ è l'accelerazione della particella rispetto al riferimento inerziale, e $\mathbf{r}_I = x_I \hat{x}_I + y_I \hat{y}_I$: come la (54), l'equazione (71) è l'espressione della solita forza-centripeta. I risultati fisici essenziali sono contenuti nella (69), che è utile riscrivere in forma vettoriale: dopo alcuni passaggi algebrici un po' noiosi (che riportiamo sotto) si ricava l'importante risultato

\mathbf{a}_I	=	\mathbf{a}_R	+	$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R$	+	$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_R)$,	(72)
accelerazione nel sistema inerziale		accelerazione nel sistema rotante		accelerazione di Coriolis		accelerazione centripeta	

dove le grandezze con l'indice R sono quelle osservate nel sistema rotante e la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è costante. Abbiamo indicato per i due termini di destra i loro nomi convenzionali.

Possiamo provare che la (72) si riduce alla (69) per $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$. Proiettando i due membri della (72) sull'asse x_I , si ottiene

$$(\mathbf{a}_I)_{x_I} = (\mathbf{a}_R)_{x_I} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R)_{x_I} + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_R)]_{x_I} , \quad (72a)$$

dove l'indice x_I sta a indicare che si tratta della proiezione su quell'asse. Per esempio, la proiezione del vettore \mathbf{a}_R sull'asse x_I è

$$(\mathbf{a}_R)_{x_I} = \ddot{x}_R \cos \omega t - \ddot{y}_R \sin \omega t , \quad (72b)$$

in quanto qualunque vettore del sistema rotante (come appunto \mathbf{a}_R) viene proiettato su x_I allo stesso modo di qualunque altro vettore: dalla (65a) si vede come il vettore \mathbf{r}_R viene proiettato su x_I , e seguendo lo stesso metodo per \mathbf{a}_R si ottiene la (72b). Il termine successivo nella (72a) è

$$2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R)_{x_I} = 2\omega_{y_I}(\mathbf{v}_R)_{z_I} - 2\omega_{z_I}(\mathbf{v}_R)_{y_I} = -2\omega(\dot{x}_R \sin \omega t + \dot{y}_R \cos \omega t) , \quad (72c)$$

dove si è tenuto conto che $\boldsymbol{\omega} = \omega_{z_I} \hat{z}$ e si è proiettato \mathbf{v}_R sull'asse y_I secondo la (65b). L'ultimo termine nella (72a) è

$$[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_R)]_{x_I} = -\omega(\omega \times \mathbf{r}_R)_{y_I} = -\omega^2(\mathbf{r}_R)_{x_I} = -\omega^2(x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t) . \quad (72d)$$

Sommando le (72b), (72c) e (72d) si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_I &= (\mathbf{a}_R)_{x_I} - 2\omega(\mathbf{v}_R)_{y_I} - \omega^2(\mathbf{r}_R)_{x_I} = \\ &= \ddot{x}_R \cos \omega t - \ddot{y}_R \sin \omega t - 2\omega \dot{x}_R \sin \omega t - 2\omega \dot{y}_R \cos \omega t - \\ &- \omega^2 x_R \cos \omega t + \omega^2 y_R \sin \omega t , \end{aligned} \quad (73)$$

in accordo con la (69a). Ciò prova l'identità dell'equazione vettoriale (72) con le equazioni delle componenti (69).

Le equazioni (69) e (72a) sono importanti in quanto collegano l'accelerazione \mathbf{a}_R , osservata in un sistema rotante, con quella \mathbf{a}_I osservata in un sistema inerziale. Ricordiamo che per usare la seconda legge di Newton dobbiamo avere \mathbf{a}_I . Tutte le grandezze del membro di destra della (72a) sono relative al sistema rotante: il primo termine, \mathbf{a}_R , è l'accelerazione osservata nel sistema che ruota; il secondo, $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R$, è chiamato *accele-*

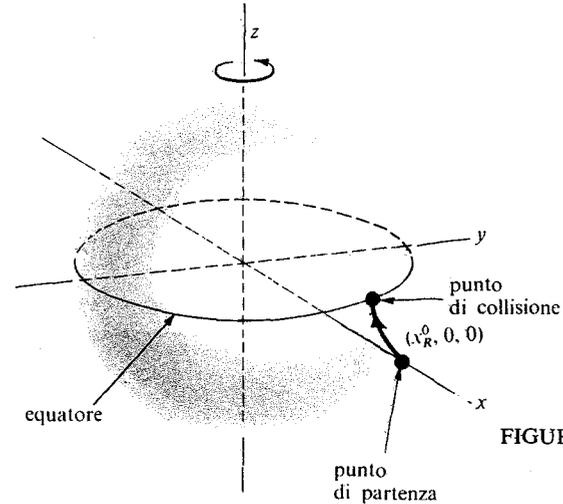
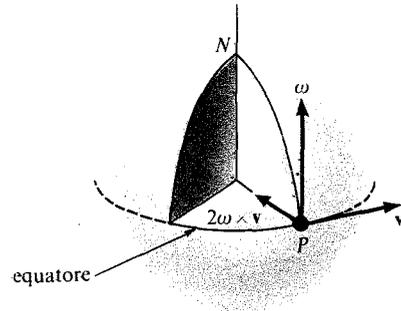
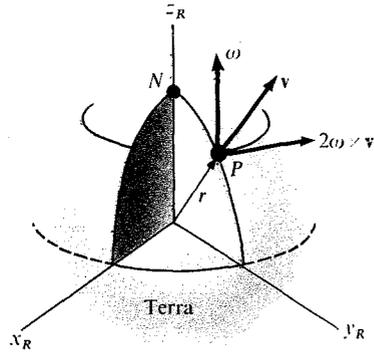


FIGURA 3.37 Esempio di accelerazione di Coriolis in un sistema di coordinate rotante: il sistema rotante (x_R, y_R, z_R) è solidale con la terra e ω è parallelo a z_R ; un oggetto viene lanciato verticalmente verso l'alto da un punto P della superficie terrestre con velocità iniziale v ; l'accelerazione di Coriolis $2\omega \times v$ è tangente al parallelo passante per P; N è il polo Nord. Se l'oggetto potesse cadere liberamente da una certa altezza sulla superficie, l'accelerazione di Coriolis sarebbe diretta in senso opposto. Perché?

FIGURA 3.38 Altro esempio di accelerazione di Coriolis: se l'oggetto P all'equatore ha una velocità v (rispetto alla superficie della terra) tangente all'equatore, sarà soggetto a una accelerazione diretta verso il centro della terra, di modulo $2\omega v$, oltre all'accelerazione di gravità g . Cosa accadrebbe se v fosse diretta verso ovest invece che verso est?

FIGURA 3.39

razione di Coriolis; e il terzo termine, $\omega \times (\omega \times r_R)$, è la normale accelerazione centripeta di una particella in moto circolare. Per semplicità abbiamo ommesso un termine $(d\omega/dt) \times r_R$ che compare quando la velocità angolare ω varia nel tempo.

La forza fittizia F_0 che compare nella rotazione uniforme ($\dot{\omega}=0$) è data dalle (50) e (72a): dalla $F_0 = -M\mathbf{a}_0$ si ricava

$$F_0 = -2M\omega \times v_R - M\omega \times (\omega \times r_R) \quad (74)$$

forza di Coriolis forza Centrifuga

La forza centrifuga è ben nota: essa è la sola forza fittizia che agisce su una particella che si trovi in quiete ($v_R=0$) nel sistema rotante. Possiamo riscrivere la forza centrifuga al modo seguente

$$-M\omega \times (\omega \times r_R) = M\omega^2 \rho, \quad (74a)$$

dove ρ è il vettore che va dall'asse alla particella ed è normale all'asse. Questo risultato coincide con la precedente formula (55).

La forza di Coriolis è una forza fittizia che agisce su una particella solo se essa si muove rispetto al sistema rotante (figg. 3.37 e 3.38).

106

ESEMPIO - MOTO RETTILINEO UNIFORME IN UN SISTEMA INERZIALE

In un sistema inerziale un corpo si muova liberamente lungo una traiettoria data da $x_I = v_0 t$; $y_I = 0$; $z_I = 0$. (75)

Qual è la traiettoria in un sistema che ruota con velocità angolare costante ω in senso antiorario attorno all'asse z_I ?

Dalle (65), con i valori dati dalla (75), si ha

$$\begin{aligned} v_0 t &= x_R \cos \omega t - y_R \sin \omega t; \\ 0 &= x_R \sin \omega t + y_R \cos \omega t; \\ 0 &= z_R. \end{aligned} \quad (76)$$

Risolvendo le (76) si ottiene

$$x_R = v_0 t \cos \omega t; \quad y_R = -v_0 t \sin \omega t; \quad z_R = 0. \quad (77)$$

ESEMPIO - CADUTA LIBERA DA UNA TORRE

Si consideri un corpo lasciato cadere da fermo ($v_R=0$ a $t=0$) da un punto $(x_R^0, 0, 0)$ in prossimità della superficie terrestre, all'equatore. L'origine del sistema x_R, y_R, z_R è nel centro della terra e l'asse di rotazione della terra è l'asse z . Determinare la coordinata y_R del punto di caduta del corpo sulla terra.

L'accelerazione reale (dovuta alla gravità) è diretta secondo $-\hat{x}_R$ nel sistema rotante (cioè nel sistema solidale con la terra) e vale g . La componente della forza reale lungo \hat{y}_R è nulla, perciò la proiezione dell'equazione dell'accelerazione (72) in direzione y_R è $0 = \ddot{y}_R + 2\omega \dot{x}_R - \omega^2 y_R$. (78)

Nell'approssimazione di ordine più basso possiamo porre $\dot{x}_R = -gt$, dove g è l'accelerazione di gravità, e trascurare il termine $-\omega^2 y_R$, essendo y_R inizialmente zero. Allora

$$\ddot{y}_R \cong 2\omega g t; \quad \dot{y}_R \cong \omega g t^2, \quad (79)$$

e lo spostamento risulta

$$y_R \cong \frac{1}{3} \omega g t^3, \quad (80)$$

verso est. Per la rotazione della terra ω è positiva (fig. 3.39).

Questo spostamento si può osservare facilmente: supponiamo che il punto di partenza sia su una torre alta 100 m; allora, dalla relazione $\Delta x_R \cong -\frac{1}{2} g t^2$ per un corpo in caduta libera, si ottiene

$$t^2 \cong -\frac{2\Delta x_R}{g} \approx \frac{2 \times 10^4}{10^3} \approx 20 \text{ sec}^2, \quad (81)$$

107

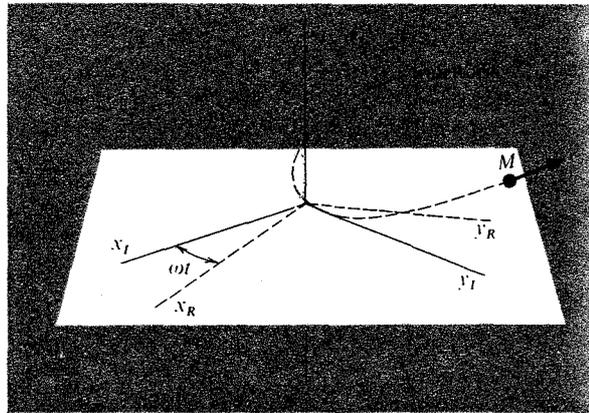
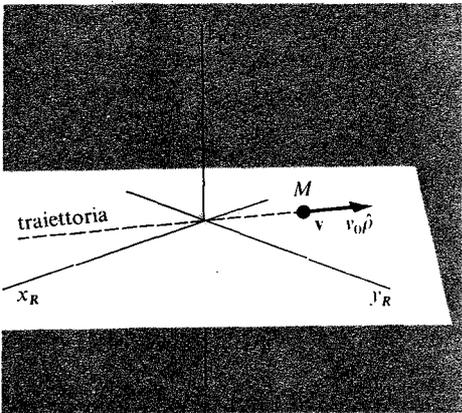


FIGURA 3.40 Corpo di massa M che si muove lungo una retta (sul piano $x_R y_R$) che incontra l'asse di rotazione, nel sistema di riferimento in rotazione uniforme.

FIGURA 3.41 Lo stesso oggetto visto da un sistema inerziale.

e quindi, essendo $\omega \approx 0,7 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ per la rotazione della terra,

$$y_R \approx \frac{1}{3} \omega g t^3 \approx \frac{(10^{-4})(10^3)(10^2)}{3} \approx 3 \text{ cm} . \quad (82)$$

Come si potrebbe misurare la verticale vera dalla cima della torre, rispetto alla quale si osserva lo spostamento y ?

ESEMPIO - MOTO RETTILINEO UNIFORME IN UN SISTEMA ROTANTE

Quale forza occorre applicare a un corpo di massa M , affinché questo si muova su una retta, normale all'asse di rotazione e passante per esso, con velocità costante, rispetto a un sistema che ruoti uniformemente?

Per l'accelerazione abbiamo

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_R + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_R) , \quad (83)$$

e vogliamo che $\mathbf{a}_R = 0$ e $\mathbf{v}_R = v_0 \hat{\rho}_R$, dove $\hat{\rho}_R$ è un versore normale all'asse di rotazione orientato dall'asse verso la particella. Quindi, se $\hat{\phi}_R$ è un versore tangente al cerchio e con verso coincidente con quello di rotazione del sistema, si può scrivere

$$\mathbf{a}_I = 2\omega v_0 \hat{\phi}_R - \omega^2 v_0 t \hat{\rho}_R , \quad (84)$$

e

$$\mathbf{F} = 2M\omega v_0 \hat{\phi}_R - M\omega^2 v_0 t \hat{\rho}_R . \quad (85)$$

Si vede perciò che è necessaria una forza costante, orientata come $\hat{\phi}_R$, oltre all'usuale forza centripeta, che ha la direzione di $\hat{\rho}_R$, normale all'asse, ma anche punta verso l'asse stesso (figg. 3.40 e 3.41).

ESEMPIO - CORREZIONE CENTRIFUGA A g

Se g_R è l'accelerazione apparente di gravità all'equatore, rispetto a un sistema solidale con la terra, qual è il valore vero g_I dell'accelerazione di gravità, corretto per la forza centrifuga?

L'accelerazione effettiva nel sistema rotante, se \hat{z}_R è diretto verso l'esterno ed è normale alla superficie della terra, si ricava dalla

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_0 = -Mg_R \hat{z}_R ; \quad (86)$$

ma $\mathbf{F}_0 = -M\mathbf{a}_0$, dove $\mathbf{a}_0 = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}$, cosicché nell'istante in cui \hat{z}_R , \hat{z}_I e $\boldsymbol{\rho}$ coincidono, si può scrivere

$$(\mathbf{F}_I)_{zR} = -Mg_I = -M(g_R + \omega^2 \rho) . \quad (87)$$

All'equatore $\rho = R$, sicché

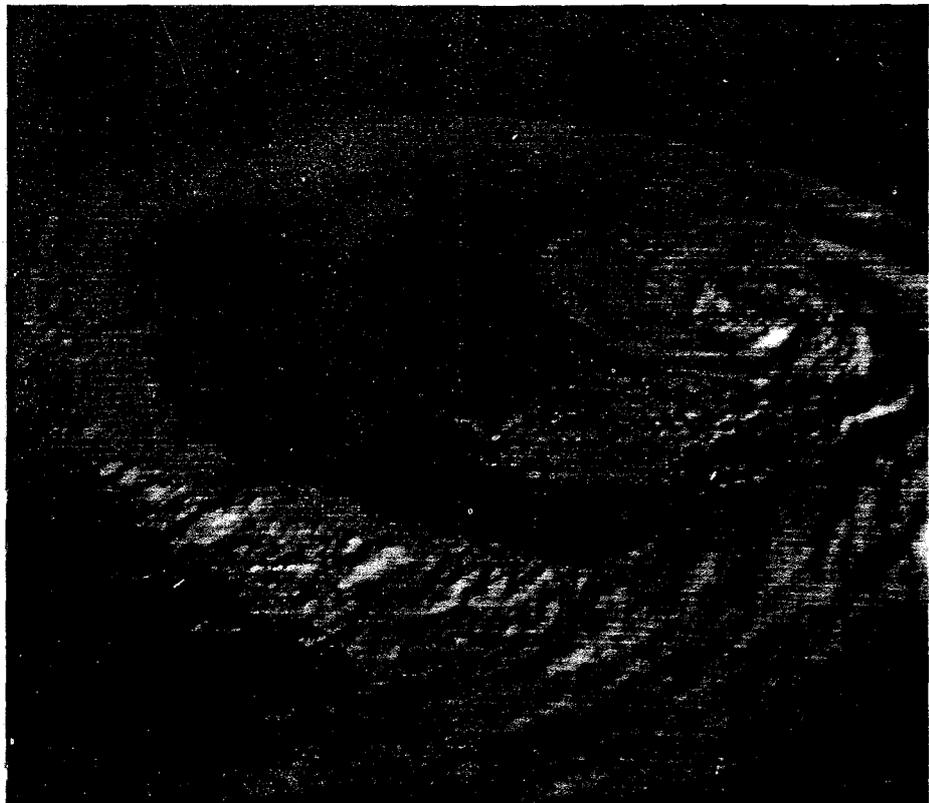
$$g_I = g_R + \omega^2 R . \quad (88)$$

3
Invarianza
galileiana

ESEMPIO - DIREZIONE DEI VENTI

Il diverso riscaldamento dell'atmosfera terrestre, tra le zone equatoriali e quelle polari provoca una variazione di pressione orizzontale da nord a sud: eppure i venti presentano una componente predominante della velocità in direzione est-ovest. Ciò si spiega con la rotazione della terra. Mostrare che il moto stazionario di un gas non viscoso, alla

FIGURA 3.42 Un vortice nell'atmosfera vicino alla Nuova Scozia, osservato dal satellite TIROS VI il 29 Maggio 1963. (Per gentile concessione del Dott. F. Singer e della NASA).



superficie della terra, è parallelo alle isobare (curve di pressione costante). Qual è l'andamento dei venti attorno a una zona localizzata di alte pressioni (anticiclone), nell'emisfero nord?

Il gradiente di pressione agisce da nord a sud, perpendicolarmente alle isobare; d'altra parte, la rotazione della terra fa sì che una corrente nord-sud sembri possedere una componente est-ovest, osservata dalla terra che gira. Questo problema può essere compreso completamente rifacendosi alla precedente analisi del pendolo di Foucault.

Nell'emisfero nord i venti soffiano in verso orario attorno a una zona di alta pressione, poiché l'aria che si muove radialmente, dalla zona di alta pressione verso l'esterno, è deflessa verso destra, per chi guarda dalla zona d'anticiclone verso l'esterno (fig. 3.42).

Riferimento. J. Spar, *Earth, sea and air*, pp. 103-112 (Addison-Wesley, Reading, Mass. 1962).