

Appunti per il precorso per il Corso di Studio in Chimica

Gabriele Balducci

settembre 2008

NOTA: Questi appunti sono ancora in fase di preparazione.

Indice

1	Quantita' unitarie, grandezze proporzionali etc.	1
1.1	Quantita' unitarie e il concetto di divisione	1
1.2	Grandezze direttamente proporzionali	4
1.3	A cosa servono le quantita' unitarie?	6
1.4	La percentuale	13
1.4.1	Come si calcola una percentuale	15
1.4.2	Calcoli con le percentuali	16
2	Logaritmi: cosa sono e come si usano	19
2.1	Cosa e' il logaritmo di un numero?	19
2.2	La funzione inversa del logaritmo	22
2.3	Proprieta' dei logaritmi	23
3	La notazione esponenziale e il suo uso	29
3.1	Trasformazione nella notazione esponenziale	30
3.1.1	Notazione esponenziale $\rightarrow$ notazione scientifica	33
3.1.2	Trasformazione inversa: da esponenziale a "normale"	33
3.2	L'uso della notazione esponenziale	34
3.2.1	Moltiplicazione	35
3.2.2	Divisione	35
3.2.3	Somma e sottrazione	36
3.2.4	Radice quadrata, cubica etc.	36
3.2.5	Logaritmi	37
4	Risolvere semplici equazioni	39
4.1	Cosa vuol dire "Porto di qua", "Porto di la' "?	40
4.1.1	L'idea fondamentale per la soluzione di un'equazione.	40
4.1.2	La rivisitazione del "porto di la' "	42
4.2	I principali trucchi del mestiere	43
4.2.1	Come sbarazzarsi di addendi	44
4.2.2	Come sbarazzarsi di fattori	44
4.2.3	Come sbarazzarsi di esponenti e radici	44
4.2.4	Come sbarazzarsi di logaritmi	45
4.2.5	Qualche esempio di riepilogo	46
4.3	Equazioni di secondo grado	48
4.4	Equazioni di grado superiore	49
4.4.1	Ordine di grandezza di x molto piccolo	49
4.4.2	Ordine di grandezza di x molto grande	51

4.4.3	Conclusione	52
4.5	Sistemi lineari	53
4.6	Come risolvere gli esercizi	54
4.6.1	Risolvete gli esercizi per via simbolica	54
4.6.1.1	I vantaggi del procedimento “simbolico”	57
4.6.2	Come utilizzare in modo efficiente la calcolatrice da tavolo	58
4.6.2.1	Il risultato ottenuto e' ragionevole?	61
4.6.3	Un esempio (un po') piu' complesso	62
5	Unita' di misura	65
5.1	Cosa significa effettuare una misura ?	65
5.2	Sistemi di unita' di misura	66
5.3	Prefissi: multipli e sottomultipli	67
6	Miscellanea	69

Introduzione e avvertenze

Questi sono gli appunti per il precorso del Corso di Studi in Chimica.

A cosa serve il precorso? In breve, a “riesumare”, in coloro che si sono iscritti al Corso di Studi in Chimica, una serie di nozioni e concetti che dovrebbero essere stati già appresi nel corso della formazione scolastica precedente (in un lungo periodo che va dalle scuole elementari alla scuola media superiore), ma che (lo dico per esperienza diretta) molto spesso sono stati dimenticati (e in alcuni casi, addirittura, mai fatti!).

Nei corsi che comincerete a seguire, queste nozioni e concetti si danno per scontati (perché non c'è tempo materiale per poterli trattare anche solo superficialmente): allora, se uno li ha ben presenti: OK; se però ci sono delle incertezze o lacune, subito ci si trova a dover rincorrere con più o meno affanno, e le energie che sarebbero altrimenti destinate allo studio delle materie nuove che incontrerete, devono essere per forza di cose “dirottate”, almeno in parte, a cercare di districarsi fra logaritmi, percentuali etc.

In questo precorso affronteremo alcuni di questi argomenti (come ad esempio la relazione di proporzionalità diretta, che costituisce un presupposto per lo studio della stechiometria) nel modo più immediato e diretto possibile.

Per questo motivo, in questi appunti non c'è alcun tentativo di rigore formale (mi sembrerebbe fuori luogo); inoltre, l'italiano è volutamente colloquiale, perché sono convinto che ciò sia di aiuto ad uno studente che si avvicina per la prima volta all'università, magari con un po' di timore reverenziale; ho presentato anche diversi esempi, cercando di dettagliare lo svolgimento fino a diventare noioso: sono convinto che ciò possa essere di utilità a chi ha più difficoltà. Chi si sente più sicuro o chi trova banali gli argomenti abbia pazienza.

Sinceramente non credo che in un precorso di poche ore come questo chi ha delle grosse lacune su uno o più degli argomenti trattati possa alla fine sentirsene padrone. Quindi non considerate questi appunti come il testo su cui studiare, ma piuttosto come una lista di controllo: se avete incertezze su qualcuno degli argomenti trattati, significa che dovete rivederelo (magari sul testo della scuola media superiore) prima di cominciare a studiare il programma dei corsi.

Tenete anche presente che tutti gli argomenti del precorso si trovano su molte pagine WEB in giro per il pianeta: basta usare un qualsiasi motore di ricerca e inserire le opportune parole chiave (ad esempio “relazione di proporzionalità diretta”).

Un'ultima avvertenza: questi appunti non sono ancora completi e saranno sicuramente zeppi di errori; vi sarò grato se me li segnalerete o se mi vorrete dare qualsiasi suggerimento vi sembri appropriato.

Capitolo 1

Quantita' unitarie, grandezze proporzionali etc.

1. Nel corso di Chimica Generale (ma non solo) sentirete spesso parlare di grandezze porporzionali e/o di grandezze definite come “qualcosa” **per unita'** di “qualcos'altro”.

2. Tanto per fare degli esempi che sicuramente tutti conoscete, la densita' e' definita come la massa **per unita' di volume**. La velocita' e' definita come lo spazio percorso **per unita' di tempo**. L'accelerazione e' definita come la variazione della velocita' **per unita' di tempo**. Diciamo anche che (a temperatura costante) massa e volume di una certa sostanza sono direttamente proporzionali; oppure che il perimetro e il lato di un poligono regolare sono direttamente proporzionali; oppure ancora che la differenza di potenziale da applicare ai capi di un conduttore e' direttamente proporzionale (sempre a temperatura costante) alla corrente che si vuole far circolare.

In questo capitolo cercheremo di capire bene il significato di quantita' unitaria e relazione di proporzionalita' diretta.

1.1 Quantita' unitarie e il concetto di divisione

3. Il concetto di quantita' unitaria e' direttamente legato a un concetto che tutti abbiamo imparato alle scuole elementari: la divisione.

Fare una divisione, cioe' dividere un dividendo per un divisore, significa **trovare quanto dividendo spetta a ciascuna unita' di divisore**.

Per quanto banale possa sembrare questo significato dell'operazione di divisione, la mia esperienza e' che molti studenti non l'hanno chiaro. D'altro canto, esso e' alla base di tantissimi concetti che incontrerete nei primi corsi (e non solo): per cui e' essenziale che non ci siano incertezze al riguardo.

4. Tutti sappiamo che se abbiamo 27 caramelle e 9 bimbi, la divisione:

$$\frac{27}{9}$$

ci dice quante caramelle spettano a ciascun bimbo. Il dividendo e' 27 (il numero di caramelle) e il divisore e' 9 (il numero di bimbi): il risultato della divisione ci dice quanto dividendo (quante caramelle) spetta a ciascuna unita' del divisore

(un singolo bimbo). Naturalmente il risultato della divisione e' in questo caso un numero intero: 3.

5. Definiamo “quantita' unitaria” il risultato della divisione di qualcosa per qualcos'altro. Quindi una quantita' unitaria e' un numero che ci dice quanto di quel qualcosa spetta a (corrisponde a) un'unita' di quel qualcos'altro.

Tornando all'esempio delle caramelle e dei bimbi: chiamiamo quantita' unitaria di caramelle (rispetto ai bimbi) il numero $27/9 = 3$. Questo numero e' il numero di caramelle che spetta a ciascun bimbo.

6. Ovviamente, non e' assolutamente detto che una quantita' unitaria debba essere sempre un numero intero come nell'esempio appena visto; anzi, nella maggior parte dei casi non lo e'. Se abbiamo 1 torta e 7 bimbi, la divisione:

$$\frac{1}{7}$$

ci dice quanta torta spetta a ciascun bimbo. La quantita' unitaria di torta e' in questo caso $1/7 = 0.142857\dots$, e questo non e' un numero intero.

Esempio 1 Se 1.27 kg di pomodori costano 0.65 €, il prezzo unitario, cioe' il prezzo di 1 kg di pomodori, e' dato dalla divisione:

$$\frac{0.65}{1.27} = 0.5118\dots$$

In generale, dividendo e divisore saranno numeri qualsiasi. La cosa importante e' che interpretiate una divisione come “quanto dividendo spetta ad una unita' di divisore”.

7. Se il dividendo e il divisore di una divisione sono quantita' di grandezze fisiche espresse con delle unita' di misura, la quantita' unitaria che si ottiene (cioe' il risultato della divisione) avra' anch'essa un'unita' di misura data, banalmente, dal rapporto delle unita' di misura usate per dividendo e divisore.

Nel caso del prezzo unitario appena visto, le sue unita' di misura saranno €/kg:

$$\frac{0.65 \text{ €}}{1.27 \text{ kg}} = 0.5118\dots \text{ €/kg}$$

Nel caso delle caramelle e dei bimbi, le unita' di misura della quantita' unitaria di caramelle saranno caramelle/bimbo:

$$\frac{27 \text{ caramelle}}{9 \text{ bimbi}} = 3 \text{ caramelle/bimbo}$$

e cosi' via.

8. Abbiamo visto che per ottenere una quantita' unitaria bisogna dividere due quantita': chiameremo queste due quantita' “quantita' corrispondenti”. Sebbene possa sembrare ovvio (e in effetti lo e'!), una quantita' unitaria si puo' ottenere solo dal rapporto fra due quantita' corrispondenti.

Chiariamo subito con un esempio. Se so che 1.27 kg di pomodori costano 0.65 €, allora posso dire che 1.27 kg di pomodori e 0.65 € sono due quantita'

corrispondenti, perché 1.27 kg di pomodori “corrispondono” a 0.65 €. Allora il prezzo unitario (cioè la quantità unitaria, ovvero quanti euro corrispondono a 1 kg di pomodori) si trova facendo la divisione:

$$\frac{0.65 \text{ €}}{1.27 \text{ kg}} = 0.5118 \dots \text{ €/kg}$$

Quello che voglio sottolineare qui è che per ottenere una quantità unitaria devo conoscere una **qualsiasi** coppia di valori **corrispondenti** delle due quantità da dividere.

Se sapessi che 2.31 kg di pomodori costano 1.18 €, potrei calcolare il prezzo unitario facendo il rapporto fra questi due valori corrispondenti.

Se però so che un mio amico ha acquistato 3.2 kg di pomodori in un negozio e che un altro mio amico ha acquistato pomodori nello stesso negozio spendendo 1.7 €, allora **non** posso calcolare il prezzo unitario dei pomodori facendo il rapporto: 1.7/3.2, perché queste due quantità non sono corrispondenti (non conosco il prezzo di 3.2 kg di pomodori, né quanti pomodori sono stati acquistati per 1.7 €). È tutto molto banale e ovvio, ma siate certi di aver compreso bene.

Per indicare che due quantità a e b sono corrispondenti, useremo spesso la notazione:

$$a : b$$

quindi, ad esempio, se 1.27 kg di pomodori costano 0.65 €, scriveremo:

$$1.27 \text{ kg} : 0.65 \text{ €}$$

9. Facciamo un'altra osservazione molto semplice. Se conosco una coppia di quantità corrispondenti, posso trovare **due** quantità unitarie: dividendo la prima quantità per la seconda, trovo la quantità unitaria della prima grandezza rispetto alla seconda; dividendo la seconda quantità per la prima, trovo la quantità unitaria della seconda grandezza rispetto alla prima.

Ad esempio, se so che 1.27 kg di pomodori costano 0.65 €, allora:

$$1.27 \text{ kg} : 0.65 \text{ €}$$

e quindi:

$$\frac{0.65 \text{ €}}{1.27 \text{ kg}} = 0.5118 \dots \text{ €/kg}$$

è il prezzo unitario, cioè la quantità unitaria di euro, cioè quanti euro corrispondono a 1 kg di pomodori; analogamente:

$$\frac{1.27 \text{ kg}}{0.65 \text{ €}} = 1.9538 \dots \text{ kg/€}$$

è la quantità unitaria di pomodori, cioè quanti pomodori corrispondono a 1 €, cioè quanti pomodori posso comprare con un euro.

10. Una banale conseguenza di quanto appena detto e' che se conosco il valore di una quantita' unitaria, il suo inverso mi da' la quantita' unitaria inversa.

Ad esempio, se so che il prezzo unitario dei pomodori e' 0.50 €/kg , l'inverso di questo valore:

$$\frac{1}{0.50 \text{ €/kg}} = 2 \text{ kg/€}$$

mi da' la quantita' unitaria di pomodori, cioe' quanti pomodori posso comprare con 1€ .

Quindi, conoscere una quantita' unitaria, vuol dire conoscere anche la quantita' unitaria inversa.

11. Un altro modo di vedere questa stessa cosa e' il seguente. Avere una quantita' unitaria, significa in pratica avere una coppia di quantita' corrispondenti di cui una vale 1. Ad esempio, se so che il prezzo unitario dei pomodori e' 0.50 €/kg , cio' equivale ad avere la seguente coppia di valori corrispondenti:

$$0.5 \text{ €} : 1 \text{ kg}$$

e quindi, come detto al punto 9, posso ottenere la quantita' unitaria di euro facendo:

$$\frac{0.5 \text{ €}}{1 \text{ kg}} = 0.5 \text{ €/kg}$$

ma posso anche ottenere la quantita' unitaria di pomodori (cioe' quanti pomodori posso comprare con un euro) facendo:

$$\frac{1 \text{ kg}}{0.5 \text{ €}} = 2 \text{ kg/€}$$

come avevamo gia' visto sopra.

1.2 Grandezze direttamente proporzionali

12. Tutti avete sentito parlare di grandezze direttamente proporzionali. La definizione che in genere si ha in mente e': "Due grandezze si dicono direttamente proporzionali se al raddoppiare di una anche l'altra raddoppia, o se quando una si dimezza anche l'altra si dimezza, e cosi' via".

Questa definizione e' senz'altro corretta, ma possiamo darne un'altra in termini della nozione di quantita' unitaria che abbiamo appena introdotto:

"Due grandezze si dicono direttamente porporzionali quando la quantita' unitaria di una rispetto all'altra (o viceversa) e' **indipendente** dalla particolare coppia di valori corrispondenti che si usa per determinarla."

Facciamo subito un esempio. Se pesate un cubo di ferro avente il volume di 2 cm^3 trovate che la sua massa e' di 15.748 g ; se fate la stessa cosa con un cubo di ferro avente un volume pari a 5.5 cm^3 misurerete una massa pari a 43.307 g (se la temperatura e' stata mantenuta costante). Avete ottenuto 2 coppie di valori corrispondenti di massa e volume:

$$\begin{aligned} 15.748\text{ g} & : 2\text{ cm}^3 \\ 43.307\text{ g} & : 5.5\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Potete quindi valutare, ad esempio, la massa unitaria nei due casi, cioe' la massa di ferro che corrisponde a 1 cm^3 di ferro (questa e' una grandezza fisica che ha un nome proprio: densita'):

$$\begin{aligned} \frac{15.748\text{ g}}{2\text{ cm}^3} & = 7.874\text{ g/cm}^3 \\ \frac{43.307\text{ g}}{5.5\text{ cm}^3} & = 7.874\text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Il risultato e' lo stesso nei due casi e sarebbe invariato per qualsiasi altra coppia di valori corrispondenti (a temperatura costante): si puo' quindi concludere che (a temperatura costante) massa e volume di un campione di ferro sono grandezze direttamente proporzionali.

13. Facciamo un controesempio. L'area di un cerchio di raggio 2 cm e' $\pi r^2 = 3.14159\ldots \times 2^2 = 12.56637\ldots\text{ cm}^2$. L'area di un cerchio di raggio 5 cm e' $\pi r^2 = 3.14159\ldots \times 5^2 = 78.5398\ldots\text{ cm}^2$.

Anche qui abbiamo due coppie di valori corrispondenti:

$$\begin{aligned} 12.56637\ldots\text{ cm}^2 & : 2\text{ cm} \\ 78.5398\ldots\text{ cm}^2 & : 5\text{ cm} \end{aligned}$$

Se calcoliamo l'area unitaria, ovvero l'area corrispondente a un cerchio di raggio 1 cm nei due casi, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{12.56637\ldots\text{ cm}^2}{2\text{ cm}} & = 6.2831\ldots\text{ cm}^2/\text{cm} \\ \frac{78.5398\ldots\text{ cm}^2}{5\text{ cm}} & = 15.7079\ldots\text{ cm}^2/\text{cm} \end{aligned}$$

cioe': in questo caso, la quantita' unitaria **dipende** dalla particolare coppia di valori corrispondenti che si usano per calcolarla e quindi area e raggio di un cerchio **non** sono grandezze proporzionali.

14. Il fatto che la definizione di grandezze proporzionali in termini di quantita' unitaria invariante rispetto alla particolare coppia di quantita' corrispondenti considerata sia del tutto equivalente a quella piu' "comune" basata sul raddoppio o dimezzamento dovrebbe esservi molto semplice da realizzare: se quando una delle due grandezze raddoppia anche l'altra fa lo stesso (e la stessa cosa succede quando una delle due grandezze si dimezza), segue banalmente che

il rapporto fra le due quantità corrispondenti rimane inalterato (e quindi la quantità unitaria non cambia):

$$\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}}$$

1.3 A cosa servono le quantità unitarie?

15. Diciamolo prima in termini astratti e facciamo poi un esempio.

Date due grandezze proporzionali A e B , se conosciamo la quantità unitaria a_o di A rispetto a B (cioè a_o è la quantità di A che corrisponde a 1 unità di B), allora possiamo subito calcolare la quantità a di A che corrisponde ad una generica quantità b della grandezza B :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{q.ta' } a \text{ di } A \text{ corrispon-} \\ \text{dente a } b \text{ unita' di} \\ B \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{q.ta' di } A \text{ corrispon-} \\ \text{dente a } 1 \text{ unita' di} \\ B \end{array}} \times \boxed{b \text{ unita' di } B}$$

$$a = a_o \times b \quad (1.1)$$

Esempio 2 Se il prezzo unitario dei pomodori è 0.50 €/kg, quanto costano 2.3 kg di pomodori?

Applicando quanto detto sopra:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{prezzo di 2.3 kg di pomodori}} &= \boxed{\text{prezzo di 1 kg di pomodori}} \times 2.3 \text{ kg} \\ &= 0.5 \text{ €/kg} \times 2.3 \text{ kg} \\ &= 1.15 \text{ €} \end{aligned}$$

Osservate che quanto detto vale solo se le grandezze considerate sono direttamente proporzionali (perché in questo caso la quantità unitaria della prima rispetto alla seconda o della seconda rispetto alla prima sono costanti).

Esempio 3 In un tuffo dalla piattaforma di 10 m la durata del volo è di circa 1.4 s. Il tuffatore parte con velocità iniziale nulla ed è soggetto all'accelerazione di gravità g , che si può assumere costante e pari a 9.8 m/s^2 . Qual'è la velocità del tuffatore al momento dell'entrata in acqua?

L'accelerazione è la variazione di velocità unitaria rispetto al tempo, cioè mi dice di quanto è variata la velocità nell'unità di tempo. Nel caso del tuffatore, l'accelerazione di gravità è costante e quindi (siccome la velocità iniziale è nulla) velocità e tempo sono direttamente proporzionali.

Possiamo quindi calcolare immediatamente la variazione (in questo caso si avrà un aumento) della velocità per la durata del volo:

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{array}{l} \text{aumento di velocità per} \\ 1.4 \text{ s} \end{array}} &= \boxed{\begin{array}{l} \text{aumento di velocità per} \\ 1 \text{ s (cioè: accelerazio-} \\ \text{ne)} \end{array}} \times 1.4 \text{ s} \\ &= 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1.4 \text{ s} \\ &= 13.72 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Questo e' l'aumento della velocita': siccome la velocita' iniziale e' nulla, questa e' anche la velocita' al momento dell'entrata. Corrisponde a circa 49 km/h.

16. Apro una piccola parentesi per criticare l'uso di quel procedimento mnemonico che credo a tutti sia stato insegnato prima o poi nel corso dei propri studi e che passa sotto il nome di "metodo delle proporzioni".

Sono certo che piu' di uno di voi avrebbe risolto il problema del costo dei pomodori con una proporzione:

$$\begin{aligned} 0.50 : 1 &= x : 2.3 \\ x &= \frac{0.5 \times 2.3}{1} \\ &= 1.15 \text{ €} \end{aligned}$$

Non c'e' nulla di sbagliato in cio' e il risultato e' ovviamente lo stesso, ma ritengo che il metodo spinga a non ragionare.

La mia esperienza e' la seguente: date ad uno studente 3 numeri, e lui ne fara' una proporzione. Il dramma e' che, se non ci sono valori nulli di mezzo, da una proporzione si ottiene **sempre** un risultato e quindi, se si e' fatta la proporzione senza aver capito bene quello che si sta facendo, si rischia di prendere dei granchi. Ho visto mettere in una proporzione di tutto, veramente.

Se usate i concetti esposti in questo capitolo invece delle proporzioni, siete **costretti** a ragionare e le probabilita' di sbagliare saranno ridotte di molto.

Chiusa parentesi.

17. A volte, invece della quantita' unitaria si conosce una coppia di valori corrispondenti: ovviamente non cambia nulla, nel senso che dalla coppia di valori corrispondenti si ricava la quantita' unitaria e si procede come gia' visto.

Esempio 4 Se un cubo di ferro di lato $l = 3.5 \text{ cm}$ ha una massa $m_1 = 337.59775 \text{ g}$, che massa avra' una sfera di ferro di raggio $r = 4.0 \text{ cm}$?

Abbiamo gia' detto (punto 12) che (a temperatura costante) massa e volume di una sostanza (in realta', in chimichese stretto, il ferro si definisce "elemento" e non sostanza, ma per adesso questo non ha importanza) sono grandezze direttamente proporzionali. Quindi possiamo applicare la 1.1 (punto 15):

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{massa di ferro corri-} \\ \text{spondente al volume di} \\ \text{una sfera di raggio } r = \\ 4.0 \text{ cm} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{massa di ferro corri-} \\ \text{spondente a un volume} \\ \text{unitario (1 cm}^3\text{)} \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{l} \text{volume di una sfera di} \\ \text{raggio } r = 4.0 \text{ cm} \end{array}}$$

La quantita' unitaria che ci serve (cioe' la massa di ferro corrispondente ad un volume unitario) si trova immediatamente a partire dalla coppia di valori corrispondenti data (naturalmente, dobbiamo preventivamente calcolare il volume di un cubo di ferro di lato $l = 3.5 \text{ cm}$, ma mi auguro che questo non

costituisca un problema). Se chiamiamo m_o la quantita' unitaria cercata e v_{cubo} il volume del cubo di ferro, allora si avra':

$$\begin{aligned} v_{cubo} &= l^3 \\ m_o &= \frac{m_1}{v_{cubo}} \\ &= \frac{m_1}{l^3} \end{aligned}$$

Se indichiamo con v_{sfera} il volume della sfera, allora:

$$v_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

e quindi, detta m_2 la massa cercata, si avra':

$$\begin{aligned} m_2 &= m_o v_{sfera} \\ &= \frac{m_1}{l^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{337.59775}{3.5^3} \times \frac{4}{3}\pi 4^3 \\ &= 2110.882181 \text{ g} \end{aligned}$$

18. Altre volte, si conosce una certa quantita' unitaria, ma per la soluzione di un problema servirebbe la quantita' unitaria inversa; questo non costituisce alcun ostacolo, perche' al punto 10 abbiamo visto che la quantita' unitaria inversa di una quantita' unitaria data e' semplicemente l'inverso della quantita' unitaria data.

Esempio 5 La densita' del ferro e' $\rho = 7.874 \text{ g/cm}^3$ a una certa temperatura. Qual'e' il volume di una massa di ferro $m = 345.2 \text{ g}$ alla stessa temperatura?

Abbiamo visto che la densita' e' definita proprio come la quantita' unitaria di massa rispetto al volume; cioe' la densita' e' la massa che corrisponde ad un'unita' di volume.

Per la soluzione di questo problema, tuttavia, servirebbe conoscere il volume unitario, cioe' quanto volume corrisponde ad un'unita' di massa di ferro:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{volume di ferro cor-} \\ \text{rispondente alla massa} \\ m = 345.2 \text{ g di ferro} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{volume di ferro corri-} \\ \text{spendente a } 1 \text{ g di} \\ \text{ferro} \end{array}} \times 345.2 \text{ g}$$

Conoscere la densita' equivale a conoscere una coppia di valori corrispondenti (punto 11):

$$7.874 \text{ g} : 1 \text{ g}$$

e quindi il volume unitario che ci interessa (chiamiamolo v_o) si ricava immediatamente:

$$v_o = \frac{1}{\rho}$$

cioè, come dicevamo, l'inverso della quantità unitaria data (la densità).

In definitiva, detto v il volume cercato, si avrà:

$$\begin{aligned} v &= v_o \times m \\ &= \frac{1}{\rho} \times m \\ &= \frac{1}{7.874} \times 345.2 \\ &= 43.8 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Esempio 6 Vediamo ora un esempio molto vicino a ciò che conoscerete col nome di “stechiometria”. La stechiometria si occupa delle relazioni fra le quantità di sostanze che partecipano (nel senso che vengono consumate o prodotte) ad una reazione chimica. Avrete modo di vedere a fondo queste cose.

Quello che vorrei farvi osservare adesso è che i concetti che stanno alla base della stechiometria non sono certo peculiari della chimica.

Consideriamo la “reazione” di preparazione di panini al salame.

La situazione è la seguente.

Un panino al salame è costituito da 2 fette di pane e 5 fette di salame. Possiamo indicare un panino con il simbolo seguente:



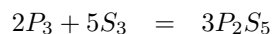
dove P sta per “pane” e S sta per “salame”. Il 2 al piede della P indica che in un panino, P_2S_5 , ci sono 2 fette di pane; analogamente il 5 al piede della S indica che in un panino ci sono 5 fette di salame.

Supponiamo inoltre che le fette di pane e le fette di salame siano in confezioni da 3: cioè una confezione di fette di pane contiene 3 fette di pane e una confezione di fette di salame contiene 3 fette di salame.

Allora, indichiamo con P_3 una confezione contenente 3 fette di pane e con S_3 una confezione contenente 3 fette di salame.

Se consideriamo le confezioni di fette di pane e di salame, allora utilizzando 2 confezioni (cioè 6 fette) di pane e 5 confezioni (cioè 15 fette) di salame possiamo confezionare esattamente 3 panini.

Cio può essere espresso con la seguente “equazione”:



L'equazione dice che combinando 2 confezioni di fette di pane ($2P_3$) con 5 confezioni di fette di salame ($5S_3$) si ottengono 3 panini ($3P_2S_5$). Detto in altri termini, l'equazione stabilisce i rapporti quantitativi che legano i 3 partecipanti alla “reazione”: confezioni di fette di pane, confezioni di fette di salame e panini.

In chimica questi rapporti di combinazione vengono detti rapporti stechiometrici e le corrispondenti quantità vengono dette quantità stechiometriche. I numeri che esprimono le quantità dei vari partecipanti alla “reazione” vengono detti coefficienti stechiometrici (nell’equazione su scritta il coefficiente stechiometrico delle confezioni di fette di pane è 2, quello delle confezioni delle fette di salame è 5 e quello dei panini è 3).

Un’osservazione molto importante da fare è che le quantità stechiometriche di tutti i partecipanti ad una reazione sono fra loro direttamente proporzionali, e questo fa sì che possiamo applicare anche in questo caso tutti i concetti visti in questo capitolo.

Il fatto che le quantità stechiometriche siano direttamente proporzionali è banale da realizzare. Considerate la reazione su scritta: se 2 confezioni di fette di pane (cioè 6 fette) si “combinano” con 5 confezioni di fette di salame (cioè 15 fette) per formare 3 panini, è chiaro che $2 \times 2 = 4$ confezioni di fette di pane (un totale di 12 fette) dovranno combinarsi con $2 \times 5 = 10$ confezioni di fette di salame (un totale di 30 fette) per produrre $2 \times 3 = 6$ panini, e così via. Quindi se le confezioni di fette di pane raddoppiano, triplicano etc., lo stesso fanno le confezioni di fette di salame e i corrispondenti panini prodotti: quindi ritroviamo la definizione usuale di proporzionalità diretta.

Alla luce di quanto detto, consideriamo il seguente problema. Abbiamo 128 confezioni di fette di pane e 324 confezioni di fette di salame: quanti panini potremo confezionare? Ci avvanzerà qualcosa? Se sì, che cosa avvanzerà: pane o salame? Quanto ne avvanzerà?

Per aiutarci a fissare le idee, possiamo costruire la seguente tabella:

	$2P_3$	$+5S_3$	$=$	$3P_2S_5$
<i>i</i>	128	324		0
<i>f</i>	?	?		?

Le due righe della tabella contrassegnate con *i* ed *f* stanno ad indicare, rispettivamente, “inizio” e “fine”; cioè: all’inizio abbiamo 128 confezioni di fette di pane, 324 confezioni di fette di salame e nessun panino; vogliamo sapere quanti panini avremo alla fine e quanto ci sarà avanzato di confezioni di fette di pane o di salame.

Nell’analizzare il problema, bisogna fare un po’ di attenzione. Le quantità stechiometriche sono quelle “prescritte” dall’equazione che descrive il processo di preparazione dei panini; le quantità date dal problema non sono (in generale) quantità stechiometriche: esse sono quantità qualsiasi di confezioni di fette di pane e confezioni di fette di salame. In altre parole, non è assolutamente detto che le 128 confezioni di fette di pane e le 324 confezioni di fette di salame stiano nel rapporto richiesto per combinarsi “esattamente” a formare panini. Anzi, questo lo possiamo verificare molto semplicemente.

La quantità unitaria di confezioni di fette di salame rispetto alle confezioni di fette di pane richiesta dalla stechiometria della reazione (cioè quante confezioni di fette di salame corrispondono ad 1 confezione di fette di pane) si ricava come abbiamo già visto in altri casi:

$$2 \boxed{\text{conf. di fette di pane}} : 5 \boxed{\text{conf. di fette di salame}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{q.ta' di conf. di fette di} \\ \text{salame corrispondente a} \\ \text{1 conf. di fette di pane} \end{array}} = \frac{5}{2}$$

Siccome le quantità stechiometriche di confezioni di fette di pane e di salame sono direttamente proporzionali, se le quantità date dal problema fossero stechiometriche, allora la quantità unitaria di confezioni di fette di salame rispetto alle confezioni di fette di pane calcolata su di esse dovrebbe essere sempre uguale a $5/2$ (punto 12). Proviamo a calcolare il rapporto fra i numeri di confezioni di fette di salame e fette di pane dati dal problema:

$$\frac{324}{128} = 2.53 \dots$$

Il rapporto **non** è uguale a $5/2 = 2.5$. Quindi, prima di tutto, possiamo dire che le quantità date dal problema non sono stechiometriche (o, come si usa anche dire in chimichese, non sono in rapporto stechiometrico).

Inoltre, possiamo osservare che $2.53 \dots > 2.5$. Che cosa significa? Una cosa molto semplice ed importante: siccome il rapporto fra le confezioni di fette di salame e le confezioni di fette di pane date ($2.53 \dots$) è **maggiore** del valore stechiometrico (2.5), possiamo concludere che le confezioni di fette di salame sono **in eccesso** rispetto a quelle di pane, per quanto riguarda la stechiometria della reazione. Detto in altri termini, se cominciamo a confezionare panini, a un certo punto le confezioni di fette di pane finiranno mentre ci avvanzeranno delle confezioni di fette di salame. E così' abbiamo risposto a due delle domande: ci avvanzerà qualcosa? Sì. Che cosa? Avvanzerà del salame (mentre il pane verrà tutto consumato).

Possiamo così' iniziare a riempire la seconda riga della nostra tabella:

$$\begin{array}{rcccl} & 2P_3 & +5S_3 & = & 3P_2S_5 \\ i & 128 & 324 & & 0 \\ f & 0 & ? & & ? \end{array}$$

Alla luce di quanto abbiamo appena appurato, possiamo subito rispondere alla prima domanda: quanti panini riusciremo a confezionare? Siccome sappiamo che **tutte** le confezioni di fette di pane verranno utilizzate, possiamo basarci su di esse per calcolare il numero di panini che riusciremo a fare.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di panini che si} \\ \text{puo' fare con 128 conf.} \\ \text{di fette di pane} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di panini che si} \\ \text{puo' fare con 1 conf. di} \\ \text{fette di pane} \end{array}} \times 128$$

La quantità unitaria che ci serve (cioè quanti panini si possono fare con 1 confezione di fette di pane) si ricava dall'equazione, esattamente come abbiamo già fatto prima:

$$\begin{array}{l} 2 \boxed{\text{confezioni di fette di pane}} : 3 \boxed{\text{panini}} \\ \boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di panini che si} \\ \text{puo' fare con 1 confe-} \\ \text{zione di fette di pane} \end{array}} = \frac{3}{2} \end{array}$$

Quindi i panini che riusciremo a confezionare sono:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di panini che si} \\ \text{puo' fare con 128 conf.} \\ \text{di fette di pane} \end{array}} = \frac{3}{2} \times 128$$

$$= 192$$

e la tabella viene aggiornata:

$$\begin{array}{rcccl} & 2P_3 & +5S_3 & = & 3P_2S_5 \\ i & 128 & 324 & & 0 \\ f & 0 & ? & & 192 \end{array}$$

Resta un'ultima domanda: quante confezioni di fette di salame avanzeranno? Possiamo ottenere la risposta in vari modi.

Per esempio, basandoci sulle confezioni di fette di pane, che sappiamo consumarsi tutte. Allora: le confezioni di fette di salame avanzate saranno quelle iniziali **meno** quelle consumate. E quante saranno le confezioni di fette di salame consumate? Tante quante quelle richieste per "reagire" con 128 confezioni di fette di pane. Queste ultime si trovano nel modo (ormai) consueto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fette} \\ \text{di salame consumate da} \\ \text{128 conf. di fette di} \\ \text{pane} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fette di} \\ \text{salame corrispondente a} \\ \text{1 conf. di fette di pane} \end{array}} \times 128$$

$$= \frac{5}{2} \times 128$$

$$= 320$$

(la quantita' unitaria di fette di salame rispetto alle fette di pane l'avevamo trovata prima)

Quindi le confezioni di fette di salame **avanzate** saranno:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fette di} \\ \text{salame avanzate} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fette di} \\ \text{salame iniziali} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fette di} \\ \text{salame consumate} \end{array}}$$

$$= 324 - 320$$

$$= 4$$

In modo del tutto equivalente, per trovare le confezioni di fette di salame consumate avremmo potuto basarci sui panini, visto che gia' sappiamo quanti ne potremo confezionare:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fet-} \\ \text{te di salame consumate} \\ \text{per formare 192 panini} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fette} \\ \text{di salame per formare 1} \\ \text{panino} \end{array}} \times 192$$

Per la quantita' unitaria di confezioni di fette di salame rispetto ai panini ci si basa sui coefficienti stechiometrici dell'equazione:

$$\begin{array}{lcl}
 5 \boxed{\text{conf. di fette di salame}} & : & 3 \boxed{\text{panini}} \\
 \boxed{\begin{array}{l} \text{q.ta' di conf. di fette di} \\ \text{salame corrispondente a} \\ \text{1 panino} \end{array}} & = & \frac{5}{3}
 \end{array}$$

Quindi:

$$\begin{array}{lcl}
 \boxed{\begin{array}{l} \text{n.ro di conf. di fet-} \\ \text{te di salame consumate} \\ \text{per formare 192 panini} \end{array}} & = & \frac{5}{3} \times 192 \\
 & = & 320
 \end{array}$$

Per quanto banale possa sembrarvi, osservate che siamo arrivati esattamente allo stesso risultato per le confezioni di fette di salame consumate basandoci sulle confezioni di fette di pane consumate o sui panini formati.

Abbiamo così risposto a tutte le domande e possiamo completare la tabella:

$$\begin{array}{rcccl}
 & 2P_3 & +5S_3 & = & 3P_2S_5 \\
 i & 128 & 324 & & 0 \\
 f & 0 & 4 & & 192
 \end{array}$$

Avrete modo di incontrare molto spesso tabelle di questo tipo.

1.4 La percentuale

19. Un concetto molto semplice direttamente legato a quello di quantita' unitaria e che incontrerete spessissimo (e che avete di sicuro già incontrato mille volte nella vita di tutti i giorni) e' quello di percentuale.

Generalmente sentite frasi come queste: "La percentuale di persone anziane a Trieste e' molto piu' elevata che in altre citta' italiane", oppure "Le tasse sono aumentate del 5%", oppure ancora "Il bronzo e' una lega rame-stagno in cui la percentuale di stagno e' 8-9%" o "L'errore percentuale e' del 2%", e così via.

Secondo la mia esperienza, uno dei problemi che gli studenti hanno con la percentuale e' la sua definizione; una conseguenza di cio' e' che spesso non ricavano immediatamente una idea chiara dal modo in cui un dato di percentuale viene fornito in un certo contesto. Questo fatto sara' meglio chiarito fra un momento.

20. Definiamo prima che cosa e' la percentuale.

Date due grandezze A e B, la percentuale di A rispetto a B e' definita come la quantita' di A che corrisponde a 100 unita' di B.

21. La prima osservazione è che una percentuale presuppone sempre due grandezze: tornando alle difficoltà degli studenti, spesso il modo usuale di dare una percentuale nel linguaggio corrente sottintende una o l'altra delle due grandezze coinvolte e questo genera confusione.

Torniamo agli esempi fatti sopra.

“La percentuale di persone anziane a Trieste è molto più elevata che in altre città italiane”

La grandezza A è il numero di persone anziane, la grandezza B (sottintesa) è il numero di persone qualsiasi, cioè anziane e non. La percentuale data significa: quante persone anziane ci sono per 100 persone qualsiasi a Trieste

“Le tasse sono aumentate del 5%”

La grandezza A è l'aumento delle tasse, cioè la differenza fra tassa nuova e tassa vecchia, la grandezza B è la tassa vecchia. La percentuale significa: l'aumento di tasse corrispondente a 100 unità (in questo caso sarebbero 100 €) di tassa vecchia. Fate attenzione: se la tassa vecchia era 235 € e la tassa nuova è 247 €, l'aumento della tassa (cioè la grandezza A) sarà: $247 - 235 = 12$ €.

“Il bronzo è una lega rame-stagno in cui la percentuale di stagno è 8 – 9%”

La grandezza A è la massa di stagno (un elemento chimico, ma in questo contesto non ha alcuna importanza), la grandezza B (sottintesa) è la massa totale di bronzo. La percentuale significa: quanti grammi (o chilogrammi o qualsiasi altra unità di misura della massa) di stagno corrispondono a 100 unità di massa (misurate con le stesse unità di misura, ovviamente) di bronzo; detta in un modo equivalente: qual'è la massa di stagno contenuta in 100 unità di massa di bronzo.

“L’errore percentuale e’ del 2%”

La grandezza A e’ l’errore, cioe’ la differenza fra un dato valore (per esempio frutto di una misura sperimentale) e il valore teorico di una certa grandezza, la grandezza B (sottintesa) e’ il valore teorico. Ad esempio, potremmo determinare “sperimentalmente” il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro misurando queste due quantita’ direttamente su un foglio di carta: supponiamo che il risultato sia 3.16 (il risultato non ha unita’ di misura perche’ e’ il rapporto di due lunghezze). Il valore teorico e’ $\pi = 3.14159\dots$: allora l’errore sara’: $3.16 - \pi = 0.0184\dots$. La percentuale significa: quanto errore corrisponderebbe ad un valore teorico pari a 100.

1.4.1 Come si calcola una percentuale

22. Sulla base della definizione data al punto 20, avendo due valori delle due grandezze A e B , e’ banale trovare la percentuale di A rispetto a B : basta applicare quanto visto per le quantita’ unitarie, e in particolare quanto visto al punto 15, eq. 1.1:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{q.ta' di } A \text{ corrisponden-} \\ \text{te a 100 unita' di } B, \\ \text{ovvero percentuale di } A \\ \text{rispetto a } B \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{q.ta' di } A \text{ corrispon-} \\ \text{dente a 1 unita' di } \\ B \end{array}} \times 100$$

Naturalmente, la quantita’ di A corrispondente ad una unita’ di B (che talvolta viene chiamata la “frazione” di A rispetto a B) si trova dividendo una qualsiasi quantita’ di A per la **corrispondente** quantita’ di B . Cioe’, se indichiamo con a e b una coppia di valori corrispondenti di A e B , si avra’:

$$\boxed{\% \text{ di } A \text{ rispetto a } B} = \frac{a}{b} \times 100 \quad (1.2)$$

Notate come il concetto di quantita’ unitaria e quello di percentuale siano estremamente simili: l’unica differenza e’ che una quantita’ unitaria si riferisce ad 1 unita’ di B , mentre la percentuale prende come riferimento 100 unita’ di B . Detta in un altro modo: quantita’ unitaria e percentuale differiscono per un fattore 100: la percentuale si ottiene dalla quantita’ unitaria moltiplicando per 100 (eq. 1.2); la quantita’ unitaria si ottiene dalla percentuale dividendo per 100.

Esempio 7 Trieste ha circa 250000 abitanti, di cui circa 65000 di età superiore a 65 anni. Qual'è la percentuale di anziani a Trieste?

Si tratta di trovare quanti anziani corrispondono a 100 abitanti qualsiasi (cioè di qualsiasi età). Abbiamo due valori corrispondenti:

$$250000 \text{ abitanti qualsiasi} : 65000 \text{ anziani}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \boxed{\% \text{ di anziani}} &= \boxed{\text{numero di anziani per 1}} \times 100 \\ &= \frac{65000}{250000} \times 100 \\ &= 26.0\% \end{aligned}$$

Esempio 8 Misurando su un foglio di carta il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro si ottiene il valore 3.16. Assumendo per π un valore esatto di 3.14, determinare l'errore percentuale della misura.

Dobbiamo valutare quanto errore corrisponde ad un valore teorico pari a 100. L'errore (assoluto, cioè non percentuale) Δ è:

$$\begin{aligned} \Delta &= 3.16 - 3.14 \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

Quindi, la coppia di valori corrispondenti è:

$$0.02 : 3.14$$

e l'errore percentuale sarà:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{errore } \%} &= \frac{0.02}{3.14} \times 100 \\ &= 0.617 \dots \% \end{aligned}$$

1.4.2 Calcoli con le percentuali

23. In perfetta analogia con quanto detto al punto 11, avere una percentuale significa avere una coppia di valori corrispondenti di cui uno vale 100. Se la percentuale di una grandezza A rispetto ad una grandezza B è ad esempio 35%, allora ciò equivale ad avere la seguente coppia di valori corrispondenti:

$$35 \text{ unità di } A : 100 \text{ unità di } B$$

e quindi:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{unita' di } A \text{ corrispon-} \\ \text{denti ad 1 unita' di} \\ B \end{array}} = \frac{35}{100}$$

e:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{unita' di } B \text{ corrispon-} \\ \text{denti ad 1 unita' di} \\ A \end{array}} = \frac{100}{35}$$

Piu' in generale, indicata con $\%_A$ la percentuale di A rispetto a B :

$$\%_A \text{ unita' di } A : 100 \text{ unita' di } B$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{unita' di } A \text{ corrispon-} \\ \text{denti ad 1 unita' di} \\ B \end{array}} = \frac{\%_A}{100}$$

e:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{unita' di } B \text{ corrispon-} \\ \text{denti ad 1 unita' di} \\ A \end{array}} = \frac{100}{\%_A}$$

Tenendo presente questo, tutti i problemi che riguardano l'uso delle percentuali si possono risolvere con i concetti che abbiamo gia' esposto per le quantita' unitarie.

24. In molti casi si conosce la percentuale di una grandezza A rispetto ad una grandezza B e si vuole conoscere la quantita' di A corrispondente ad una quantita' di B data.

Esempio 9 *Una pizza ha una massa media di 300 g e contiene il 6.5% di grassi. Quanti grassi assumiamo mangiando una pizza?*

Prima di tutto chiariamo bene quali sono le due grandezze coinvolte nella percentuale: dal contesto dovrebbe essere chiaro che la percentuale e' da intendersi come massa di grassi corrispondente a 100 unita' di massa di pizza; cioe', in parole povere, 100 g di pizza contengono 6.5 g di grassi.

Quindi:

$$6.5 \text{ g di grassi} : 100 \text{ g di pizza}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{array}{l} \text{massa di grassi corri-} \\ \text{spondente a 300 g di} \\ \text{pizza} \end{array}} &= \boxed{\begin{array}{l} \text{massa di grassi cor-} \\ \text{rispondente a 1 g di} \\ \text{pizza} \end{array}} \times 300 \\ &= \frac{6.5}{100} \times 300 \\ &= 19.5 \text{ g} \end{aligned}$$

25. In altri casi si conosce la percentuale di una grandezza A rispetto ad una grandezza B e si vuole conoscere la quantita' di B a cui corrisponde una quantita' di A data.

Esempio 10 *Il bronzo e' una lega rame-stagno in cui la percentuale di stagno e' 8%. Quale deve essere la massa di un campione di bronzo affinche' esso contenga 23 g di stagno?*

Sentirete parlare delle leghe nel corso di Chimica Generale: per il momento potete pensare al bronzo come ad una miscela di due componenti: il rame e lo stagno.

Anche in questo caso la percentuale va intesa come massa di stagno corrispondente a 100 unita' di massa della lega (cioe' la miscela rame-stagno).

Allora:

$$8 \text{ g di stagno} : 100 \text{ g di bronzo}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{massa di bronzo corri-}} &= \boxed{\text{massa di bronzo cor-}} \times 23 \\ \boxed{\text{spondente a 23 g di}} &= \boxed{\text{rispondente a 1 g di}} \\ \boxed{\text{stagno}} &= \frac{100}{8} \times 23 \\ &= 287.5 \text{ g} \end{aligned}$$

Capitolo 2

Logaritmi: cosa sono e come si usano

2.1 Cosa e' il logaritmo di un numero?

26.

Studente: "...e quindi la concentrazione e' 0.1 mol/L "

Esaminatore: "Ottimo. E quindi il logaritmo della concentrazione e'...?"

Studente: "..."

Esaminatore: "Coraggio: il logaritmo di $0.1...$ "

Studente: "..."

Silenzio imbarazzato.

Ho assistito a scenette come questa molte volte e mi sono fatto l'idea che il motivo principale per cui molti studenti restano interdetti di fronte ad un logaritmo e' che i logaritmi vengono fatti (e neanche sempre) ad un certo punto delle scuole medie superiori, ma poi di essi non si sente piu' parlare, ne' tanto meno vengono fatti esercizi in cui i logaritmi si usino in modo, per cosi' dire, "pratico". Ne segue che gli studenti arrivano all'universita' con l'idea che il logaritmo sia un'inutile quanto misteriosa funzione matematica priva di qualsiasi aggancio con la realta'.

27. Naturalmente non e' cosi': vedrete e userete logaritmi in tutte le salse e praticamente in tutti i corsi che seguirete. Per questo e' importante che riprendiate i concetti che vi sono stati insegnati alle scuole medie superiori (speriamo) e li rimettiate bene a fuoco una volta per tutte.

Come vedrete, anche in questo caso sono cose estremamente semplici.

28. Diamo subito la definizione di logaritmo. Innanzitutto quando si parla di logaritmo bisogna specificarne la cosiddetta "base". Infatti:

Il logaritmo in una certa base (positiva) di un dato numero e' l'**esponente** a cui bisogna elevare la base per ottenere quel dato numero

Questa e' una definizione a parole. In termini leggermente piu' matematici la definizione suona cosi':

Il logaritmo in base a ($a > 0$) di un numero (reale) x si scrive: $\log_a x$
ed e' un numero (reale) α tale che: $a^\alpha = x$

29. Cerchiamo di capire bene la definizione. Se voglio sapere qual'e' il logaritmo di un numero, prima di tutto devo chiarire in quale base e' il logaritmo: in generale, la base di un logaritmo puo' essere qualsiasi (purche' > 0), ma i logaritmi che vedrete voi saranno quasi sempre di due tipi: o logaritmi in base 10, oppure logaritmi in base e (definiamo il numero e fra un attimo). La notazione "standard" per questi due tipi di logaritmi e':

$$\begin{array}{ll} \text{logaritmo in base 10:} & \log_{10} \\ \text{logaritmo in base } e: & \log_e \end{array}$$

Questi due logaritmi sono talmente usati in ambito scientifico che hanno una loro notazione specifica: il logaritmo in base 10 (detto anche logaritmo "decimale") viene indicato con il semplice simbolo di logaritmo, cioe' si omette l'indicazione della base; il logaritmo in base e viene anche detto logaritmo "naturale" o "Neperiano" (da John Neper (o Napier), che lo definì per primo nel 1600) e per questo viene quasi invariabilmente indicato con il simbolo "ln", anche qui senza indicazione della base. Quindi, i simboli che vedrete voi saranno:

$$\begin{array}{ll} \text{logaritmo in base 10:} & \log \\ \text{logaritmo in base } e: & \ln \end{array}$$

30. Apriamo una piccola parentesi per dire chi e' " e ", la base dei logaritmi naturali. " e " e' un numero irrazionale, il cui valore e':

$$e = 2.7182818284590 \dots (\text{infinite cifre decimali})$$

Per quanto "bislacco" possa sembrarvi, il numero e compare come ingrediente fondamentale in tantissime leggi della fisica e della chimica ed e' quindi un numero molto "naturale". Se ci pensate un attimo, anche $\pi = 3.14159265358979 \dots$ non e' un numero *tondo*, eppure lo avete incontrato e usato talmente tante volte, che il suo valore non vi turba minimamente. " e " e' esattamente come π : un numero. Solo che lo avete incontrato molto meno frequentemente di π e quindi non ci siete abituati: vi ci abituerete.¹

Chiusa parentesi.

31. Torniamo alla definizione di logaritmo. Una volta chiarita la base del logaritmo di cui si sta parlando, la definizione "pratica" del logaritmo di un numero

¹ Tanto per curiosita', il numero e puo' essere definito matematicamente in almeno due modi:

$$\begin{aligned} \text{primo modo: } e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \text{secondo modo: } e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

($n!$ si legge " n fattoriale" e significa $n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Ad esempio: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Inoltre, per definizione: $0! = 1$.)

si riduce a porsi la seguente domanda: dato un numero x , a che esponente devo elevare la base del logaritmo per ottenere x ?

Trovato l'esponente $\Rightarrow$ trovato il logaritmo del numero x (in quella base).

Vediamo subito alcuni esempi.

Esempio 11 *Quant'è il logaritmo in base 10 di 1000?*

Si tratta di trovare $\log 1000$ (la notazione standard sarebbe: $\log_{10} 1000$, ma abbiamo detto (punto 29) che per questo particolare tipo di logaritmo si omette l'indicazione della base).

Allora poniamoci la domanda del punto 31: la base è 10; allora: a che esponente devo elevare 10 per ottenere 1000? Tutti dovrete sapere che $10^3 = 1000$, quindi l'esponente cercato è 3, e quindi possiamo dire che il logaritmo in base 10 di 1000 è 3:

$$(\log_{10} 1000 \equiv) \log 1000 = 3$$

Esempio 12 *Quant'è il logaritmo in base 10 di 0.01?*

Si tratta di trovare $\log 0.01$.

Gia' vedo che alcuni si spaventano: "Ma se devo fare una potenza, come posso ottenere un numero così piccolo?". Calma: esistono le potenze con esponente negativo e tutti sapete (chi non lo sa, aspetti il capitolo 3) che $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Quindi una potenza negativa è 1 diviso qualcosa, e se quel qualcosa è un numero grande, ecco che il risultato diventa un numero piccolo. Detto questo, non dovrebbe essere difficile rendervi conto che $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$. Morale: l'esponente che andiamo cercando è -2 e quindi possiamo concludere che:

$$\log 0.01 = -2$$

Osservazione: allora i logaritmi possono essere anche negativi! Sì, è proprio così'. (Attenzione: il logaritmo di un numero può essere anche negativo, ma la base del logaritmo è sempre positiva per definizione)

Esempio 13 *Quant'è il logaritmo in base 2 di 16?*

La base 2 non è una base che incontrerete frequentemente (per quanto sia invece una base di logaritmi molto usati in altri ambiti scientifici, come la scienza dei computer), tuttavia la definizione rimane sempre quella.

Mi pongo la domanda: a che esponente devo elevare il numero 2 per ottenere 16? Anche qui, mi auguro che tutti sappiate che $2^4 = 16$. Quindi l'esponente cercato è 4, che perciò è anche il valore del logaritmo in questione:

$$\log_2 16 = 4$$

Esempio 14 *Quant'è il logaritmo in base e di 12?*

Solita domanda: a che esponente devo elevare e per ottenere 12? Spero che tutti sappiate che $e^{2.484906649788\ldots} = 12$, e quindi il logaritmo cercato è $2.484906649788\ldots$:

$$(\log_e 12 \equiv) \ln 12 = 2.484906649788\ldots$$

Scherzetto: non siete certo tenuti a sapere che $e^{2.484906649788\cdots} = 12$. Per fare questo logaritmo si usa la calcolatrice, ovviamente. Ma la cosa importante e' che abbiate chiaro in testa cosa e' il logaritmo di un numero, anche quando i numeri in questione non sono "tondi".

32. Facciamo una piccola osservazione. Per definizione, la base di un logaritmo deve essere **sempre** positiva. Questo significa che **non** si puo' fare il logaritmo di un numero negativo (o nullo), perche' elevando ad un qualsiasi esponente un numero positivo (la base del logaritmo, appunto) si ottiene sempre un numero positivo.

Quindi, ad esempio, $\log(-100)$ o $\log(0)$ **non esiste**.

Corollario: se per risolvere un esercizio dovete fare il logaritmo di qualcosa e quel qualcosa vi e' venuto negativo o nullo, allora potete essere certi di aver commesso un errore "piu' a monte".

2.2 La funzione inversa del logaritmo, ovvero: come si trova il numero il cui logaritmo e' dato.

33. Abbiamo visto cosa e' il logaritmo di un numero e come lo si puo' trovare (a mano, nei casi piu' semplici, oppure, piu' spesso, con una calcolatrice).

Molto spesso, tuttavia, vi capitera' di dover fare l'inverso: cioe' dovete risalire a un certo numero conoscendo il suo logaritmo (in una certa base).

Ad esempio: so che il logaritmo in base 10 di un certo numero x e' 3.45: quanto vale x ?

La risposta a questa domanda e' molto semplice e ricorda un po' l'indovinello per bambini: "Di che colore era il cavallo bianco di Napoleone?"

Infatti, se riguardate la definizione di logaritmo (punto 28) dovrebbe esservi chiaro che se chiamiamo α il logaritmo in base a di x , cioe':

$$\alpha = \log_a x$$

questo significa semplicemente, **per definizione**, che:

$$a^\alpha = x$$

e questa e' la risposta cercata: cioe', dato il logaritmo di un numero, il numero stesso si ottiene elevando la base del logaritmo al logaritmo dato.

34. Detto in termini piu' matematici suona cosi':

$$\log_a x = \alpha \Leftrightarrow x = a^\alpha$$

Alcuni esempi chiariranno immediatamente quanto appena detto.

Esempio 15 Qual'e' il numero il cui logaritmo in base 10 e' 4?

Se chiamiamo x il numero cercato, allora, per definizione di logaritmo, possiamo dire che:

$$10^4 = x$$

cioe': $x = 10000$

Esempio 16 Qual'è il numero il cui logaritmo in base 2 è -3 ?

Per definizione di logaritmo, possiamo dire che:

$$2^{-3} = x$$

cioe': $x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$

Esempio 17 Qual'è il numero il cui logaritmo naturale è 5.6 ?

Per definizione di logaritmo, possiamo dire che:

$$e^{5.6} = x$$

cioe': $x = (2.71828182845905 \dots)^{5.6} = 270.426407426152 \dots$
(naturalmente in questo caso abbiamo bisogno di una calcolatrice)

2.3 Proprietà dei logaritmi

Alla luce di quanto abbiamo fin qui detto, possiamo vedere alcune proprietà dei logaritmi che vi capiterà di incontrare e usare molto frequentemente.

Tanto per fissare le idee, quando cioè non generi confusione, considereremo sempre i logaritmi decimali, ma tenete presente che queste proprietà valgono per logaritmi in qualsiasi base.

1. Il logaritmo di 1 in qualsiasi base è 0, perché la potenza nulla di qualsiasi base vale 1.

In simboli:

$$a^0 = 1 \quad \forall a \quad \Rightarrow \quad \log_a 1 = 0 \quad \forall a$$

2. Il logaritmo in base a di una potenza di a è uguale all'esponente della potenza di a , cioè:

$$\log_a a^m = m$$

Questa è di nuovo una storia del tipo “Di che colore era il cavallo bianco di Napoleone” (eppure mi è capitato più volte di vedere uno studente annaspare quando chiedo quant'è il logaritmo decimale di 10^{-5}).

Provate a porvi la domanda che ci si deve porre per trovare il logaritmo di un numero (punto 31): “a che esponente devo elevare a per ottenere a^m ?”. La risposta è ovviamente m (esattamente come la risposta alla domanda “Di che colore era il cavallo bianco di Napoleone” è “bianco”!).

3. Elevando la base di un logaritmo al logaritmo in quella stessa base di un numero qualsiasi si ottiene come risultato il numero qualsiasi.

In simboli:

$$a^{\log_a x} = x$$

In realta' questa e' la definizione di logaritmo: la cito solo perche' siate sicuri di aver capito bene.

Guardate il primo membro dell'equazione: eleviamo a a un qualche cosa. Questo qualche cosa e' il logaritmo in base a di un numero x . Ma per definizione di logaritmo (punto 28), il logaritmo in base a di x e' l'esponente a cui si deve elevare a per ottenere x : quindi al primo membro eleviamo a all'esponente a cui si deve elevare a per ottenere x ; vi dovrebbe essere chiaro come il sole che il risultato di questa operazione e' proprio x . Sarebbe come dire: se sommo a 9 il numero che serve sommare a 9 per ottenere 23 ottengo 23. E' veramente "Di che colore era il cavallo bianco di Napoleone"!

4. Il logaritmo di un prodotto e' uguale alla somma dei logaritmi dei fattori, cioe':

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

La dimostrazione e' semplice. Chiamiamo α il logaritmo di a e β quello di b . Per definizione di logaritmo, dovra' essere:

$$\begin{aligned} 10^\alpha &= a \\ 10^\beta &= b \end{aligned}$$

Ora possiamo moltiplicare membro a membro le due equazioni appena scritte e ottenere:

$$10^\alpha \times 10^\beta = a \times b$$

Al primo membro c'e' il prodotto di due potenze con la stessa base: questo e' uguale alla base elevata alla somma degli esponenti (capitolo 3, eq. 3.3); quindi:

$$10^{(\alpha+\beta)} = ab$$

Ma, per definizione di logaritmo, questo vuol dire che $(\alpha + \beta)$ e' il logaritmo di ab (perche' e' l'esponente a cui devo elevare la base per ottenere ab , punto 28).

Quindi:

$$\log ab = \alpha + \beta$$

Ma poco piu' sopra avevamo definito α e β proprio come i logaritmi di a e b , rispettivamente. In definitiva:

$$\log ab = \log a + \log b$$

che e' la tesi.

5. Il logaritmo di una frazione e' uguale al logaritmo del numeratore meno quello del denominatore:

$$\log \left(\frac{a}{b} \right) = \log a - \log b$$

La dimostrazione e' analoga a quella vista per il logaritmo di un prodotto: provate a farla voi per esercizio.

6. Il logaritmo di una frazione e' uguale al logaritmo cambiato di segno della frazione inversa:

$$\log \frac{a}{b} = -\log \frac{b}{a}$$

Questa proprieta' deriva direttamente e banalmente da quella precedente:

$$\begin{aligned} \log \frac{a}{b} &= \log a - \log b \\ &= -(\log b - \log a) \\ &= -\left(\log \frac{b}{a} \right) \\ &= -\log \frac{b}{a} \end{aligned}$$

7. Il logaritmo di una potenza e' uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base (della potenza, non del logaritmo). Spesso in matematica le parole creano confusione: in simboli la cosa e' molto piu' chiara:

$$\log_a b^m = m \times \log_a b$$

Attenti a non fare confusione: in questo caso ci sono in ballo 2 basi; la base del logaritmo, che ho chiamato a , e la base della potenza su cui il logaritmo agisce, che ho chiamato genericamente b . La base a cui si

riferisce questa proprieta' e' quella della potenza, cioe' b , come sta scritto sopra. Questa proprieta' vale per qualsiasi base del logaritmo e qualsiasi base della potenza: cioe' non e' richiesta nessuna relazione fra a e b .

La dimostrazione di questa proprieta' e' di nuovo molto semplice.

Chiamiamo α il logaritmo in base a di b^m :

$$\alpha = \log_a b^m$$

Per definizione (punto 28), questo vuol dire che:

$$a^\alpha = b^m$$

Ora eleviamo ambo i membri dell'equazione appena scritta alla $\frac{1}{m}$:

$$(a^\alpha)^{\frac{1}{m}} = (b^m)^{\frac{1}{m}}$$

Per proprieta' delle potenze (capitolo 3, eq. 3.5) le potenze doppie ai due membri diventano:

$$a^{\frac{\alpha}{m}} = b$$

Ma quanto appena scritto equivale a dire che $\frac{\alpha}{m}$ e' il logaritmo in base a di b (perche' $\frac{\alpha}{m}$ e' l'esponente a cui devo elevare a per ottenere b). Quindi:

$$\log_a b = \frac{\alpha}{m}$$

ovvero:

$$\alpha = m \log_a b$$

Ma α era il $\log_a b^m$ (guardate piu' sopra). Morale:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

8. Regola del cambiamento di base. Spesso si conosce il logaritmo di un numero in una data base (ad esempio e) e si vuole trovare il logaritmo dello stesso numero, ma in una base diversa (ad esempio 10). La cosa e' molto semplice e si basa sulla seguente proprieta':

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Quindi, se si conosce il logaritmo in base b del numero x e se ne vuole conoscere il logaritmo nella base a , basta fare il rapporto fra il logaritmo di x nella base b e il logaritmo di a (che e' la nuova base in cui si vuole trovare il logaritmo di x), sempre nella base b .

Vediamo subito un esempio. La calcolatrici da tavolo forniscono generalmente la funzione logaritmica nelle due basi piu' comuni: e e 10. Come possiamo trovare $\log_7(100)$?

Applicando la regola del cambiamento di base con $a = 7$, $x = 100$ e $b = 10$, si ha:

$$\log_7 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 7}$$

I due logaritmi decimali al secondo membro si possono eseguire facilmente con la calcolatrice; il risultato e': $2.3665 \dots$

Anche la dimostrazione di questa proprieta' e' molto semplice.

Per definizione (punto 28) vale la seguente uguaglianza:

$$a^{(\log_a x)} = x$$

Prendiamo il logaritmo in base b di ambo i membri:

$$\log_b \left(a^{(\log_a x)} \right) = \log_b x$$

Per la regola della potenza (punto 7):

$$\log_a x \log_b a = \log_b x$$

Infine, resta da dividere ambo i membri per $\log_b a$:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Capitolo 3

La notazione esponenziale e il suo uso

35. Nell'arco del vostro corso di studi userete e vedrete usare la cosiddetta “notazione esponenziale” per indicare i numeri.

Tanto per chiarire, la notazione esponenziale e' quella che rappresenta i numeri utilizzando le potenze di 10: tutti sapete che il numero 1000 si puo' anche scrivere come 10^3 : bene, 10^3 e' la notazione esponenziale usata per indicare il numero 1000.

36. La forma generale di un numero in formato esponenziale e' la seguente:

$$m \times 10^e$$

dove m viene detta “mantissa” ed e' la parte del numero non espressa come potenza di 10 ed e e' l'esponente di 10, che puo' essere sia positivo che negativo.

Tanto per fare subito un esempio banale, spero che tutti non abbiate problemi a riconoscere che il numero 12.5 si puo' scrivere anche come 1.25×10^1 : in questo caso la mantissa e' 1.25 e l'esponente di 10 e' 1.

Analogamente, 0.034 si puo' scrivere in notazione esponenziale come 3.4×10^{-2} : mantissa: 3.4, esponente di 10 (in questo caso negativo): -2 . E cosi' via.

37. In realta', quella che useremo qui viene talvolta detta “notazione scientifica”: la sua differenza rispetto alla notazione esponenziale e' che nella mantissa c'e' **sempre e solo** una cifra non nulla a sinistra del punto decimale.

Quindi, la notazione scientifica e' una versione piu' “ristretta” della notazione esponenziale.

Tanto per chiarire:

notazione esponenziale	notazione scientifica
32.5×10^3	3.25×10^4
0.056×10^{-1}	5.6×10^{-3}

Nel seguito useremo il termine generico di “notazione esponenziale” per indicare, in realta', la notazione scientifica, che e' un termine meno usato.

38. Perche' la notazione esponenziale e' cosi' tanto usata in ambito scientifico? Essenzialmente i motivi sono due:

1. consente di scrivere con meno sforzo manuale e meno spreco di inchiostro o gesso numeri molto grandi o molto piccoli. Ad esempio:

$$0.0000000001 \quad \text{diventa} \quad 10^{-10}$$

2. rende molto piu' facile eseguire dei calcoli a mente, senza carta e matita (ne' tanto meno calcolatrice)

39. L'uso della notazione esponenziale in questo corso di studi e' essenziale: cercate di impararla ed usarla con la massima disinvoltura; non e' assolutamente difficile e dopo un po' di esercizio (se gia' non ne siete padroni) la userete senza neppure farci caso. Pero' imparatela!

3.1 Come si trasforma un numero "normale" nella notazione esponenziale

40. E' molto semplice. Per capire come funziona il procedimento, servono due o tre presupposti banali che esponiamo subito di seguito

41. Primo presupposto. Immagino che tutti sappiate moltiplicare o dividere un numero qualsiasi per una qualsiasi potenza di 10: $10^1 = 10$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1000$ e cosi' via.

- Il risultato della **moltiplicazione** di un numero reale qualsiasi per 10^e si ottiene immediatamente spostando il punto decimale **verso destra** di e posti. Se in questo procedimento si esauriscono tutte le cifre decimali del numero, si continua aggiungendo degli zeri. Ecco alcuni esempi:

$$\begin{aligned} 1.2345 \times 10^3 &= 1234.5 \\ 123.45 \times 10^3 &= 123450 \\ 0.001234 \times 10^4 &= 12.34 \end{aligned}$$

e cosi' via.

- In modo analogo, il risultato della **divisione** di un numero reale qualsiasi per 10^e si ottiene immediatamente spostando il punto decimale **verso sinistra** di e posti. Se in questo procedimento si esauriscono tutte le cifre del numero, si continua aggiungendo degli zeri. Ecco alcuni esempi:

$$\begin{aligned} \frac{123.456}{10^2} &= 1.23456 \\ \frac{123.456}{10^5} &= 0.00123456 \\ \frac{0.0123}{10^5} &= 0.000000123 \end{aligned}$$

e cosi' via.

Una banale conseguenza di queste due “regole” è che se si vuole spostare il punto decimale di un numero a destra di e posti, basta moltiplicare per 10^e , mentre se si vuole spostare il punto decimale di un numero a sinistra di e posti, basta dividere per 10^e .

42. Secondo presupposto. Dovreste sapere tutti che:

$$\frac{1}{10^e} = 10^{-e}$$

cioè: l'inverso di una potenza di 10 (ma ovviamente questo vale in generale per qualsiasi potenza) è la potenza di 10 con lo stesso esponente, ma cambiato di segno.

43. Terzo presupposto. Tutti dovete sapere che se un numero qualsiasi viene moltiplicato e diviso per uno stesso numero, esso rimane inalterato. Cioè:

$$\frac{a \times x}{x} = (a \times x) \times \frac{1}{x} = \frac{a}{x} \times x = a$$

44. Basandoci su quanto detto, è facile trasformare qualsiasi numero in formato esponenziale.

Vediamo prima degli esempi concreti e poi diamo la regola generale.

Esempio 18 *Trasformare il numero 1234.5678 in formato esponenziale (scientifico).*

Il numero dato presenta 4 cifre prima del punto decimale; siccome vogliamo che la mantissa abbia una sola cifra non nulla prima del punto decimale, dobbiamo spostare il punto decimale di 3 posti verso sinistra. Più sopra abbiamo visto che questo si ottiene dividendo il numero per 10^3 :

$$\frac{1234.5678}{10^3} = 1.2345678$$

In tal modo abbiamo raggiunto lo scopo di avere una sola cifra non nulla a sinistra del punto decimale, ma il numero così ottenuto non è ovviamente uguale a quello da cui eravamo partiti!

Se vogliamo che il numero non cambi, allora, per “annullare” l'effetto della divisione per 10^3 , basta moltiplicare per 10^3 (punto 43), ottenendo così il numero dato nella forma esponenziale:

$$\begin{aligned} 1234.5678 &= \frac{1234.5678}{10^3} \times 10^3 \\ &= 1.2345678 \times 10^3 \end{aligned}$$

Esempio 19 *Trasformare il numero 0.0001234 in formato esponenziale (scientifico).*

Il numero dato ha uno zero a sinistra del punto decimale, mentre la notazione scientifica richiede che a sinistra del punto decimale ci sia una sola cifra non nulla. Per metterci in questa situazione, dobbiamo spostare il punto decimale verso destra di 4 posti. Più sopra abbiamo visto che questo si ottiene moltiplicando il numero per 10^4 :

$$0.0001234 \times 10^4 = 1.234$$

*A questo punto dovrete essere in grado di andare avanti da soli: e' chiaro che **il numero cosi' ottenuto non e' uguale a quello da cui eravamo partiti**; tuttavia, memori dell'esempio precedente, possiamo "annullare" l'effetto della moltiplicazione per 10^4 con una divisione per la stessa potenza di 10:*

$$\begin{aligned} 0.0001234 &= (0.0001234 \times 10^4) \times \frac{1}{10^4} \\ &= 1.234 \times \frac{1}{10^4} \\ &= 1.234 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

E' tutto veramente molto semplice!

45. Da quanto detto finora possiamo infine "distillare" una regola automatica per il passaggio alla notazione esponenziale. Dato un numero "qualsiasi" n , si possono presentare 3 casi:

1. $n \geq 10$

Questo e' il caso dell'esempio 18. Allora basta spostare verso sinistra il punto decimale dei posti che servono e moltiplicare per 10 elevato all'esponente uguale al numero di posti di cui si e' spostato il punto decimale:

$$456.543 \Rightarrow 4.56543 \times 10^2$$

2. $1 \leq n < 10$

In questo caso la mantissa e' gia' a posto: il numero resta cosi' com'e' (si potrebbe moltiplicare per $10^0 = 1$, ma generalmente questo non si fa).

$$4.567 \Rightarrow 4.567$$

3. $n < 1$

Questo e' il caso dell'esempio 19. Allora basta spostare verso destra il punto decimale dei posti che servono e moltiplicare per 10 elevato all'esponente uguale al numero di posti di cui si e' spostato il punto decimale, ma questa volta col segno negativo:

$$0.0005678 \Rightarrow 5.678 \times 10^{-4}$$

3.1.1 Trasformazione dalla notazione esponenziale alla notazione scientifica

46. Se avete seguito quanto detto nella sezione precedente, allora non avrete nessuna difficoltà a trasformare un numero dal formato esponenziale al formato scientifico (punto 37).

Tanto per riprendere l'argomento, il numero 35.4×10^{-4} è in formato esponenziale, ma non è in formato scientifico, perché ha 2 cifre non nulle a sinistra del punto decimale.

Come si trasforma questo numero in formato scientifico? Molto semplice: trasformiamo la mantissa in formato scientifico con le regole date al punto 45:

$$35.4 \Rightarrow 3.54 \times 10^1$$

Allora il numero di partenza è diventato: $3.54 \times 10^1 \times 10^{-4}$. Ora, applicando una semplice proprietà delle potenze (che verrà citata fra un attimo, al punto 3.3, ma che dovrete conoscere molto bene), possiamo moltiplicare fra loro le due potenze di 10 e ottenere 3.54×10^{-3} come risultato finale.

L'applicazione di questo procedimento a qualsiasi altro caso non dovrebbe presentare alcuna difficoltà, così come la trasformazione inversa, cioè il passaggio dal formato scientifico a un qualsiasi formato esponenziale (ad esempio: $4.5 \times 10^3 \rightarrow 45 \times 10^2 \rightarrow 0.0045 \times 10^6 \rightarrow \dots$).

3.1.2 Trasformazione inversa: da esponenziale a “normale”

47. Alla luce di quanto detto finora non dovrete avere difficoltà neppure a trasformare un numero dal formato esponenziale a quello “normale”. Ciò può tornare utile in certe circostanze. In pratica abbiamo già visto come fare al punto 41.

- Se l'esponente della potenza di 10 della parte esponenziale del numero è positivo, allora si sposta il punto decimale a **destra** di un numero di posti pari all'esponente, eventualmente aggiungendo degli zeri se le cifre della mantissa si esauriscono:

$$\begin{aligned} 3.4567 \times 10^3 &= 3456.7 \\ 3.45 \times 10^5 &= 345000 \end{aligned}$$

- Se l'esponente della potenza di 10 della parte esponenziale del numero è negativo, allora si sposta il punto decimale a **sinistra** di un numero di posti pari all'esponente, eventualmente aggiungendo degli zeri se le cifre della mantissa si esauriscono:

$$\begin{aligned} 345.67 \times 10^{-2} &= 3.4567 \\ 3.45 \times 10^{-5} &= 0.0000345 \end{aligned}$$

48. Un'ultimo consiglio: e' veramente importante che queste (semplicissime) trasformazioni vi diventino automatiche e immediate; oltre ad aver presenti le ragioni "matematiche" su cui si basano, trovate un vostro modo personale di farle che sia piu' rapido e sicuro possibile. E' inutile aggiungere che l'automatismo necessario viene solo con tanto esercizio.

3.2 L'uso della notazione esponenziale

49. L'uso e l'utilita' della notazione esponenziale si basano su alcune semplici proprieta' delle potenze che tutti abbiamo studiato alla scuola media inferiore. Le riporto di seguito come promemoria senza alcuna dimostrazione (provate a dimostrarne qualcuna: dovrebbe essere molto semplice):

- La potenza di un prodotto e' uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori:

$$(a \times b \times c \times \dots)^m = a^m \times b^m \times c^m \times \dots \quad (3.1)$$

- L'inverso di una potenza e' la potenza con la stessa base e l'esponente cambiato di segno:

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \quad (3.2)$$

- Il prodotto di due o piu' potenze con la stessa base e' uguale alla potenza con la base comune e con esponente pari alla somma degli esponenti:

$$a^m \times a^n \times a^p \times \dots = a^{m+n+p+\dots} \quad (3.3)$$

- Il rapporto di due potenze con la stessa base e' uguale alla potenza con la base comune e con esponente pari alla differenza fra l'esponente del numeratore e quello del denominatore:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (3.4)$$

- Elevando una potenza ad un certo esponente si ottiene una potenza con la stessa base e con esponente pari al prodotto dei due esponenti:

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \quad (3.5)$$

50. Alla luce delle proprieta' appena elencate, vediamo le operazioni di base con numeri in formato esponenziale.

3.2.1 Moltiplicazione

51. Per eseguire la moltiplicazione di due o più numeri in formato esponenziale, bisogna ricordare la proprietà associativa della moltiplicazione: cioè, in una moltiplicazione possiamo raggruppare i fattori come più ci piace.

Allora possiamo moltiplicare separatamente le mantisse e le potenze di 10, guadagnando notevolmente in semplicità e rapidità.

Esempio 20 *Quanto fa 0.12×5200 ?*

Per prima cosa trasformiamo i due numeri da moltiplicare in formato esponenziale (punto 45):

$$\begin{aligned} 0.12 &= 1.2 \times 10^{-1} \\ 5200 &= 5.2 \times 10^3 \end{aligned}$$

A questo punto facciamo come detto: moltiplichiamo separatamente mantisse e parti esponenziali:

$$1.2 \times 10^{-1} \times 5.2 \times 10^3 = (1.2 \times 5.2) \times (10^{-1} \times 10^3)$$

La moltiplicazione delle potenze di 10 si esegue immediatamente alla luce della proprietà 3.3 e resta da fare solo il prodotto delle mantisse, che fa 6.24.

Quindi:

$$\begin{aligned} &= 6.24 \times 10^{(-1+3)} \\ &= 6.24 \times 10^2 \end{aligned}$$

che è il risultato finale in formato esponenziale.

3.2.2 Divisione

Per fare una divisione fra due numeri in formato esponenziale dovete ricordare questa semplice proprietà delle frazioni:

$$\frac{a \times b}{x \times y} = \frac{a}{x} \times \frac{b}{y} \quad (3.6)$$

Allora, analogamente al caso della moltiplicazione, si dividono separatamente le mantisse e le parti esponenziali.

Esempio 21 *Quanto fa $0.000064/800$?*

Anche qui la prima cosa da fare è trasformare i numeri in formato esponenziale (punto 45):

$$\begin{aligned} 0.000064 &= 6.4 \times 10^{-5} \\ 800 &= 8 \times 10^2 \end{aligned}$$

A questo punto:

$$\frac{6.4 \times 10^{-5}}{8 \times 10^2} = \frac{6.4}{8} \times \frac{10^{-5}}{10^2}$$

La divisione delle potenze di 10 e' immediata alla luce della proprieta' 3.4 e resta da fare solo il rapporto delle mantisse, che fa 0.8:

$$\begin{aligned} &= 0.8 \times 10^{-5-2} \\ &= 0.8 \times 10^{-7} \text{ (formato esponenziale, ma non scientifico)} \\ &= 8 \times 10^{-8} \text{ (formato scientifico)} \end{aligned}$$

3.2.3 Somma e sottrazione

Per sommare o sottrarre due numeri in formato esponenziale bisogna trasformarli in modo che l'esponente di 10 sia lo stesso. Fatto questo, si raccoglie a fattor comune la parte esponenziale e si sommano le mantisse.

Esempio 22 Quanto fa $0.45 + 6.2 \times 10^{-2}$?

Come detto, per prima cosa trasformiamo 0.45 in formato esponenziale in modo che l'esponente di 10 sia -2 (chiaramente potremmo anche trasformare 6.2×10^{-2} in formato non esponenziale).

Seguendo quanto detto alla sezione 3.1 si ha:

$$0.45 \rightarrow 45 \times 10^{-2}$$

A questo punto:

$$\begin{aligned} 0.45 + 6.2 \times 10^{-2} &= 45 \times 10^{-2} + 6.2 \times 10^{-2} \\ &= (45 + 6.2) \times 10^{-2} \\ &= 51.2 \times 10^{-2} \\ &= 5.12 \times 10^{-1} \\ &= 0.512 \end{aligned}$$

3.2.4 Radice quadrata, cubica etc.

Prima di tutto dovete sapere che l'operazione di radice quadrata, cubica e cosi' via non e' altro che un elevamento a potenza.

Infatti:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{a} & \text{vuol dire} & a^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{a} & \text{vuol dire} & a^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt[4]{a} & \text{vuol dire} & a^{\frac{1}{4}} \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Allora basta applicare le regole viste alla sezione 3.2.

Esempio 23 Quanto fa $\sqrt{9 \times 10^{-6}}$?

Riscriviamo la radice quadrata come elevamento a potenza e applichiamo le proprietà viste alla sezione 3.2:

$$\begin{aligned}\sqrt{9 \times 10^{-6}} &= (9 \times 10^{-6})^{\frac{1}{2}} \\ &= 9^{\frac{1}{2}} \times (10^{-6})^{\frac{1}{2}} \\ &= 3 \times 10^{(-6 \times \frac{1}{2})} \\ &= 3 \times 10^{-3} \\ &= 0.003\end{aligned}$$

Esempio 24 Quanto fa $\sqrt[3]{2.7 \times 10^{-5}}$?

Questo esempio è per mettere in evidenza come certe volte sia utile trasformare dalla notazione scientifica a quella esponenziale più generale.

Dovendo fare la radice cubica, vediamo che l'esponente di 10 non è divisibile per 3: ci piacerebbe che fosse 6 invece di 5. Ma utilizzando quanto detto alla sezione 3.1.1 possiamo farlo:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2.7 \times 10^{-5}} &= \sqrt[3]{27 \times 10^{-6}} \\ &= (27 \times 10^{-6})^{\frac{1}{3}} \\ &= 27^{\frac{1}{3}} \times (10^{-6})^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \times 10^{(-6 \times \frac{1}{3})} \\ &= 3 \times 10^{-2} \\ &= 0.03\end{aligned}$$

3.2.5 Logaritmi

Fare il logaritmo di un numero in formato esponenziale è molto semplice tenendo presenti le proprietà dei logaritmi viste alla sezione 2.3. Un numero in formato esponenziale è il prodotto fra la mantissa e la parte esponenziale: allora, per prima cosa, il logaritmo di un numero in formato esponenziale sarà la somma del logaritmo della mantissa e del logaritmo della parte esponenziale.

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n$$

Se stiamo usando i logaritmi decimali, poi, il logaritmo della parte esponenziale coincide con l'esponente di 10:

$$\log 10^n = n$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\log (a \times 10^n) &= \log a + \log 10^n \\ &= n + \log a\end{aligned}$$

Esempio 25 *Quanto fa $\log (3.75 \times 10^{-7})$?*

Applicando quanto appena detto:

$$\begin{aligned}\log (3.75 \times 10^{-7}) &= -7 + \log 3.75 \\ &= -7 + 0.5740 \dots \\ &= -6.4259687 \dots\end{aligned}$$

(naturalmente, per fare $\log 3.75$ ci serve una calcolatrice)

Capitolo 4

Risolvere semplici equazioni

FIXME (start)

- Cosa vuol dire “porto di qua, porto di la’ ”?
- Frazioni multiple
- Elevamento a potenza di frazioni
- Equazioni di secondo grado
- Equazioni contenenti logaritmi.
 - Trovare x in $pH = pK_A - \log \frac{A}{x}$
 - Trovare x in $-RT \log x = \Delta G^\circ$
- Equazioni con potenze (anche frazionarie):
 - Trovare x in $pH = \sqrt{C^\circ x}$
 - Trovare x in $K = \frac{p_{NH_3}^2}{x^{\frac{3}{2}} p_{N_2}}$
- Equazioni con potenze (anche frazionarie) e logaritmi
- Soluzione di sistemi lineari di due equazioni
- Come usare in modo efficiente la calcolatrice tascabile (in particolare: usare i registri di memoria!)
- Possibili approssimazioni nella soluzione di equazioni

FIXME (end)

52. Ho notato che non e' infrequente trovare studenti in difficolta' quando si tratta di risolvere delle semplici equazioni. Siccome nel corso di Chimica Generale (ma non solo) vi troverete spesso a dover “smanettare” dell'algebra (sempre molto semplice), cerchiamo in questo capitolo di chiarire alcuni aspetti fondamentali riguardanti questo argomento.

4.1 Cosa vuol dire “Porto di qua”, “Porto di la’ ”?

53. Tutti sappiamo che se:

$$x + b = 3$$

allora:

$$x = 3 - b$$

Cioe’: per isolare x abbiamo “portato b al secondo membro”, cambiando di segno.

54. Se dobbiamo trovare x nell’equazione:

$$\frac{x}{2} = 3a$$

allora “portiamo il 2 al secondo membro”, ma questa volta senza cambiare segno:

$$\begin{aligned} x &= 2 \times 3a \\ &= 6a \end{aligned}$$

55. “Porto di qua” e “porto di la’” e’ il mantra di molti studenti quando risolvono delle equazioni. Il che va benissimo, se pero’ uno sa che cosa sta dietro al portare di qua e di la’. Cio’ che ho riscontrato e’ che molte volte i passaggi per risolvere un’equazione vengono eseguiti in modo meccanico e/o mnemonico: come conseguenza, di fronte a un caso che esca anche solo di poco dalla routine, ci si trova subito in difficolta’.

A cio’ va aggiunto che il portare di qua e di la’ i vari “pezzi” di un’equazione in molti casi semplicemente non e’ di alcun aiuto. Ad esempio, come si isola x nell’equazione:

$$A = B - \log \frac{C}{x} \quad ?$$

4.1.1 L’idea fondamentale per la soluzione di un’equazione.

56. Per quello che ci interessa in questo capitolo, risolvere un’equazione significa isolare l’incognita. In parole povere: abbiamo un’equazione in cui compare un’incognita (per esempio x) assieme a numeri e/o altri simboli che si suppongono noti:

$$\frac{3x + a}{1 - x} = \frac{b}{6}$$

Il problema e' quello di trasformare l'equazione in un'equazione **equivalente** della forma:

$$x = \dots \quad (4.1)$$

un'equazione, cioe', in cui l'incognita compaia da sola al primo membro e tutto il resto si trovi al secondo membro. E' chiaro che se riusciamo a metter l'equazione di partenza in questa forma, abbiamo automaticamente trovato il valore (numerico o simbolico) dell'incognita. Si dice in questo caso che abbiamo **isolato** l'incognita.

57. Va subito chiarito cosa significa che una equazione e' **equivalente** ad un'altra. La cosa e' molto semplice: vuol dire che le due equazioni hanno la medesima soluzione. Quindi risolvere una o l'altra ci porta esattamente allo stesso risultato.

58. In termini generali, l'isolamento dell'incognita si raggiunge trasformando l'equazione di partenza in successive equazioni sempre equivalenti ad essa, ma nelle quali l'incognita sia progressivamente sempre piu' "sola", fino ad arrivare alla forma 4.1. Ogni trasformazione e' cio' che siete abituati a chiamare "passaggio": per isolare l'incognita (o risolvere l'equazione) si deve fare un certo numero di passaggi.

59. Chiaramente, i passaggi per l'isolamento dell'incognita non vanno fatti a caso, ma devono essere mirati allo scopo. Alla base di qualsiasi passaggio, tuttavia, c'e' un unico concetto:

In un'equazione il primo membro e' (o deve essere) uguale al secondo membro. Ma allora, se i due membri sono uguali, qualsiasi operazione si faccia su **entrambi** produrra' due oggetti **che rimangono ancora uguali**.

60. Se ci pensate un attimo, vi rendete conto che questo concetto e' molto semplice. Considerate la seguente "equazione":

$$3 = 3$$

Il primo membro e' il numero 3 e il secondo membro e' di nuovo il numero 3: ovviamente primo e secondo membro sono uguali (questa in realta' non e' neppure un'equazione, ma non importa).

Proviamo a verificare l'affermazione vista sopra.

Prendiamo un'operazione qualsiasi, ad esempio la moltiplicazione per 4: se facciamo questa operazione su entrambi i membri otteniamo:

$$\begin{aligned} 3 \times 4 &= 3 \times 4 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

cioe' due oggetti che sono di nuovo uguali (12 al primo membro e 12 al secondo membro).

Lo stesso vale per qualsiasi altra operazione, per quanto "complicata" possa essere. Ad esempio, potremmo dividere ambo i membri per 2 ed estrarre (sempre da entrambi i membri) la radice quinta:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{\frac{3}{2}} &= \sqrt[5]{\frac{3}{2}} \\ 1.0844717711977\dots &= 1.0844717711977\dots\end{aligned}$$

e così' via.

61. L'esempio appena fatto e' ridicolo. Ma il concetto rimane assolutamente identico per qualsiasi equazione.

Data l'equazione:

$$\log \left(\frac{\sin(ax+2)}{x^3 - \frac{b+c}{2x}} \right) = \sqrt[3]{\frac{e^{\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}{15-c}}$$

se, ad esempio, eleviamo ambo i membri alla sesta:

$$\left(\log \left(\frac{\sin(ax+2)}{x^3 - \frac{b+c}{2x}} \right) \right)^6 = \left(\sqrt[3]{\frac{e^{\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}{15-c}} \right)^6$$

otteniamo un'equazione equivalente a quella da cui siamo partiti.

62. La cosa essenziale e' che, qualunque sia l'operazione che si esegue, venga eseguita **su entrambi i membri** dell'equazione: solo così' si ha la garanzia che la nuova equazione rimane equivalente a quella da cui eravamo partiti.

63. A questo punto e' meglio ribadire che quanto detto sinora e' lontano da qualsiasi rigore matematico. In realta' non si puo' fare **qualsiasi** operazione sui membri di un'equazione: provate solo a pensare di moltiplicare ambo i membri per zero!

Tuttavia, la cosa importante adesso e' rendersi conto che gli infiniti modi di risolvere un'equazione poggiano tutti sul concetto esposto al punto 59.

64. Alla luce di quanto detto, il processo di isolamento di un'incognita in un'equazione puo' essere impostato nel modo seguente:

Partendo dall'equazione data, si eseguono operazioni successive **su entrambi i membri** in modo che, dopo ogni operazione, (a) si ottenga un'equazione equivalente a quella di partenza e (b) l'incognita sia sempre piu' "isolata".

4.1.2 La rivisitazione del "porto di la' "

65. Consideriamo l'equazione:

$$x + b = 3$$

Alla luce di quanto detto, come possiamo isolare l'incognita x ?

Le regole del gioco sono: "Puoi fare (quasi) qualsiasi operazione per raggiungere il tuo scopo, purché la faccia su entrambi i membri dell'equazione".

A noi piacerebbe far "scompare" b dal primo membro e questo lo potremmo ottenere sottraendo b : bene, facciamolo, ma, come vuole la regola del gioco,

dobbiamo fare la stessa cosa al secondo membro, se non vogliamo cambiare l'equazione di partenza. Quindi, sottraggo b ad ambo i membri:

$$x + b - b = 3 - b$$

Al primo membro, ovviamente, $+b - b$ sparisce (l'abbiamo fatto apposta!) e il gioco e' fatto:

$$x = 3 - b$$

66. Vedete che il risultato finale e' quello di aver "portato b al secondo membro" cambiandogli il segno: e questa e' la regoletta che tutti sapete. Ma la cosa veramente importante (e anche semplice) e' realizzare l'origine di questa regoletta.

67. Consideriamo quest'altro caso:

$$\frac{x}{2} = 3a$$

Come possiamo isolare l'incognita x col metodo visto?

Si tratta di applicare un'operazione che faccia sparire il 2 al denominatore del primo membro. Dovrebbe essere chiaro a tutti che l'operazione cercata e' la moltiplicazione per 2. Al solito, la stessa operazione dobbiamo farla anche al secondo membro. Quindi:

$$2 \times \frac{x}{2} = 2 \times 3a$$

Svolgendo le moltiplicazioni si ottiene:

$$x = 6a$$

e abbiamo isolato l'incognita.

68. Anche in questo caso ritroviamo la regoletta ben nota: il denominatore si porta al secondo membro senza cambiare segno. Ma, ripeto, la cosa veramente importante e' rendersi conto di quello che sta **sotto** alla regoletta.

4.2 I principali trucchi del mestiere

69. Un'equazione si puo' risolvere seguendo infiniti procedimenti, tutti egualmente validi e non credo sia possibile enunciare un metodo generale migliore di tutti in assoluto.

La capacita' di isolare l'incognita col minor numero possibile di passaggi si acquisisce con la pratica e l'esercizio (in generale: piu' esercizi fate e meglio e').

In questa sede, possiamo solo elencare una serie di operazioni che risultano utili nei casi che incontrerete durante i corsi del primo anno.

Tenete presente che in genere serve combinare due o piu' di queste operazioni per arrivare all'isolamento dell'incognita.

4.2.1 Come sbarazzarsi di addendi

70. Lo abbiamo già visto alla sezione 4.1.2: se vogliamo far “sparire” un termine sommato o sottratto, basta sottrarre o sommare, rispettivamente, lo stesso termine ad ambo i membri.

4.2.2 Come sbarazzarsi di fattori

71. Anche questo lo abbiamo visto alla sezione 4.1.2: se vogliamo far sparire un denominatore, basta moltiplicare (ambo i membri) per il denominatore stesso.

In modo identico, se vogliamo far sparire un termine che si trova come moltiplicatore, basta dividere per lo stesso termine, ovvero, che è lo stesso, moltiplicare per il suo inverso.

Ad esempio:

$$\begin{aligned}(3a + b)x &= c \\ \frac{1}{(3a + b)} \times (3a + b)x &= \frac{1}{(3a + b)} \times c \\ x &= \frac{c}{(3a + b)}\end{aligned}$$

4.2.3 Come sbarazzarsi di esponenti e radici

72. Come si può isolare l’incognita nell’equazione:

$$x^3 = 4.5 \quad ?$$

Si tratta di far “sparire” l’esponente. Basta ricordare la proprietà delle potenze vista alla sezione 3.2:

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Quindi, se eleviamo ambo i membri all’esponente $\frac{1}{3}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}(x^3)^{\frac{1}{3}} &= (4.5)^{\frac{1}{3}} \\ x^{(3 \times \frac{1}{3})} &= (4.5)^{\frac{1}{3}} \\ x^1 &= (4.5)^{\frac{1}{3}} \\ x &= (4.5)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

In generale: per sbarazzarsi di un esponente, basta elevare ambo i membri al suo inverso.

73. Se pensiamo che l’operazione di radice quadrata, cubica etc. non è altro che un elevamento a potenza (sezione 3.2.4), abbiamo subito il modo di liberarci anche da una radice.

Ad esempio, come si isola l’incognita nell’equazione:

$$\sqrt[3]{x} = 1.8 \times 10^{-10} \quad ?$$

Riscriviamo la radice cubica come elevamento a potenza:

$$x^{\frac{1}{3}} = 1.8 \times 10^{-10}$$

Allora possiamo applicare quanto visto al punto precedente: eleviamo ambo i membri all'inverso dell'esponente che vogliamo eliminare (in questo caso l'esponente da eliminare e' $\frac{1}{3}$ e il suo inverso e' 3):

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 &= (1.8 \times 10^{-10})^3 \\ x^{\left(\frac{1}{3} \times 3\right)} &= 1.8^3 \times (10^{-10})^3 \\ x^1 &= 1.8^3 \times 10^{-10 \times 3} \\ x &= 1.8^3 \times 10^{-30} \end{aligned}$$

In generale: per sbarazzarsi di una radice basta elevare ambo i membri ad un esponente pari all'ordine della radice (2 per una radice quadrata, 3 per una radice cubica e cosi' via).

4.2.4 Come sbarazzarsi di logaritmi

74. A pagina 24 abbiamo visto la seguente proprieta' dei logaritmi:

$$a^{\log_a x} = x$$

Questa relazione dice in pratica che la funzione inversa del logaritmo in base a e' l'elevamento a potenza della base.

E questo e' anche il modo di sbarazzarsi di un logaritmo in un'equazione.

Ad esempio, come si isola x nell'equazione:

$$\log x = z \quad ?$$

Basandoci sulla proprieta' vista sopra, possiamo operare su ambo i membri facendoli diventare esponenti nell'elevamento a potenza della base del logaritmo (in questo caso 10):

$$10^{(\log x)} = 10^z$$

e, siccome $10^{(\log x)} = x$, si ottiene:

$$x = 10^z$$

Quindi, in generale, per sbarazzarsi di un logaritmo si deve fare diventare entrambi i membri dell'equazione esponenti della base del logaritmo.

4.2.5 Qualche esempio di riepilogo

75. Vediamo ora qualche esempio concreto di applicazione delle singole “regole” viste.

Cerco di essere il piu’ dettagliato possibile: e’ chiaro che il numero di passaggi da fare diminuisce al crescere dell’esperienza che ciascuno possiede.

Esempio 26 *Isolate x nell’equazione:*

$$1 + \frac{x-a}{m} = \frac{x+m}{a} - 1$$

Cominciamo a sbarazzarci dei denominatori. Per far “sparire” il denominatore al primo membro, moltiplichiamo ambo i membri per m :

$$m \left(1 + \frac{x-a}{m} \right) = m \left(\frac{x+m}{a} - 1 \right)$$

e, svolgendo i prodotti, si ottiene:

$$m + (x-a) = \frac{m(x+m)}{a} - m$$

e vedete che il primo denominatore e’ sparito.

Per il denominatore al secondo membro si agisce in modo analogo, moltiplicando ambo i membri (ricordate: sempre su ambo i membri!) per a :

$$\begin{aligned} a(m + (x-a)) &= a \left(\frac{m(x+m)}{a} - m \right) \\ am + a(x-a) &= m(x+m) - am \end{aligned}$$

Ora vogliamo spostare i termini contenenti x al primo membro (ecco il famoso “porto di la’ ”!). Per fare cio’ basta sottrarre da ambo i membri $(m(x+m))$:

$$\begin{aligned} am + a(x-a) - (m(x+m)) &= m(x+m) - am - (m(x+m)) \\ am + a(x-a) - (m(x+m)) &= -am \end{aligned}$$

Ora spostiamo il termine am dal primo al secondo membro, sottraendolo ad entrambi i membri:

$$\begin{aligned} am + a(x-a) - (m(x+m)) - am &= -am - am \\ a(x-a) - (m(x+m)) &= -2am \end{aligned}$$

Ci stiamo avvicinando. Svolgiamo le operazioni al primo membro e raccogliamo a fattor comune l’incognita:

$$\begin{aligned} ax - a^2 - mx - m^2 &= -2am \\ x(a - m) - a^2 - m^2 &= -2am \end{aligned}$$

Sbarazziamoci dei termini che non contengono x al primo membro, sommandoli ad entrambi i membri:

$$\begin{aligned} x(a - m) - a^2 - m^2 + a^2 + m^2 &= -2am + a^2 + m^2 \\ x(a - m) &= -2am + a^2 + m^2 \end{aligned}$$

Ora non resta che sbarazzarsi del fattore al primo membro, dividendo per esso ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{x(a - m)}{a - m} &= \frac{-2am + a^2 + m^2}{a - m} \\ x &= \frac{-2am + a^2 + m^2}{a - m} \end{aligned}$$

e abbiamo finito.

Saro' stato sicuramente noioso per chiunque abbia anche solo una minima dimestichezza con queste cose, ma vorrei che tutti, proprio tutti, si chiarissero le idee su come si risolvono delle semplici equazioni.

Vi assicuro che e' deprimente vedere uno studente che annaspa su cose simili ad un esame!

Esempio 27 *Isolate a nell'equazione:*

$$\alpha = \beta - \log \frac{\gamma}{a}$$

Proviamo ad andare un po' piu' veloci dell'esempio precedente.

Sottraiamo α e sommiamo $\log \frac{\gamma}{a}$ ad ambo i membri per ottenere:

$$\log \frac{\gamma}{a} = \beta - \alpha$$

Ora vogliamo liberarci del logaritmo al primo membro: abbiamo visto che questo si ottiene usando ciascun membro come esponente di 10 (la base del logaritmo decimale): al primo membro si otterra' l'argomento del logaritmo, che e' quello che vogliamo.

$$\frac{\gamma}{a} = 10^{(\beta - \alpha)}$$

Ora vorremmo che a al primo membro stia al numeratore. Un modo per ottenere cio' e' quello di elevare ambo i membri a -1 :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma}{a}\right)^{-1} &= \left(10^{(\beta-\alpha)}\right)^{-1} \\ \frac{a}{\gamma} &= 10^{-(\beta-\alpha)}\end{aligned}$$

Notate che l'esponente di 10 al secondo membro e' diventato negativo perche' abbiamo moltiplicato per -1 , applicando una proprieta' delle potenze vista (proprieta' 3.5).

Non resta che moltiplicare ambo i membri per γ :

$$a = \gamma \times 10^{-(\beta-\alpha)}$$

4.3 Equazioni di secondo grado

76. Molti degli esempi visti finora erano equazioni algebriche dette di “primo grado”. Ad esempio, l'equazione:

$$3x - 1 = 0$$

e' un'equazione di primo grado.

77. In generale, il **grado** di un'equazione algebrica (in cui compaiono solo potenze intere dell'incognita) e' il massimo valore (intero) dell'esponente a cui viene elevata l'incognita.

Nei corsi che seguirete vi troverete spesso a dover risolvere equazioni di grado superiore al primo.

78. Per le equazioni di secondo grado, non c'e' (o per lo meno non dovrebbe esserci!) alcun problema. Tutti dovrete sapere che un'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ammette sempre 2 soluzioni date dalla formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

79. Generalmente a voi interesseranno solo le soluzioni reali, cioe' quelle che si ottengono quando l'argomento della radice quadrata e' non negativo. Se fate un esercizio di stechiometria e vi viene il radicale negativo, avete la quasi assoluta certezza di avere commesso qualche errore!

80. Quando l'argomento della radice quadrata e' strettamente positivo, le soluzioni dell'equazione di secondo grado (detta anche “quadratica”) sono due (in corrispondenza al segno $+$ e al segno $-$ davanti alla radice). Molto spesso, solo uno dei valori puo' essere accettato, mentre l'altro e' da scartare. I criteri su cui

basarsi per fare questa scelta sono quasi sempre di carattere fisico: cioè sono legati alla natura fisica della grandezza il cui valore si ottiene dalla soluzione dell'equazione. Ad esempio, la soluzione dell'equazione potrebbe darvi la massa di qualche cosa: allora, se una soluzione è positiva e l'altra negativa, è chiaro che quella negativa va scartata perché una massa non può essere negativa!

Avrete modo di prendere dimestichezza con queste cose...

4.4 Equazioni di grado superiore

81. Vi capiterà anche (e non di rado) di trovarvi di fronte ad equazioni algebriche di grado maggiore di 2.

Ad esempio:

$$\frac{x^2(2-x)}{3-x} = K$$

Dovreste rendervi conto senza difficoltà che questa equazione è di terzo grado, perché svolgendo il prodotto al numeratore si ottiene un termine x^3 .

In questi casi non ci sono (semplici) formule che diano le soluzioni in forma simbolica. Che fare?

Vedrete che quasi invariabilmente si possono fare delle approssimazioni che riducono il grado dell'equazione a 2 o 1.

Le ragioni per cui si possono fare queste approssimazioni sono sempre di origine fisica: cioè l'equazione deriva da un problema fisico, l'analisi del quale consente di assumere che l'incognita, che ancora non abbiamo trovato, abbia comunque un valore o molto grande, o molto piccolo.

82. Badate bene: il fatto che non si conosca il valore preciso dell'incognita non esclude affatto che si possano fare delle previsioni “di massima” su di esso, cioè si possa stimare, come si usa dire, il suo “ordine di grandezza”. Tanto per fare un esempio (che non ha nulla a che fare con la chimica): supponete di voler trovare l'effetto di rallentamento esercitato dall'aria su un tuffatore che si tuffa dalla piattaforma di 10 m; cioè volete calcolare di quanto diminuisce la velocità del tuffatore al momento dell'entrata in acqua a causa della presenza dell'aria. Questo problema si può risolvere tenendo conto dell'accelerazione di gravità e dell'attrito dovuto all'aria. Tuttavia, ed è questo che vorrei sottolineare, al di là dell'equazione a cui si arriva, possiamo ben dire sin dal principio che il valore di questo rallentamento (cioè la differenza fra la velocità in presenza di aria e quella nel vuoto) sarà estremamente piccolo (per lo meno in confronto alla velocità di entrata)!

4.4.1 Ordine di grandezza di x molto piccolo

83. Prendiamo l'equazione scritta sopra come esempio pratico con $K = 1.0 \times 10^{-8}$:

$$\frac{x^2(2-x)}{3-x} = 1.0 \times 10^{-8}$$

Supponiamo che l'analisi del problema per la soluzione del quale siamo arrivati a questa equazione consenta di assumere che il valore di x debba essere

molto piccolo, in particolare molto piu' piccolo di 2 (e quindi, a maggior ragione, di 3). Allora possiamo trascurare x nei due termini $(2 - x)$ e $(3 - x)$. In matematiche si scrive cosi':

$$\begin{aligned} x \ll 2 &\Rightarrow 2 - x \approx 2 \\ &\Rightarrow 3 - x \approx 3 \end{aligned}$$

(il segno $\ll$ vuol dire "molto minore di" e il segno $\approx$ vuol dire "circa uguale a")

Con questa approssimazione, l'equazione diventa:

$$x^2 \frac{2}{3} \approx 1.0 \times 10^{-8}$$

e adesso si puo' risolvere molto facilmente:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1.0 \times 10^{-8} \times \frac{3}{2}} \\ &= 1.224745 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

84. Ovviamente, la soluzione che abbiamo trovato non e' esatta, ma solo approssimata, perche' e' stata ottenuta trascurando x nei termini visti sopra. Tuttavia, e questo e' un punto di carattere generale, possiamo farci un'idea della bonta' della nostra approssimazione. Infatti, il valore ottenuto per x e' effettivamente molto piu' piccolo di 2. Possiamo quantificare questa affermazione calcolando quant'e' x in percentuale rispetto a 2 (andate a vedere come si calcola una percentuale alla sezione 1.4.1):

$$\frac{1.224745 \times 10^{-4}}{2} \times 100 = 0.006 \dots \%$$

Quindi trascurando x rispetto a 2 abbiamo trascurato una quantita' che e' lo 0.006...% di 2 (ovviamente rispetto a 3 le cose vanno ancora meglio): anche senza nessun altro metro di giudizio, non sembra male!

85. Volendo essere particolarmente critici, possiamo fare un'ulteriore verifica: ora che abbiamo il valore approssimato per x , possiamo calcolarcene uno migliore scrivendo al posto di $(2 - x)$ e $(3 - x)$ le espressioni corrispondenti che utilizzano il valore di x appena trovato: $(2 - 1.224745 \times 10^{-4})$ e $(3 - 1.224745 \times 10^{-4})$:

$$\frac{x^2 (2 - 1.224745 \times 10^{-4})}{3 - 1.224745 \times 10^{-4}} = 1.0 \times 10^{-8}$$

E' chiaro che questa e' di nuovo un'equazione approssimata, ma senza dubbio l'approssimazione e' migliore di quella fatta all'inizio, perche' abbiamo usato per x un valore migliore. Risolvendo si ottiene:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1.0 \times 10^{-8} \times \frac{3 - 1.224745 \times 10^{-4}}{2 - 1.224745 \times 10^{-4}} \\ x &= \sqrt{1.0 \times 10^{-8} \times \frac{3 - 1.224745 \times 10^{-4}}{2 - 1.224745 \times 10^{-4}}} \\ &= 1.224757 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Vedete che il secondo valore ottenuto e' identico al primo entro le prime 4 cifre decimali: significa che gia' il primo valore era piuttosto accurato! Vediamo qual'e' la variazione percentuale subita dal primo valore dopo la seconda approssimazione:

$$100 \times \frac{1.224757 \times 10^{-4} - 1.224745 \times 10^{-4}}{1.224745 \times 10^{-4}} = 0.0009 \dots \%$$

cioe', il secondo valore e' cambiato (in particolare aumentato) solo dello $0.0009 \dots \%$ rispetto al primo!

86. Se non fossimo soddisfatti, potremmo iterare il procedimento appena visto. Cioe', sostituiamo il valore appena ottenuto nell'equazione di partenza e ricalcoliamo un valore ancora migliore per x :

$$\begin{aligned} x^2 &= 1.0 \times 10^{-8} \times \frac{3 - 1.224757 \times 10^{-4}}{2 - 1.224757 \times 10^{-4}} \\ x &= \sqrt{1.0 \times 10^{-8} \times \frac{3 - 1.224757 \times 10^{-4}}{2 - 1.224757 \times 10^{-4}}} \\ &= 1.224757 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Vedete che il terzo valore ottenuto, entro le cifre decimali riportate, non e' variato rispetto al precedente. Si dice che il processo iterativo che abbiamo impiegato e' "arrivato a convergenza": se continuassimo a sostituire il valore ottenuto nell'equazione e a ricalcolare valori sempre migliori per x , questi sarebbero tutti uguali fra loro (entro 6 cifre decimali).

State tranquilli: nei corsi del primo anno non vi capitera' mai di dover applicare questo procedimento iterativo; vi capitera' invece spesso di dover semplificare delle equazioni sfruttando la conoscenza "dell'ordine di grandezza" della incognita, cioe' di applicare il primo passo visto al punto 83.

87. Facciamo ancora un'osservazione. Nell'equazione considerata:

$$\frac{x^2(2-x)}{3-x} = 1.0 \times 10^{-8}$$

si poteva dedurre che x doveva essere molto piccolo anche da sole considerazioni matematiche. Infatti, nella frazione $\frac{2-x}{3-x}$, numeratore e denominatore sono circa uguali (la differenza sta solo nel 2 sopra e nel 3 sotto): allora, la frazione vale circa 1 e quindi $x^2 \approx 1 \times 10^{-8}$, cioe' x e' un numero piccolo.

Badate pero' che fare un'analisi matematica di un'equazione e' semplice solo quando l'equazione e' semplice; percio' nella maggioranza dei casi le indicazioni sull'ordine di grandezza del risultato vengono da considerazioni fisiche, piuttosto che matematiche.

4.4.2 Ordine di grandezza di x molto grande

88. Un'equazione si puo' semplificare anche quando possiamo prevedere che il valore della soluzione sia molto grande.

Consideriamo la stessa equazione vista prima, ma questa volta con $K = 1 \times 10^{10}$:

$$\frac{x^2(2-x)}{3-x} = 1 \times 10^{10}$$

Applicando gli argomenti puramente matematici visti al punto 87 potete facilmente convincervi che la soluzione in questo caso sarà un numero grande. Tuttavia, come dicevo, sarà l'analisi del problema fisico che vi darà questa indicazione.

89. Come possiamo sfruttare il fatto che x sarà grande per semplificare l'equazione? Alla luce di quanto già visto per il caso in cui x era piccolo dovrete essere in grado di fare da soli. Se x è grande, in particolare molto maggiore di 3, allora saranno 2 e 3 ad essere in questo caso trascurabili rispetto a x e quindi:

$$\frac{x^2(2-x)}{3-x} \approx \frac{x^2 \cancel{(-x)}}{\cancel{(-x)}}$$

L'equazione diventa in questo caso ancora più semplice:

$$\begin{aligned} x^2 &\approx 1 \times 10^{10} \\ x &= 1 \times 10^5 \end{aligned}$$

Vedete che il valore ottenuto, per quanto approssimato, è largamente maggiore di 3.

90. Tanto per completezza, proviamo a fare una seconda iterazione, cioè risolviamo l'equazione che si ottiene sostituendo ai termini $(2-x)$ e $(3-x)$, rispettivamente $(2 - 1 \times 10^5)$ e $(3 - 1 \times 10^5)$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2(2 - 1 \times 10^5)}{3 - 1 \times 10^5} &= 1 \times 10^{10} \\ x^2 &= 1 \times 10^{10} \times \frac{3 - 1 \times 10^5}{2 - 1 \times 10^5} \\ x &= \sqrt{1 \times 10^{10} \times \frac{3 - 1 \times 10^5}{2 - 1 \times 10^5}} \\ &= 9.999950 \times 10^4 \end{aligned}$$

Vedete che siamo praticamente a convergenza.

4.4.3 Conclusione

91. Avete visto come, avendo un'indicazione sull'ordine di grandezza della soluzione (senza conoscerla esattamente) si possa “spompare” un'equazione che a prima vista sembra complicata. **Attenzione:** il truccetto che avete visto funziona solo quando viene applicato a somme o sottrazioni: non fate mai cose di questo genere con moltiplicazioni o divisioni.

92. La mia esperienza e' che gli studenti "freschi" di scuola media superiore non sono abituati a risolvere un problema in modo approssimato; questo perche', credo, tutti i problemi della scuola media superiore (di matematica, fisica o chimica) portano sempre a delle equazioni risolvibili esattamente. Ora, le equazioni risolvibili in modo esatto sono, credetemi, delle mosche bianche nel panorama delle equazioni che si originano dal mondo "reale". Percio' dovete abituarvi da subito all'idea che trovare delle soluzioni approssimate ad un problema sara' la regola, piuttosto che l'eccezione.

4.5 Sistemi lineari

93. Oltre a singole equazioni, nei primi corsi che seguirete potreste anche imbattervi in (semplici) sistemi di equazioni. In generale, un sistema di equazioni e' costituito da 2 o piu' equazioni contenenti 2 o piu' incognite: i valori di tutte le incognite devono essere trovati in modo tale che **tutte le equazioni del sistema siano contemporaneamente soddisfatte**. In questi appunti ci limiteremo al caso piu' semplice possibile di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Un sistema e' lineare quando il massimo esponente a cui compaiono le incognite e' 1.

Questo e' un esempio di sistema lineare:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

Le incognite sono x e y . Risolvere il sistema significa trovare un valore di x e un valore di y (se esistono) tali che entrambe le equazioni siano soddisfatte contemporaneamente.

Potete subito verificare che $x = 3$ e $y = -2$ e' una soluzione del sistema.

94. Come si risolve un sistema lineare?

Tenete presente che i sistemi lineari sono importantissimi in chimica (e in generale in tutte le scienze). Moltissimi problemi fisici portano a sistemi lineari, che possono raggiungere dimensioni impressionanti (centinaia di migliaia di equazioni in centinaia di migliaia di incognite!). Questo per dirvi che una cospicua parte della ricerca corrente in matematica e' volta a trovare metodi sempre piu' veloci ed efficaci per la soluzioni di sistemi lineari. Ovviamente in questa sede non esamineremo nessuno dei metodi avanzati per la soluzione di sistemi lineari.

Tutto cio' che ci serve e' il metodo piu' antico e piu' semplice, detto "metodo della sostituzione".

Consideriamo la prima delle due equazioni e isoliamo una delle due incognite, ad esempio la y :

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ y &= 4 - 2x \end{aligned}$$

Chiaramente, non possiamo trovare ancora un valore numerico per y , ma abbiamo espresso y in funzione di x : cioe', se $y = 4 - 2x$ la prima equazione

e' soddisfatta. A questo punto, nella seconda equazione, sostituiamo (da cui il nome del metodo) al posto di y l'espressione appena trovata:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 3x + 2(4 - 2x) &= 5 \end{aligned}$$

Vedete che abbiamo ottenuto un'equazione (lineare) nella sola incognita x : notate che il valore di y che abbiamo usato e' tale per cui abbiamo la garanzia che la prima equazione e' soddisfatta. Ora possiamo trovare il valore numerico di x :

$$\begin{aligned} 3x + 2(4 - 2x) &= 5 \\ 3x + 8 - 4x &= 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Infine ci resta da trovare il valore numerico di y : sappiamo che, affinche' la prima equazione sia soddisfatta, deve essere $y = 4 - 2x$; quindi basta sostituire a x il valore appena trovato:

$$\begin{aligned} y &= 4 - 2x \\ y &= 4 - 2 \times 3 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

e abbiamo finito. La soluzione del sistema e': $x = 3$, $y = -2$.

4.6 Come risolvere gli esercizi

95. Concludiamo questo capitolo con qualche consiglio pratico sul metodo per risolvere gli esercizi e su come usare in modo efficiente la calcolatrice tascabile che sicuramente tutti avete e siete ansiosi di usare.

96. Prima di tutto, per risolvere un esercizio riguardante un certo argomento, bisogna aver studiato molto bene l'argomento: non crediate che il fare tanti esercizi possa essere sostitutivo dello studiare. *Prima* bisogna comprendere i concetti che stanno alla base di un argomento e *poi* si devono fare gli esercizi su di esso. Gli esercizi servono per stimolare il vostro senso critico su quello che avete studiato, vi obbligano a *collegare* fra loro in modo organico e costruttivo i vari punti della teoria. Entrambe le fasi sono fondamentali: prima lo studio e poi l'esercizio.

4.6.1 Risolvete gli esercizi per via simbolica

97. Il piu' delle volte, in un esercizio vengono forniti dei dati numerici che devono essere utilizzati per ricavare un certo risultato.

Tanto per fare un esempio banale: “Una massa di ferro pari a 1.35 kg occupa un volume di 0.171 L a temperatura ambiente: qual’è la densità del ferro alla stessa temperatura?”

In questo caso i dati numerici sono la massa di ferro (1.35 kg) e il volume da essa occupato (0.171 L). Il risultato si ottiene banalmente dividendo la massa per il volume:

$$\begin{aligned}\text{densità} &= \frac{1.35}{0.171} \\ &= 7.895\text{ kg/L}\end{aligned}$$

98. In questo caso il risultato si ottiene in modo immediato con un unico passaggio. Molto spesso, tuttavia, i dati devono essere combinati fra loro in numerosi passaggi (per conoscere i quali bisogna avere ben studiato gli argomenti su cui l’esercizio si basa!). In ogni caso, vi suggerisco di procedere sempre secondo lo schema seguente:

1. Assegnate un nome simbolico a ciascun dato. Il simbolo usato dovrà essere:
 - (a) sufficientemente corto da poter essere scritto rapidamente e non appesantire la notazione
 - (b) ma sufficientemente “esplicativo”, in modo da indicare chiaramente a quale dato si riferisce

Ad esempio, nel caso precedente, si potrebbe porre:

simbolo	valore
M	1.35 kg
V	0.171 L

dove, ovviamente, M sta per “massa” e V per “volume”.

2. Elaborate la strategia per la risoluzione dell’esercizio. Questa è la parte più creativa dello svolgimento di un esercizio: trovare una strada rapida ed elegante per giungere al risultato è una questione di preparazione (bisogna avere studiato bene gli aspetti teorici) e pratica (la capacità aumenta all’aumentare degli esercizi svolti).
3. Dopo che avete deciso la strada da seguire, percorretela “per via simbolica”, il che vuol dire che dovete arrivare al risultato finale utilizzando i simboli definiti all’inizio (più qualsiasi altro simbolo che vi possa servire e non sia fra i dati dell’esercizio) nei passaggi algebrici che la vostra strategia di risoluzione prevede.
4. Se avete fatto tutto correttamente, il risultato finale sarà espresso in funzione dei soli simboli che rappresentano i dati del problema. A questo punto, e solo a questo punto, sostituite ad ogni simbolo il suo valore numerico per ottenere il risultato finale.

99. Esemplifichiamo questo modo di procedere con un esempio un po’ più articolato.

Esempio 28 Di tutti i partecipanti ad una gara ciclistica vengono premiati i primi tre classificati in ragione inversa al tempo impiegato per compiere tutto il percorso. Il premio da dividere e' di 6360 € e i primi tre hanno impiegato rispettivamente 60 min, 70 min e 90 min. Quanto vince ciascuno?

I dati del problema sono la somma da dividere (6360 €) e i tre tempi dei primi tre classificati.

Il risultato da trovare consiste nelle tre somme da dare a ciascuno dei tre primi classificati.

Allora, cominciamo con l'assegnare un simbolo a ciascun dato:

$$\begin{array}{ll} P & 6360 \text{ €} \\ t_1 & 60 \text{ min} \\ t_2 & 70 \text{ min} \\ t_3 & 90 \text{ min} \end{array}$$

(il carattere mnemonico dei simboli scelti dovrebbe essere evidente: P sta per "premio", t_1 sta per "tempo del ciclista numero 1" e così via.)

Ora la strategia: sappiamo che la parte spettante a ciascuno e' inversamente proporzionale al tempo impiegato. Allora, detto P_1 il premio che spetta al ciclista numero 1, P_2 quello spettante al ciclista numero 2 e P_3 il premio del ciclista numero 3, dovra' valere:

$$\begin{array}{ll} P_1 t_1 & = P_2 t_2 \\ P_2 t_2 & = P_3 t_3 \end{array}$$

Notate che ci sarebbe anche la relazione $P_1 t_1 = P_3 t_3$, ma questa si ottiene combinando le prime due e quindi non e' indipendente.

I risultati da trovare sono tre (P_1 , P_2 e P_3) e finora abbiamo solo due relazioni indipendenti che li legano. La terza relazione ci e' fornita dal fatto che la somma dei tre premi "parziali" deve essere uguale al premio "totale". Utilizzando i simboli introdotti, questo si traduce nella seguente equazione:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P$$

A questo punto abbiamo tre equazioni indipendenti per trovare tre incognite. Si tratta quindi di risolvere il seguente sistema (lineare):

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1 t_1 & = P_2 t_2 \\ P_2 t_2 & = P_3 t_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & = P \end{array} \right.$$

Da questo punto in poi e' solo una questione algebrica, che sviluppiamo per via puramente simbolica.

Ricaviamo P_1 dalla prima equazione e P_3 dalla seconda:

$$\begin{array}{ll} P_1 & = P_2 \frac{t_2}{t_1} \\ P_3 & = P_2 \frac{t_2}{t_3} \end{array}$$

Sostituiamo P_1 e P_3 così trovati nella terza equazione:

$$P_2 \frac{t_2}{t_1} + P_2 + P_2 \frac{t_2}{t_3} = P$$

Raccogliamo P_2 a fattor comune e riarrangiamo:

$$P_2 = \frac{P}{1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_3}}$$

Infine, sostituendo a ritroso l'espressione trovata ora per P_2 , otteniamo per P_1 e P_3 :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{P}{1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_3}} \times \frac{t_2}{t_1} \\ P_3 &= \frac{P}{1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_3}} \times \frac{t_2}{t_3} \end{aligned}$$

E l'esercizio è risolto: abbiamo trovato il risultato (P_1 , P_2 e P_3) in funzione dei soli dati iniziali (P , t_1 , t_2 e t_3).

Ora, e solo ora, non resta che sostituire i valori numerici:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{P}{1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_3}} \\ &= \frac{6360}{1 + \frac{70}{60} + \frac{70}{90}} \\ &= 2160 \text{ €} \\ P_1 &= \frac{P}{1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_3}} \times \frac{t_2}{t_1} \\ &= \frac{6360}{1 + \frac{70}{60} + \frac{70}{90}} \times \frac{70}{60} \\ &= 2520 \text{ €} \\ P_3 &= \frac{P}{1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_3}} \times \frac{t_2}{t_3} \\ &= \frac{6360}{1 + \frac{70}{60} + \frac{70}{90}} \times \frac{70}{90} \\ &= 1680 \text{ €} \end{aligned}$$

4.6.1.1 I vantaggi del procedimento “simbolico”

100. Cerco di evidenziare quelli che secondo me sono i vantaggi del modo di procedere descritto.

- Nella soluzione di un esercizio laborioso, possono esserci molti passaggi algebricamente “voluminosi”: svolgerli con dei numeri, magari con molti

decimali, vi portera' quasi sicuramente a commettere degli errori di distrazione; utilizzare dei simboli riduce la probabilita' di questo tipo di errori.

- Avere un foglio pieno di numeri rende piu' difficile sapere "chi e' chi": un numero e' un numero e non dice nulla di piu' del suo valore; viceversa, un simbolo, soprattutto se scelto opportunamente in modo da avere un carattere mnemonico, vi rammenta in qualsiasi momento la grandezza che rappresenta, e questo vi consente di avere un maggiore controllo di quello che state facendo.
- Fare subito dei calcoli numerici produce *comunque* degli altri numeri e questo puo' darvi l'impressione che stiate facendo qualcosa di buono, anche se in realta' non avete le idee chiare su come risolvere l'esercizio. Viceversa, se indicate i dati del problema con dei simboli, siete obbligati a *ragionare*: qualsiasi espressione algebrica simbolica scriviate, deve essere necessariamente frutto di un vostro ragionamento (e non una piu' o meno incontrollata combinazione di numeri).
- Se svolgete un esercizio effettuando ogni calcolo numerico al momento che vi si presenta nel corso della soluzione, vi troverete continuamente a copiare dal display della calcolatrice sul foglio e viceversa. Oltre ad aumentare enormemente le occasioni di errori di trascrizione, ogni volta che copiate un numero dal display alla carta fate un errore di arrotondamento (perche', in generale, il numero che scrivete sul foglio avra' un numero di cifre inferiore a quello con cui e' rappresentato internamente nella calcolatrice). L'accumulo degli errori di arrotondamento cosi' commessi puo' avere effetti talvolta disastrosi sul risultato finale. Questo non accade se arrivate alla soluzione per via simbolica e solo nell'ultimo stadio fate un unico calcolo numerico.

4.6.2 Come utilizzare in modo efficiente la calcolatrice da tavolo

101. Riallacciandoci all'ultimo punto della sezione precedente, e' molto utile saper usare la calcolatrice tascabile in modo efficiente. In particolare, ho visto che la maggior parte degli studenti non usa *mai* i registri di memoria per memorizzare risultati intermedi di un calcolo; piuttosto, il risultato intermedio viene copiato dal display della calcolatrice sul foglio di carta e poi, da questo, viene nuovamente digitato sulla calcolatrice in una fase successiva. Oltre ad essere fonte di numerosissimi errori di trascrizione, questa procedura comporta anche la creazione e l'accumulo degli errori di arrotondamento citati precedentemente.

102. La calcolatrici tascabili oggi in commercio offrono sofisticate funzionalita', ma il solo uso dei registri di memoria consente gia' di effettuare calcoli anche laboriosi senza mai scrivere nulla sul foglio di carta.

103. Un registro di memoria e' semplicemente un "posto" nella calcolatrice dove potete "parcheggiare" un numero che avete trovato. Successivamente, potete "richiamare" quel numero dal registro di memoria al momento in cui vi serve di riutilizzarlo.

In altre parole, il registro di memoria sostituisce il foglio di carta su cui scrivereste il risultato intermedio: la differenza e' che il risultato intermedio viene

“scritto” nel registro di memoria **senza errori** e con la **massima precisione** consentita dalla calcolatrice.

104. Ovviamente, ogni calcolatrice ha la sua procedura per l'utilizzo dei registri di memoria: dovete leggere attentamente le istruzioni per sapere come fare con la vostra calcolatrice. In questa sede, cerchiamo di vedere in generale come impostare un calcolo utilizzando i registri di memoria. A questo scopo, assumiamo che la calcolatrice abbia una serie di registri di memoria selezionabili pigiando dei tasti con le lettere dell'alfabeto: A, B, C etc. (le etichette sui tasti per memorizzare dei dati variano da calcolatrice a calcolatrice). Inoltre, ci saranno due tasti che operano sui registri di memoria: il tasto contrassegnato con **STO** (dall'inglese “store”, che vuol dire immagazzinare) che serve a memorizzare il numero mostrato sul display in un registro di memoria, e il tasto **REC** (dall'inglese “recall”, che vuol dire richiamare) che serve per richiamare un numero precedentemente memorizzato in un certo registro (anche le etichette **STO** e **REC** non sono universalmente usate: ogni calcolatrice utilizza le proprie: basta leggere le istruzioni per sapere quali sono i tasti in questione sulla vostra calcolatrice).

105. Ora torniamo all'esempio 28. Dopo aver sostituito i valori numerici alle variabili nell'ultimo passaggio, si dovevano eseguire i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{6360}{1 + \frac{70}{60} + \frac{70}{90}} \times \frac{70}{60} \\ P_2 &= \frac{6360}{1 + \frac{70}{60} + \frac{70}{90}} \\ P_3 &= \frac{6360}{1 + \frac{70}{60} + \frac{70}{90}} \times \frac{70}{90} \end{aligned}$$

Guardiamo i 3 calcoli da eseguire e organizziamo le operazioni da fare con la calcolatrice.

Prima di tutto, osserviamo che in tutti e tre i casi c'è un fattore comune:

$$\frac{6360}{1 + \frac{70}{60} + \frac{70}{90}}$$

Quindi sarà conveniente calcolare prima questo fattore e memorizzarlo, per averlo poi a disposizione.

Molte calcolatrici offrono la possibilità di usare le parentesi per forzare un ordine di precedenza nelle operazioni e ciò potrebbe essere di aiuto in questo caso. Tuttavia, trovo più semplice l'uso dei registri di memoria non solo per memorizzare il risultato intermedio del fattore su mostrato, ma anche per svolgere il calcolo stesso.

Cominciate sempre dalle operazioni più “interne”, memorizzandone il risultato e utilizzandolo nelle operazioni successive.

Nel caso del fattore da calcolare, le operazioni più “interne”, cioè quelle da eseguire per prime, sono i due rapporti al denominatore.

Quindi, cominciamo col rapporto 70/60: calcoliamolo e memorizziamolo nel registro A digitando:

```

/
60
=
STO
A

```

A questo punto il registro A contiene il risultato della divisione $70/60$.
Ora calcoliamo il secondo rapporto e memorizziamolo in B:

```

70
/
90
=
STO
B

```

A questo punto il registro B contiene il risultato della divisione $70/90$.

Ora possiamo calcolare tutto il denominatore, utilizzando i valori memorizzati nei registri A e B. Se dopo aver calcolato il denominatore i contenuti dei registri A e B non fossero piu' necessari, allora potremmo memorizzare il valore del denominatore in uno di essi (cancellando, quindi, il valore precedentemente memorizzato); tuttavia, in questo particolare caso, osserviamo che i valori dei due rapporti $70/60$ e $70/90$ ci servono non solo per calcolare il denominatore, ma anche per calcolare P_1 e P_2 . Quindi e' piu' opportuno memorizzare il valore del denominatore in un terzo registro di memoria, per esempio C:

```

1
+
REC
A      <-- contiene 70/60
+
REC
B      <-- contiene 70/90
=
STO
C

```

A questo punto il registro C contiene il valore del denominatore del fattore scritto sopra. Ora non resta che dividere 6360 per il contenuto del registro C. Siccome dopo avere eseguito questo passaggio il contenuto del registro C non ci serve piu', possiamo memorizzare il risultato nello stesso registro (cancellando il suo precedente contenuto):

```

6360
/
REC
C      <-- contiene 1+70/60+70/90
=
STO
C      <-- ora contiene 6360/(1+70/60+70/90)

```

A questo punto, il registro **C** contiene il primo dei tre risultati cercati: il valore di P_2 , cioè il premio spettante al secondo classificato. Possiamo trascrivere il risultato sul foglio di carta.

Il calcolo di P_1 e P_3 è immediato, poiché i vari “pezzi” occorrenti sono già tutti memorizzati.

Per P_1 basta moltiplicare il contenuto del registro **C** per il contenuto del registro **A**:

```
REC
C          <-- contiene 6360/(1+70/60+70/90)
*
REC
A          <-- contiene 70/60
=
```

Il risultato sul display della calcolatrice è il valore di P_1 : possiamo trascrivere sul foglio di carta anche questo.

Infine, per calcolare P_3 basta moltiplicare il contenuto del registro **C** per il contenuto del registro **B**:

```
REC
C          <-- contiene 6360/(1+70/60+70/90)
*
REC
B          <-- contiene 70/90
=
```

Il risultato sul display della calcolatrice è il valore di P_3 : trascriviamo anche questo e abbiamo concluso.

4.6.2.1 Il risultato ottenuto è ragionevole?

106. Una cosa molto importante nella risoluzione di esercizi è quella di cercare di verificare in qualche modo la correttezza del risultato ottenuto. In molti casi non è possibile fare ciò alla lettera (nel senso che se non conosciamo la soluzione di un esercizio, come possiamo verificare che il risultato ottenuto è corretto?); tuttavia, *quasi sempre*, è possibile fare uno o più controlli sulla ragionevolezza del risultato.

Nel caso specifico, un controllo che si può fare è il seguente: siccome il premio a ciascuno dei tre vincitori è ottenuto ripartendo una quota totale, la somma dei tre risultati ottenuti deve essere uguale a questa quota totale. Bada-te: dal punto di vista concettuale, questo controllo è del tutto inutile, perché il risultato è stato ottenuto proprio utilizzando questa condizione (riguardate l'esempio 28). Tuttavia, potremmo aver commesso qualche errore nel digitare i numeri sulla tastiera della calcolatrice e questo potrebbe essere messo in evidenza proprio da un controllo come quello descritto.

In generale, non sarà mai possibile avere la certezza assoluta che il risultato ottenuto sia corretto (a meno di non conoscerlo in anticipo): tuttavia, la confidenza sulla correttezza del risultato sarà tanto maggiore quanti più controlli (per quanto banali possano sembrarvi) il nostro risultato sarà in grado di superare.

4.6.3 Un esempio (un po') piu' complesso

107. Supponiamo che, dopo aver impostato la risoluzione di un certo esercizio come detto alla sezione 4.6.1, vi troviate a dover effettuare il seguente calcolo:

$$-\log \left(8.5 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{\frac{0.001 \times 10.0 \times 10^{-3}}{10.0 \times 10^{-3} + 5.00 \times 10^{-3}}}{2.9 \times 10^{16} \times 0.98 \times 8.5 \times 10^{-5}}} \right)$$

Vediamo come tale calcolo si possa eseguire con la calcolatrice **senza mai scrivere alcun risultato intermedio su un foglio di carta.**

Come detto, iniziamo sempre dalle operazioni "piu' interne".

Inizieremo dunque con il numeratore del radicale, che e' a sua volta una frazione. Calcoliamo il denominatore di tale frazione e memorizziamolo nel registro A (ogni calcolatrice ha una sua sequenza di tasti da pigiare per scrivere dei numeri in formato esponenziale):

```
10E-3      <-- trovate come fare con la vostra calcolatrice
+
5E-3
=
STO
A          <-- contiene 10.0x10E-3+5.00x10E-3
```

Ora eseguiamo il prodotto $0.001 \times 10.0 \times 10^{-3}$, dividiamolo per il contenuto del registro A e memorizziamo il risultato nuovamente nel registro A (cancellando il contenuto precedente, che non ci serve piu'):

```
0.001
*
10E-3
=
/
REC
A          <-- contiene 10.0x10-3+5.00x10-3
=
STO
A          <-- ora contiene:
          0.001x10x10E-3/(10.0x10E-3+5.00x10E-3)
```

Ora eseguiamo il calcolo del denominatore del radicale e memorizziamolo nel registro B:

```
2.9E16
*
0.98
*
8.5E-5
=
STO
B          <-- contiene: 2.9E16x0.98x8.5E-5
```

Infine, resta da dividere il contenuto del registro A per il contenuto del registro B, estrarre la radice quadrata, moltiplicare per 8.5×10^{-5} , fare il logaritmo decimale del risultato e cambiare di segno:

```

REC
A          <-- 0.001x10x10E-3/(10.0x10E-3+5.00x10E-3)
/
REC
B          <-- 2.9E16x0.98x8.5E-5
=
SQRT       <-- tasto per la radice quadrata
*
8.5E-5
=
LOG        <-- tasto per fare il log decimale
-/+        <-- tasto per cambiare segno

```

e a questo punto il numero visualizzato sul display della vostra calcolatrice e' il risultato finale, che ora potete scrivere sul foglio.

Se provate a fare questo calcolo, il risultato dovrebbe venirvi, approssimando a due cifre decimali, 11.85.

Capitolo 5

Unita' di misura

FIXME (start)

- unita' del sistema SI
- unita' derivate: volume, densita'
- massa
- volume: litri, millilitri, centimetri cubici, decimetri cubici
- temperatura
- tempo
- prefissi: tera giga mega chilo milli micro nano pico
- conversione fra' unita' di misura: massa, volume

FIXME (end)

5.1 Cosa significa effettuare una misura?

108. Prima o poi, a tutti voi e' sicuramente capitato di misurare qualcosa. Ma, in fin dei conti, cosa significa **misurare** qualcosa?

In termini del tutto generali, misurare qualcosa significa **associare un numero ad una grandezza fisica**.

Quando misuriamo la lunghezza di una sbarra e diciamo che la sbarra e' lunga 67.6 cm , abbiamo associato il numero 67.6 alla lunghezza di quella sbarra.

Naturalmente, il numero da associare alla grandezza fisica non e' un numero a caso: il procedimento da seguire e' tale per cui a due quantita' uguali della stessa grandezza fisica (ad esempio lunghezza) verranno sempre assegnati due numeri uguali.

Tutto cio' e' molto semplice, quasi banale.

109. Il procedimento per effettuare una misura (cioe' per associare ad una determinata grandezza fisica un numero) consiste nel fare il rapporto fra la quantita' della grandezza che si vuole misurare e una **quantita' fissa della stessa**

grandezza presa da tutti come riferimento. Tale riferimento viene detto **unita' di misura**.

Per tornare all'esempio fatto sopra, dire che la lunghezza della sbarra e' pari a 67.6 cm significa che il rapporto fra tale lunghezza e quella di una lunghezza campione di riferimento che chiamiamo **centimetro** (e che indichiamo con il simbolo cm) e' pari a 67.6 .

Come potete facilmente capire, il numero da associare ad una grandezza fisica tramite questo procedimento dipende dall'unita' di misura, che quindi **viene sempre specificata di seguito al numero**: dire che la lunghezza della sbarra e' 67.6 **non significa nulla**; viceversa, dire che la sbarra e' lunga 67.6 cm significa che la sbarra e' 67.6 volte piu' lunga del campione di lunghezza chiamato centimetro (e indicato con cm).

Quindi: quando riportate un numero che esprime una misura, dovete **sempre** fargli seguire l'unita' di misura con cui e' stato determinato.

5.2 Sistemi di unita' di misura

110. I vari campioni scelti per esprimere la misura delle grandezze fisiche definiscono un cosiddetto **sistema di unita' di misura**.

Tanto per banalizzarlo: un certo sistema di unita' di misura potrebbe essere definito scegliendo come unita' di misura per la lunghezza il cm , per il tempo il s , per la massa il g e cosi' via...

In un altro sistema di unita' di misura, si potrebbe scegliere di misurare la lunghezza in metri (m), il tempo in ore (h), la massa in quintali etc.

Nel corso dei secoli si sono sviluppati e consolidati diversi sistemi di unita' di misura (pensate al sistema anglosassone, in cui la distanza si misura in pollici, la massa in libbre etc.)

111. A un certo punto, si e' pero' avuta la necessita' di definire un sistema di unita' di misura **universalmente accettato in ambito scientifico**: tale sistema e' chiamato **Sistema Internazionale** di unita' di misura e indicato con **SI**.

112. Se in un sistema di unita' di misura si dovessero specificare le unita' di misura di **tutte** le grandezze fisiche, l'elenco sarebbe praticamente infinito. Fortunatamente, pero', tutte le unita' di misura possono essere espresse in funzione di solo 7 unita' di misura dette **di base**. Quindi, per definire un sistema di unita' di misura, e' sufficiente definire le unita' di misura di base.

Per il sistema internazionale, le unita' di misura di base sono:

grandezza fisica	unita' di misura	simbolo
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
tempo	secondo	s
intensita' di corrente	ampere	A
temperatura	grado kelvin	K
quantita' di sostanza	mole	mol
intensita' luminosa	candela	cd

113. Tutte le altre unita' di misura del sistema internazionale si possono esprimere in funzione delle 7 unita' su scritte: per questo motivo, esse vengono dette unita' di misura **derivate**.

Ad esempio, l'unita' di misura per la grandezza fisica "velocita'" e' un'unita' di misura derivata che nel sistema internazionale e' $m\ s^{-1}$, cioe' e' espressa in funzione delle due unita' di misura di base m e s .

5.3 Prefissi: multipli e sottomultipli

114. Dipendentemente dalla quantita' di una certa grandezza che si vuole misurare, spesso non e' conveniente usare una certa unita' di misura, ma piuttosto un suo multiplo o sottomultiplo.

Ad esempio, mentre le dimensioni di un tavolo sono convenientemente espresse in m , l'uso del metro per esprimere distanze fra citta' e' scomodo perche' implica numeri molto grandi. All'estremo opposto, l'uso del metro per esprimere le dimensioni di cellule o molecole, e' ancora scomodo perche' implica numeri molto piccoli.

Capitolo 6

Miscellanea

FIXME (start)

- Arrotondamento $5.4567 \rightarrow 5.46$
- Semplici proprietà/operazioni con i vettori

FIXME (end)