MODELLO DI SOPRAVVIVENZA CONTINUO

Sia

T n.a. non negativo che esprime la durata aleatoria da un istante iniziale fino al verificarsi di un determinato evento

Esempi:

- durata di funzionamento di un'apparecchiatura dall'istante di accensione in cui l'apparecchiatura inizia a funzionare
- durata di vita di una cavia dall'istante di somministrazione di una determinata sostanza
- durata di vita dall'istante in cui ad un soggetto è diagnosticata una certa malattia
- durata di vita dalla nascita

Si indica con 0 l'istante iniziale

T ha determinazioni: $t > 0$

T ha supporto $[0,+\infty[$

Si definisce

Funzione di sopravvivenza $S(t) = P(T > t), \quad t \geq 0$

Si ha

- $S(0) = P(T > 0) = 1$
- $S(t)$ è una funzione non crescente: se $t_1 < t_2$ allora $S(t_1) \geq S(t_2)$
- $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$, se si esclude l'esistenza di masse aderenti a $+\infty$

Si definisce

Funzione di ripartizione $F(t) = P(T \leq t)$

Poiché:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - S(t)$$

per assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T è equivalente assegnare la funzione di ripartizione oppure la funzione di sopravvivenza

Se la distribuzione del n.a. T è dotata di funzione di densità $f(t)$ continua si ha:

$$F(t) = \int_0^t f(u)du \qquad S(t) = 1 - F(t) = \int_t^{+\infty} f(u)du$$

inoltre

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = -\frac{d}{dt}S(t)$$

Quindi, per assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T è equivalente assegnare la funzione di ripartizione, oppure la funzione di sopravvivenza, oppure la funzione di densità

Si definisce

Funzione di rischio o hazard function $\quad \lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t | T \ge t)}{\Delta t}$

Si ha

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \quad \text{da cui} \quad f(t) = S(t)\lambda(t)$$

<u>Osservazione</u>: interpretazione del significato di $\lambda(t)$

Essendo la distribuzione del n.a. T è dotata di densità $f(t)$ continua si ha:

$$P(t \le T < t+\Delta t | T \ge t) = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{S(t)} = \frac{f(t)\Delta t + o(\Delta t)}{S(t)} \qquad \text{con} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Si ha allora che a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo

$$P(t \le T < t+\Delta t | T \ge t) \cong \frac{f(t)}{S(t)}\Delta t = \lambda(t)\Delta t$$

$\lambda(t)$ misura l'intensità istantanea dei decessi all'istante t per gli individui in vita fino all'istante t

Si ha inoltre

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(S(t))$$

quindi, assegnata $S(t)$ si determina $\lambda(t)$

Essendo $f(t)$ continua, vale anche viceversa, infatti integrando si ottiene

$$\int_0^t \lambda(u)du = -\ln(S(t))$$

da cui si ottiene

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right)$$

In tali ipotesi è allora equivalente assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T assegnando la funzione di sopravvivenza oppure la funzione di rischio

Si definisce

Funzione di rischio integrato $\quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$

Si ha allora

$$S(t) = \exp(-\Lambda(t))$$

MODELLO DI SOPRAVVIVENZA DISCRETO

Sia

T n.a. non negativo che esprime la durata aleatoria da un istante iniziale fino al verificarsi di un determinato evento

Si indica con 0 l'istante iniziale

T ha determinazioni: $0 < t_1 < t_2 < \dots$

Esempi:

- osservazioni di durate con misurazioni arrotondate
- osservazioni di durate raggruppate in intervalli (si considera come durata il punto medio di ciascun intervallo)
- durate misurate con un numero intero di unità (per esempio, durate misurate in settimane)

Si definiscono le

probabilità $q_j = P(T = t_j), \quad j = 1, 2, \ldots$

essendo $\sum_{j=1}^{+\infty} q_j = 1$

Si definisce

Funzione di sopravvivenza $S(t) = P(T > t) = \sum_{t_j > t} q_j \,, t \geq 0$

Si ha

- $S(t)$ è una funzione non crescente, continua a destra; infatti, se $t_k \leq t < t_{k+1}$ si ha

$$S(t) = P(T > t) = \sum_{j>k} q_j = S(t_k)$$

- per assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T è equivalete assegnare le probabilità oppure la funzione di sopravvivenza

Si definisce

Funzione di rischio o hazard function $\lambda(t_j) = P(T = t_j \mid T \geq t_j), \quad j = 1, 2, \ldots$

Si ha

$$\lambda(t_j) = \frac{q_j}{S(t_{j-1})}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

essendo

$t_0 = 0$ e $S(t_0) = 1$

Si ha allora che, assegnate le probabilità, è assegnata la funzione di sopravvivenza ed è pure assegnata la funzione di rischio

Poiché $q_j = S(t_{j-1}) - S(t_j)$ si ha

$$\lambda(t_j) = \frac{q_j}{S(t_{j-1})} = \frac{S(t_{j-1}) - S(t_j)}{S(t_{j-1})} = 1 - \frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Proviamo che assegnata la funzione di rischio risulta assegnata anche la funzione di sopravvivenza.

Sia $t_k \le t < t_{k+1}$ si ha

$$S(t) = S(t_k) = \frac{S(t_k)}{S(t_{k-1})} \cdot \frac{S(t_{k-1})}{S(t_{k-2})} \cdot \cdots \cdot \frac{S(t_1)}{S(t_0)}$$

Essendo $\dfrac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} = 1 - \lambda(t_j),\ \ j = 1, 2, \ldots$ si ottiene

$$S(t) = S(t_k) = (1 - \lambda(t_k)) \cdot (1 - \lambda(t_{k-1})) \cdot \cdots \cdot (1 - \lambda(t_1)) = \prod_{t_j \le t} (1 - \lambda(t_j))$$

È equivalente assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T assegnando la funzione di sopravvivenza oppure la funzione di rischio

<u>Osservazione</u>: interpretazione del significato di $\frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} = 1 - \lambda(t_j)$

Si ha

$$\frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} = \frac{P(T > t_j)}{P(T > t_{j-1})} = \frac{P(T > t_{j-1}, T > t_j)}{P(T > t_{j-1})} = P(T > t_j \mid T > t_{j-1})$$

Si può allora interpretare la formula

$$S(t) = S(t_k) = \prod_{t_j \le t} (1 - \lambda(t_j)) = \prod_{t_j \le t} P(T > t_j \mid T > t_{j-1})$$

come prodotto di probabilità condizionate di sopravvivenza.