Fisica Generale

Sistemi di riferimento non inerziali

Facoltà di Ingegneria

Livio Lanceri

Introduzione

- *Motivazioni*
- *Cinematica: posizione, velocità, accelerazione*
- *Dinamica nei riferimenti non inerziali*
- *Esempi*
- *Conclusioni e prospettive*

Motivazioni

Motivazioni - 1

- ***Navigazione inerziale - accelerometri***
  - Interesse pratico: strumentazione per la navigazione di aerei e navi
  - Nota la posizione iniziale:
    - misure sufficientemente precise dell'accelerazione (vettoriale) istante per istante (a brevi intervalli)

$$a_x(t_i),\ a_y(t_i),\ a_z(t_i)$$

    - Calcolo numericodella velocita` (vettoriale) istante per istante

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\,dt'$$

    - Calcolo numerico della posizione in funzione del tempo (Legge oraria)

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt'$$

  - Gli errori di misura e calcolo si accumulano: periodica verifica della posizione calcolata con misure indipendenti della posizione

Motivazioni - 2

- ***Fenomeni fisici per diversi osservatori***
  - Validità delle leggi della fisica per diversi osservatori? Relazioni tra le descrizioni date da diversi osservatori?
  - Primo esempio incontrato: principio di relatività galileiana
  - Alcune domande:
    - Che succede per osservatori "non inerziali", accelerati, nell'ipotesi che il tempo scorra in modo eguale per i diversi osservatori?
      (questa lezione)
    - Vale solo per la meccanica? Elettromagnetismo? Ottica?
    - Tempo per diversi osservatori…? etc

Esercizi/esperimenti - 1

- *Pesa-persone in ascensore*
  - Munirsi di un pesa-persone ed annotare la lettura del proprio peso nelle seguenti condizioni, in un ascensore:
    - Ascensore fermo
    - Ascensore in salita (preferibilmente alcuni piani), con attenzione alla fase iniziale e finale del moto
    - Ascensore in discesa
  - Scrivere una breve relazione con i numeri osservati e l'interpretazione tenendo conto dell'accelerazione dell'ascensore (possibilmente, stimarla in valore assoluto e segno)

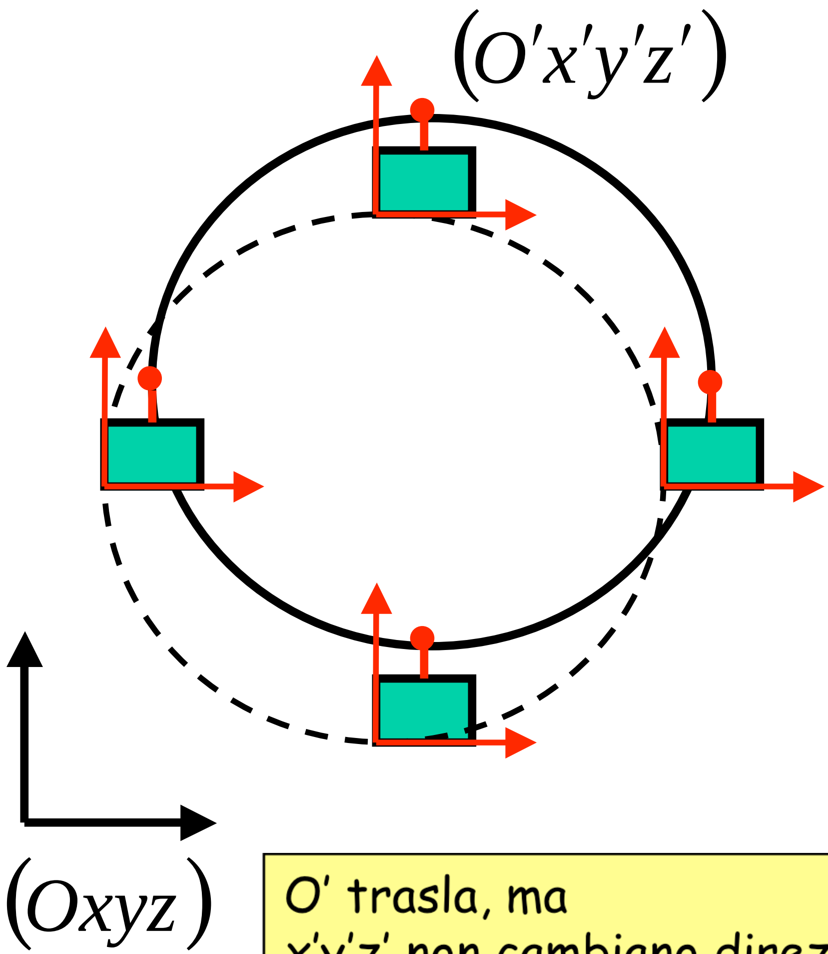
Esercizi/esperimenti - 2

- ***Filo a piombo in automobile***
  - Appendere un filo a piombo in automobile, in una posizione che non interferisca con la guida. Annotare l'inclinazione del filo rispetto alla verticale nelle seguenti condizioni di moto per l'auto:
    - Ferma
    - Moto a velocità costante in rettilineo e in curva
    - Accelerazione in rettilineo
    - Decelerazione in rettilineo
  - Riportare i dati osservati; provare a metterli in relazione quantitativa con l'accelerazione dell'auto nelle diverse condizioni
- ***Palloncino riempito di elio in automobile***
  - Come sopra, con un palloncino legato al pavimento dell'auto

Cinematica

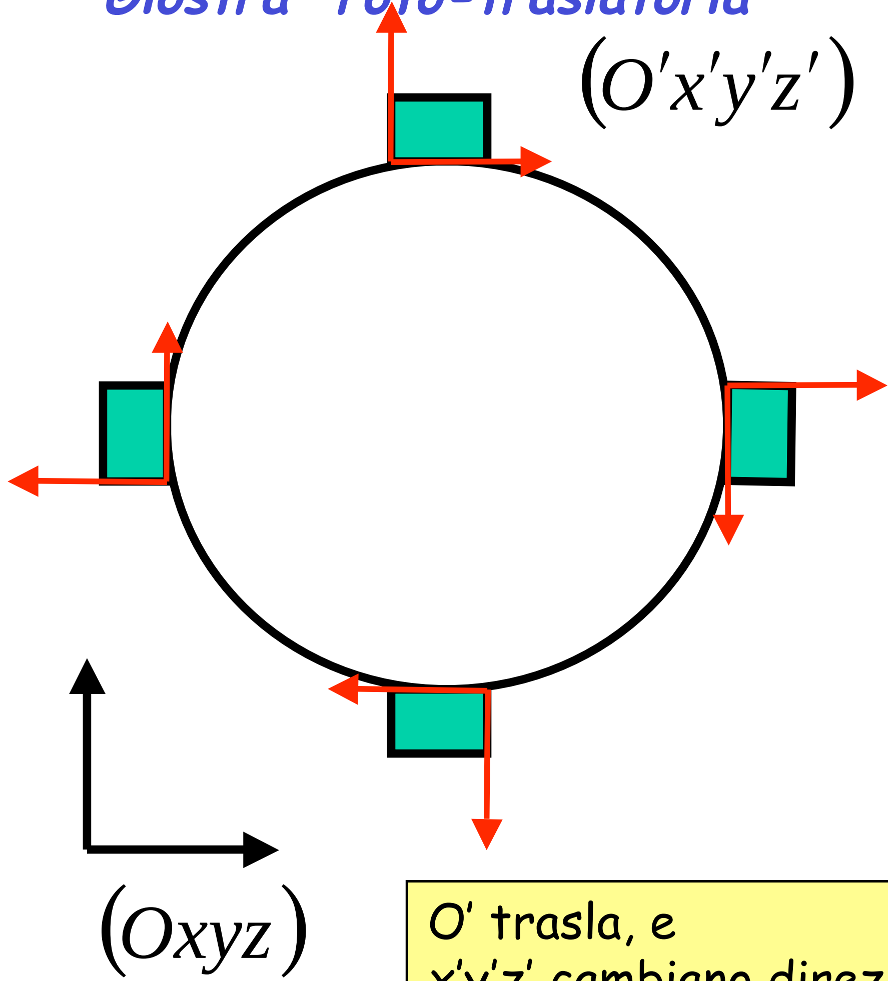
Moti "relativi" traslatori e rotatori

- *Giostra "traslatoria"*



O' trasla, ma
x'y'z' non cambiano direzione

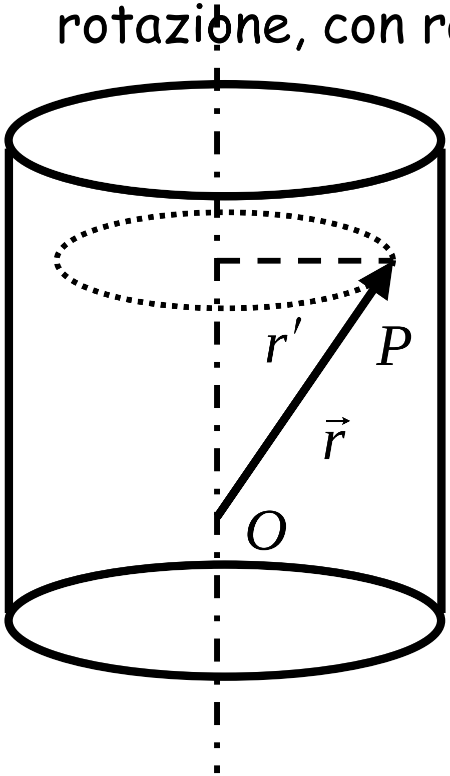
- *Giostra "roto-traslatoria"*



O' trasla, e
x'y'z' cambiano direzione

Per inciso:

- *velocità angolare come vettore*
  - Utilità: p.es. Corpi rigidi: un **unico** vettore permette di descrivere le **diverse** velocità (vettoriali) dei singoli punti P, ciascuno dei quali descrive una circonferenza in un piano perpendicolare all'asse di rotazione, con raggio r'



$$\vec{\omega} \quad (\text{modulo}: \omega = \frac{d\vartheta}{dt};$$

$$\text{direzione}: \text{asse di rotazione};$$

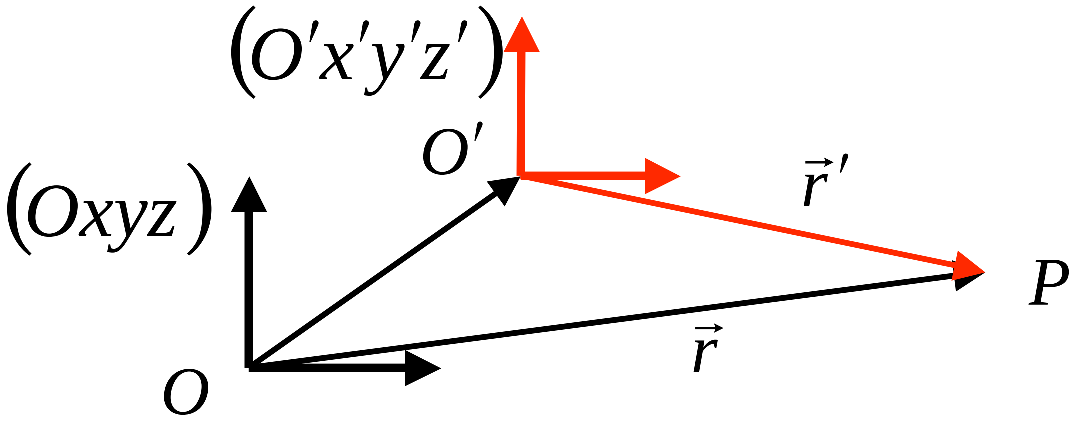
$$\text{verso}: \text{tale che...})$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times OP = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v_P = \omega\, r \sin\vartheta = \omega\, r'$$

Cinematica: moto relativo traslatorio

- Posizione di una particella secondo due osservatori in moto relativo traslatorio: ad ogni istante:



$$OP = OO' + O'P$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$

- Velocità v e v' della particella secondo i due osservatori: derivando rispetto al tempo (ipotesi: tempi uguali per Oxyz e O'x'y'z')

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,'_P} \Rightarrow \vec{v}\,'_P = \vec{v}_P - \vec{v}_{O'}$$

Cinematica: moto relativo traslatorio

Accelerazione della particella secondo i due osservatori:
derivando ancora una volta rispetto al tempo:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'_P}{dt} \quad \Rightarrow$$

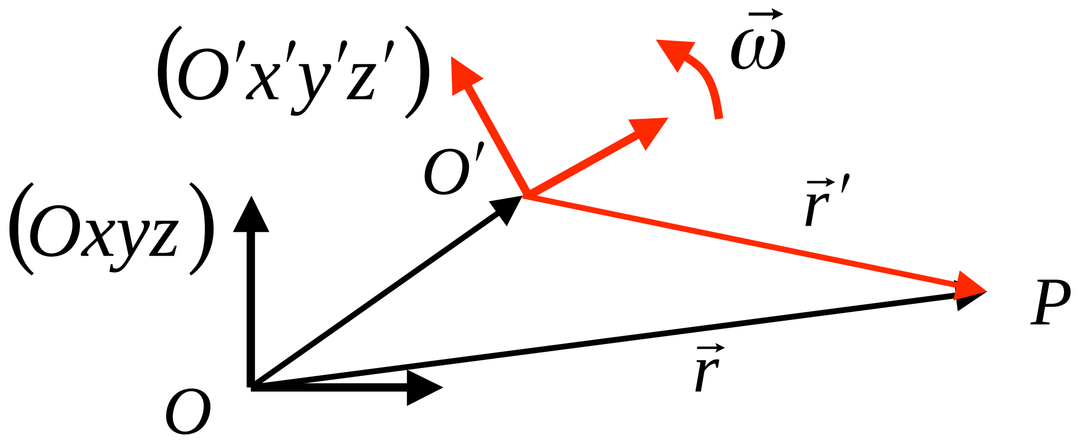
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_P = \vec{a}_P - \vec{a}_{O'}$$

NB: se il moto dell'osservatore O'x'y'z' è rettilineo uniforme rispetto a Oxyz, con velocità costante:

$$\vec{v}_{O'} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{O'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_P = \vec{a}_P$$

Cinematica: moto relativo roto-traslatorio

- ***Posizione di una particella secondo due osservatori in moto relativo roto-traslatorio***
  - Stesso punto di partenza, ma:
  - i versori degli assi O'x'y'z' hanno componenti variabili nel tempo
  - Le derivate danno risultati piu` complicati, che tengono conto della rotazione di O'x'y'z', con velocità angolare istantanea ω



$$OP = OO' + O'P$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$

Cinematica: moto relativo roto-traslatorio

- Velocità della particella secondo i due osservatori

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_P = \left(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times O'P\right) + \vec{v}\,'_P}$$

$$\vec{r}\,' = x'\hat{i}\,' + y'\hat{j}\,' + z'\hat{k}\,' \Rightarrow \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \ldots$$

- Accelerazione della particella secondo i due osservatori

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\left(\vec{\omega} \times O'P\right)}{dt} + \frac{d\vec{v}\,'_P}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_P = \left(\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times O'P\right) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'_P + \ldots\right) + \vec{a}\,'_P}$$

Dinamica: forze "inerziali"

Legge del moto per diversi osservatori

- *Osservatore Oxyz inerziale I*

$$\sum_i \vec{F}_i^{reali} = m\vec{a}$$

- *Osservatore O'x'y'z' inerziale II*

$$\vec{a}_{O'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_P = \vec{a}_P$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{reali} = m\vec{a} = m\vec{a}'$$

- *Osservatore O'x'y'z' non inerziale*
  - Se insiste a usare solo forze "reali", non riesce a scrivere la legge del moto per una particella con l'accelerazione a' ≠ a da lui osservata

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + (\ldots) \neq \vec{a}'_P$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{reali} = m\vec{a} \neq m\vec{a}' \quad ???$$

Forze "inerziali"

- ***Moto relativo degli osservatori solo traslatorio***

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F}^{\,reali} = m\vec{a}_P = m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}'_P$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}^{\,reali} + \left(-m\vec{a}_{O'}\right) = m\vec{a}'_P}$$

- ***Moto relativo degli osservatori traslatorio e rotatorio***

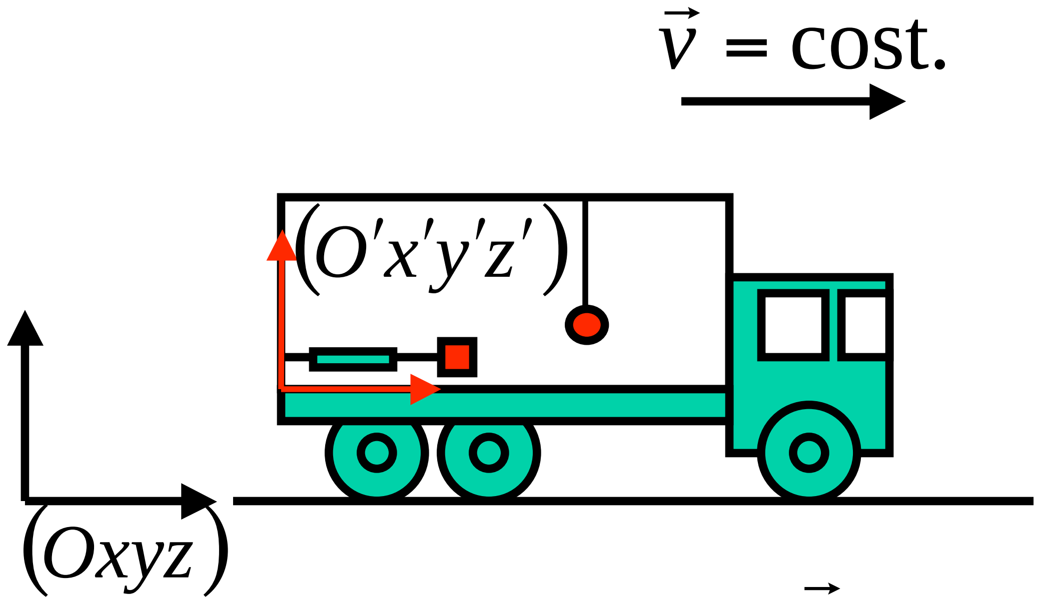
$$\vec{a}_P = \left(\vec{a}_{O'} + \ldots\right) + \vec{a}'_P \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F}^{\,reali} = m\vec{a}_P = m\left(\vec{a}_{O'} + \ldots\right) + m\vec{a}'_P$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}^{\,reali} + \left(-m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times O'P\right) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_P + \ldots\right) = m\vec{a}'_P}$$

"Trascinamento" "Centrifuga" "Coriolis"

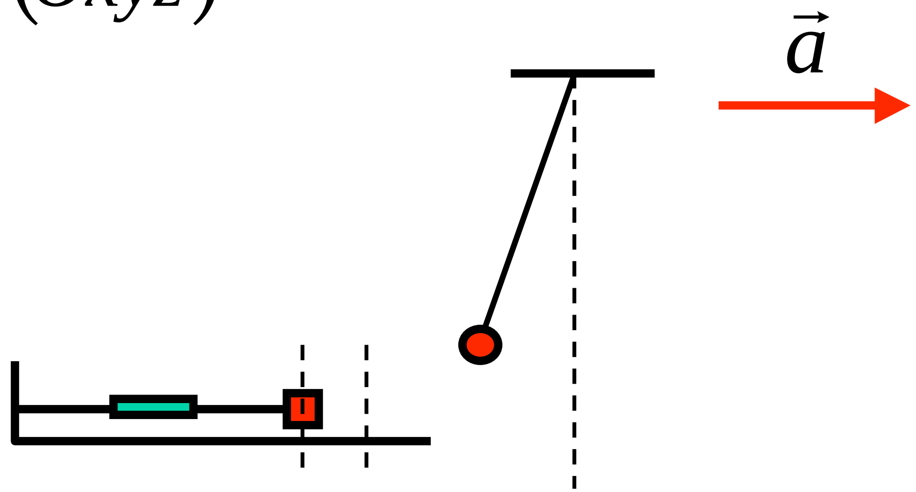
Esempi

Esempio 1: accelerometro - 1



Osservatori in moto relativo traslatorio accelerato: accelerometri

- Pendolo (filo a piombo)
- Massa collegata a dinamometro (molla)



- Riferimento accelerato con a>0:
  - La molla si accorcia
  - Il filo a piombo si sposta dalla verticale

Esempio 1: accelerometro - 2

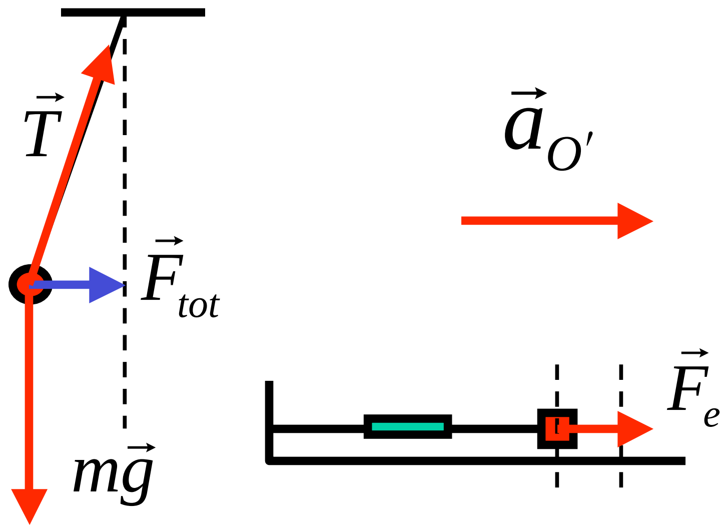
Per l'osservatore inerziale:

Filo a piombo

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} = m\vec{a}_{O'}$$

molla

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_e = -kx\hat{i} = m\vec{a} = m\vec{a}_{O'}$$



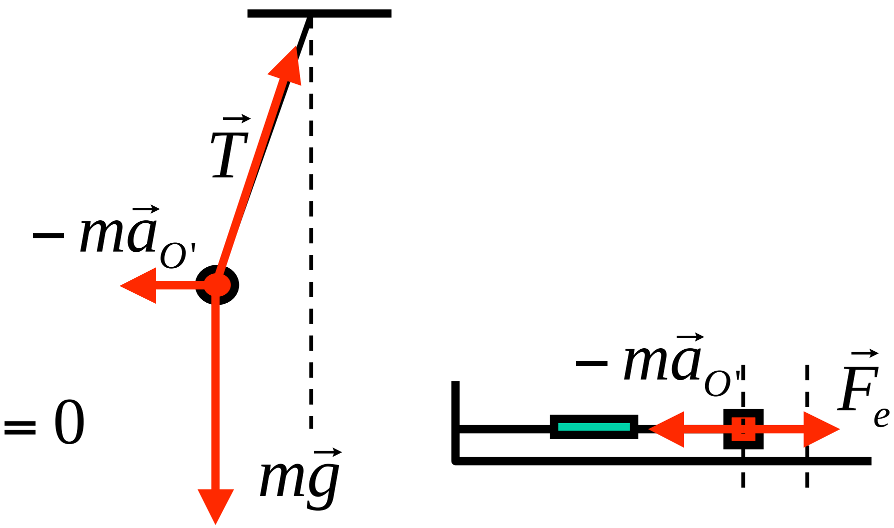
Per l'osservatore non inerziale:

Filo a piombo

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{g} + \vec{T} + \left(-m\vec{a}_{O'}\right) = 0$$

molla

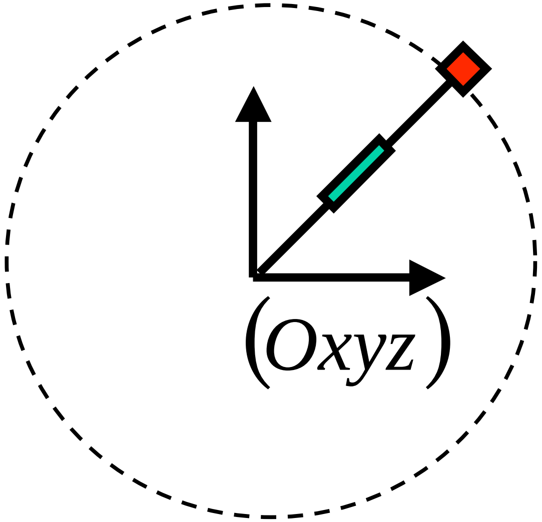
$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_e + \left(-m\vec{a}_{O'}\right) = -kx\hat{i} + \left(-m\vec{a}_{O'}\right) = 0$$



Esempio 2: moto circolare visto da due osservatori

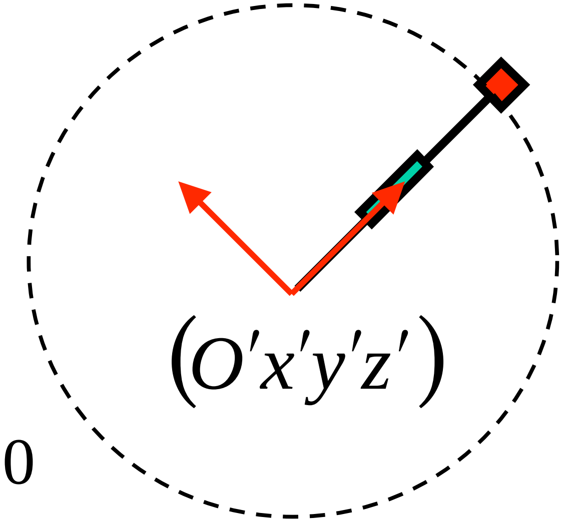
- ***Osservatore inerziale***
  - corpo in moto rotatorio: il dinamometro che lo trattiene fornisce la forza risultante centripeta (elastica) applicata al corpo

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{el} = m\vec{a}_c = m\omega^2 r(-\hat{r})$$



- ***Osservatore non inerziale rotante***
  - Se la velocità angolare è la stessa: il corpo è in quiete, con risultante delle forze applicate nulla (centripeta F_{el}, reale, + centrifuga F_{in}, inerziale)

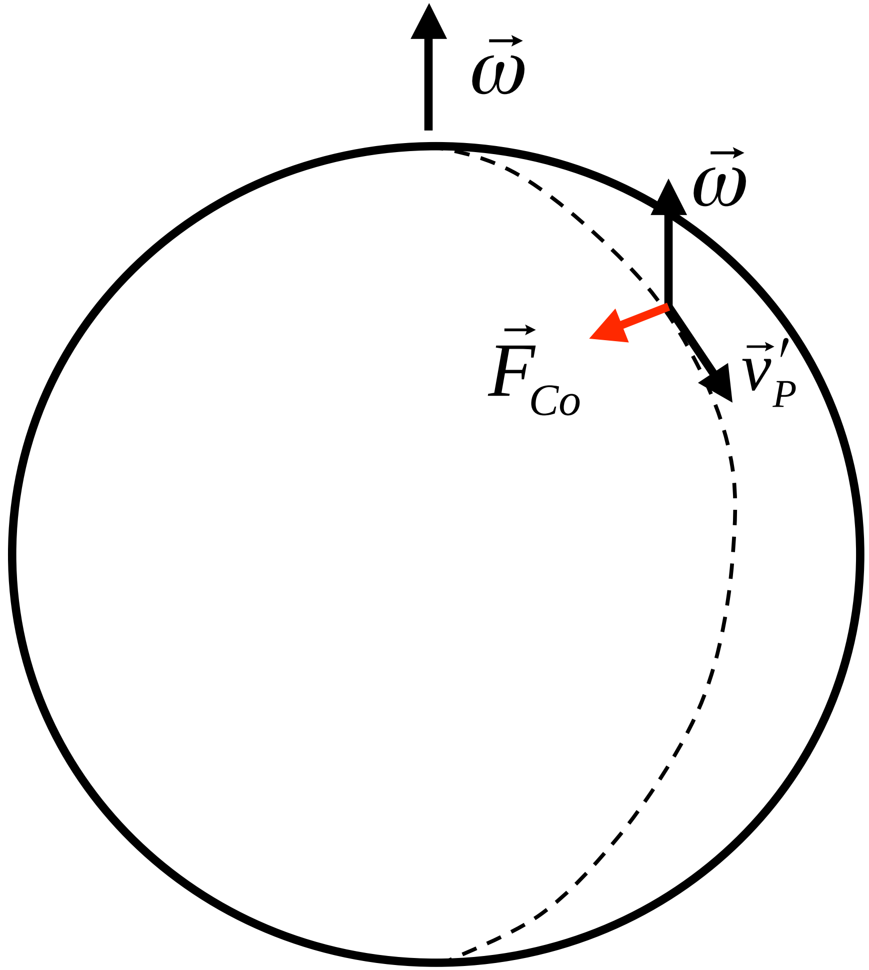
$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{el} + \left(-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times O'P\right)\right) = \vec{F}_{el} + m\omega^2 r\hat{r} = 0$$



Esempio 3 – forza di Coriolis

- *Se un oggetto si muove da N a S lungo un meridiano, con velocità v'_P rispetto alla terra che ruota con velocità angolare ω, esso risulta sottoposto alla forza inerziale di Coriolis, diretta da E a W:*

$$\vec{F}_{Co} = -m\left(2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P\right)$$



Conclusioni e prospettive

Riassumendo…

- *Dalle relazioni tra accelerazioni di una particella per osservatori in moto relativo*
- *All'introduzione delle forze "inerziali" nella legge del moto*
- *Ma non e` finita…*

...solo un punto di partenza

- *Relatività galileiana*
  - Osservatori in moto relativo rettilineo uniforme:
    - Tempi uguali
    - Leggi del moto uguali (con le stesse forze “reali” ed accelerazioni)
- *Relatività ristretta*
  - Osservatori in moto relativo rettilineo uniforme:
    - Velocità della luce: uguale per tutti ?!? Leggi dell’elettromagnetismo?
    - Crisi della simultaneità: tempi diversi! Cinematica modificata
    - Dinamica modificata ed equaz.Maxwell: leggi uguali per diversi osserv.
- *Relatività generale*
  - Osservatori in moto relativo arbitrario; forze “inerziali”...?
    - Gravità localmente simulabile per osservatore accelerato ???
    - Massa inerziale = massa gravitazionale (principio di equivalenza)
    - Teoria “geometrica” della gravitazione (spazio curvo etc...)