RICHIAMI DI CALCOLO COMBINATORIO

Problema generale: abbiamo un numero finito di insiemi $A_1,\ A_2,\ \dots\ A_k$ contenenti ciascuno un numero finito di elementi $n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_k$. Vogliamo contare il numero degli elementi di eventuali altri insiemi che si possono generare in vario modo a partire dagli insiemi $A_1,\ A_2,\ \dots\ A_k$.

1. Prodotto cartesiano. Siano A e B due insiemi. Sia

$$|A| = n \quad \text{e} \quad |B| = m,$$

dove il simbolo $|X|$ indica la cardinalità, cioè il numero di elementi, dell'insieme X.

Vogliamo contare gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B = \{(a,b)\ ;\ a \in A,\ b \in B\}$. Si ha

$$|A \times B| = nm.$$

2. Disposizioni con ripetizione. Siano A e B due insiemi. Sia

$$|A| = n \quad \text{e} \quad |B| = m.$$

Per fissare le idee supponiamo che $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Vogliamo contare le funzioni da A a B. Indichiamo questo insieme con B^A, cioè

$$B^A = \{f\ :\ f : A \to B\}.$$

Per ogni $f(j)$ si hanno a disposizione m scelte, quindi

$$|B^A| = m^n.$$

Il problema è analogo a quello di contare in quanti modi si possono disporre in ordine n oggetti scegliendoli da un insieme di m oggetti e potendoli anche ripetere. Si parla in questo caso di disposizioni con ripetizione.

3. Disposizioni. Siano A e B due insiemi. Sia

$$|A| = n \quad \text{e} \quad |B| = m.$$

Per fissare le idee supponiamo che $A = \{1, 2, \dots, n\}$ e $B = \{1, 2, \dots, m\}$. Supponiamo $m \geq n$. Vogliamo contare le funzioni iniettive da A a B. Indichiamo l'insieme delle funzioni iniettive da A a B con D_n^m e il numero dei suoi elementi con $(m)_n$. Per $f(1)$ si hanno a disposizione m scelte, per $f(2)$ si hanno a disposizione $m-1$ scelte, per $f(3)$ si hanno a disposizione $m-2$ scelte, e così via fino a $f(n)$, per cui si hanno $m-n+1$ scelte. Quindi

$$|D_n^m| = (m)_n = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1).$$

Il problema è analogo a quello di contare in quanti modi si possono disporre in ordine n oggetti scegliendoli da un insieme di m oggetti, senza ripetizioni (e quindi m deve essere maggiore o uguale a n). Si parla in questo caso di disposizioni.

4. Permutazioni. Sia A e sia
$$|A| = n.$$
Vogliamo contare il numero delle funzioni biiettive di A in sé. È un caso particolare del problema precedente, comunque indichiamo con P_n l'insieme delle biiezioni e con $n!$ il numero di elementi di tale insieme. Abbiamo
$$|P_n| = |D_n^n| = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$
dove $n!$ si chiama fattoriale di n. Il problema è analogo a quello di contare in quanti modi si possono disporre in ordine n oggetti. Si parla in questo caso di permutazioni.

5. Combinazioni, coefficienti binomiali. Sia A con n elementi e sia k un numero intero compreso tra 0 e n. Vogliamo contare il numero dei sottoinsiemi di A che hanno k elementi. Il problema è analogo a quello del punto 3., ma in questo caso l'ordine non conta. Indichiamo l'insieme dei sottoinsiemi di A che hanno k elementi con il simbolo
$$C_k^n,$$
combinazioni di n oggetti a k a k e indichiamo il numero dei suoi elementi con
$$\binom{n}{k}$$
che si chiama coefficiente binomiale e si legge "n sopra k".

Si ha
$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
Per ottenere la formula precedente è sufficiente pensare che se si voglio scegliere k oggetti tenendo conto dell'ordine (sappiamo che ci sono $|D_k^n|$ possibilità) è possibile prima scegliere k oggetti senza ordine ($|C_k^n|$ possibilità) e poi ordinare i k oggetti scelti ($|P_k|$ possibilità), quindi
$$|D_k^n| = |C_k^n| \cdot |P_k|,$$
da cui
$$|C_k^n| = \frac{|D_k^n|}{|P_k|} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
Vale il seguente risultato.

Teorema (del binomio). Dati a e b numeri reali (o complessi) e dato n numero intero positivo vale
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Valgono le seguenti proprietà

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (con $1 \leq k \leq n-1$, regola di Stifel) .

I coefficienti binomiali possono essere rappresentati tramite il triangolo di Tartaglia:

$$
\begin{array}{lllllll}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\dots & & & & & &
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\dots & & & & & &
\end{array}
$$

in cui il coefficiente di posto k-esimo nelle riga n-esima è ottenuto sommando i coefficenti di posto $k-1$-esimo e k-esimo della riga $n-1$-esima (cioè sommando quello che gli sta sopra e quello che gli sta sopra al posto precedente).

Ponendo $a = b = 1$ nel teorema del binomio otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

6. Principio di inclusione-esclusione. Siano A_1, A_2, $\dots$, A_n n insiemi finiti. Il problema quello di contare quanti sono gli elementi dell'unione di tali insiemi. È chiaro che la questione dipenderà da come sono fatte le intersezioni di questi insiemi: se ad esempio le intersezioni fossero tutte vuote (insiemi disgiunti) il numero di elementi dell'unione sarebbe semplicemente la somma degli elementi di ciascun insieme. Il caso più semplice è quello relativo a 2 insiemi:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

il numero di elementi dell'unione di due insiemi è la somma dei numeri degli elementi di ciascuno dei due, meno il numero di elementi dell'intersezione. Il caso relativo a 3 insiemi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

La formula si può generalizzare a n insiemi usando l'induzione:

$$|\bigcup_j A_j| =$$
$$\sum_j |A_j| - \sum_{j<k} |A_j \cap A_k| + \sum_{j<k<h} |A_j \cap A_k \cap A_h| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_j A_j|.$$

ESERCIZI

1) 10 caselle devono essere colorate utilizzando tre colori. In quanti modi lo si può fare?
2) 10 caselle devono essere colorate utlizzando 13 colori, ma si vuole che ogni casella abbia un colore diverso. In quanti modi lo si può fare?
3) Si devono scegliere i 10 colori tra i 13 possibili. In quanti modi lo si può fare?
4) Si estraggono 4 carte da un mazzo di 40. Quante sono le possibili estrazioni?
5) Si lancia 5 volte una moneta. Quante sono le possibili sequenze di testa e croce che si possono ottenere?
6) Si estraggono 5 palline da un'urna contenente 90 palline numerate. Quante sono le possibili estrazioni?
7) Si estraggono 4 carte da un mazzo di 40. Quante sono le possibili estrazioni in cui non ci sono carte di danari?
8) Si estraggono 4 carte da un mazzo di 40. Quante sono le possibili estrazioni in cui è presente almeno un re?
9) Si estraggono 5 palline da un'urna contenente 90 palline numerate. Quante sono le possibili estrazioni contenenti due numeri fissati?
10) Un'urna contiene 10 palline bianche 5 rosse. Quante sono le estrazioni di 5 palline in cui 2 sono bianche e 3 sono rosse?
11) Su una scacchiera avente 5 caselle per lato vengono disposte 5 pedine uguali. In quanti modi lo si può fare? e si si vuole che ogni riga e ogni colonna abbia una sola pedina? Stesse domande nel caso in cui le pedine siano 3 rosse e 2 bianche.
12) Dati 6 punti su piano a 3 a 3 non allineati, quante sono le rette che passano per 2 di questi punti?
13) Quanti sono i numeri di 7 cifre che si scrivono utilizzando solo le cifre 1 e 2? Quanti quelli in cui compaiono esattamente quattro cifre 1 e tre cifre 2?
14) In quanti modi 8 diversi professori possono essere assegnati a 4 diverse scuole? E se ogni scuola riceve almeno un professore?