Poiché

$$\frac{f_x(t)}{{}_t p_x} = \frac{f_0(x+t)}{S(x+t)} = \mu(x+t)$$

si ha

$$f_x(t) = {}_t p_x \; \mu(x+t)$$

<u>Osservazione</u>: a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo si ha

$$P(T_x \le t + \Delta t | T_x > t) \cong \mu(x+t)\Delta t$$

Si definisce **vita media residua** di una persona di età x

$$\bar{e}_x = E(T_x) = \int_0^{+\infty} t \; dF_x(t)$$

Si ha

$$\bar{e}_x = E(T_x) = \int_0^{+\infty} t \; dF_x(t) = \int_0^{+\infty} 1 - F_x(t) \; dt = \int_0^{+\infty} {}_t p_x \; dt = \int_0^{+\infty} \frac{S(x+t)}{S(x)} \; dt$$

Si definisce **tasso centrale di mortalità** relativo all'intervallo di età $(x, x+1)$

$$m_x = \frac{\int_0^1 \mu(x+t) S(x+t)\, dt}{\int_0^1 S(x+t)\, dt}$$

Più in generale si può definire il **coefficiente di mortalità** relativo all'intervallo di età $(x, x+n)$

$$_n m_x = \frac{\int_0^n \mu(x+t) S(x+t)\, dt}{\int_0^n S(x+t)\, dt}$$

TAVOLE DI MORTALITÀ

In ambito attuariale la funzione di sopravvivenza è generalmente descritta mediante una **tavola di mortalità** o **tavola di sopravvivenza**.

La tavola di sopravvivenza può essere interpretata come la tabulazione sugli interi di una funzione di sopravvivenza $S(x)$ definita per $x \geq 0$, quindi di tipo continuo.

x	$S(x)$
0	1
1	0,99172
2	0,99105
$\vdots$	$\vdots$
$\omega - 1$	0,00015
ω	0

ω è detta età estrema ed è tale che $S(\omega - 1) > 0$ ed $S(\omega) = 0$

Definiamo le grandezze che compaiono in una tavola di sopravvivenza.

x	l_x	d_x	q_x	L_x	m_x	T_x	$\overset{o}{e}_x$
0	100.000	828	0,008280	99.586,00	0,008314	7.881.389,00	78,81
1	99.172	67	0,000676	99.138,50	0,000676	7.781.803,00	78,47
2	99.105	42	0,000424	99.084,00	0,000424	7.682.664,50	77,52
3	99.063	32	0,000323	99.047,00	0,000323	7.583.580,50	76,55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
109	30	15	0,500000	22,50	0,666667	30,00	1,00
110	15	15	1,000000	7,50	2,000000	7,50	0,50
111	0						

Si definiscono le seguenti grandezze

Def. $$l_x = l_0\, S(x) \qquad x = 0, 1, \ldots, \omega$$

dove l_0 è detto radice della tavola ed è fissato opportunamente, per esempio $l_0 = 100.000$

l_x esprime il numero atteso di individui in vita all'età x, a partire da una collettività di l_0 neonati, nell'ipotesi che la sopravvivenza sia descritta dalla funzione di sopravvivenza $S(x)$

Def. $$d_x = l_x - l_{x+1} \qquad x = 0, 1, \ldots, \omega$$

d_x esprime il numero atteso di decessi nell'intervallo di età $]x, x+1]$

Si ha

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Per definire le seguenti grandezze

$$L_x \qquad m_x \qquad T_x \qquad \overset{o}{e}_x$$

occorre assumere che la distribuzione di probabilità, espressa attraverso la funzione di sopravvivenza $S(x)$, $x \geq 0$, sia dotata di funzione di densità continua

Si ha allora

$$f_0(x) = -\frac{d}{dx} S(x) = -\frac{d}{dx} \frac{l_x}{l_0} \qquad \mu(x) = \frac{f_0(x)}{S(x)} = -\frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x$$

$$f_x(t) = -\frac{d}{dt} {}_t p_x = -\frac{1}{l_x} \frac{d}{dt} l_{x+t} \qquad \mu(x+t) = \frac{f_x(t)}{{}_t p_x} = -\frac{1}{l_{x+t}} \frac{d}{dt} l_{x+t}$$

e da queste si può calcolare la vita media alla nascita $\bar{e}_0$ e la vita media residua $\bar{e}_x$ di un individuo di età x

Si ha

$$\bar{e}_0 = \int_0^{\omega} S(x)\, dx = \int_0^{\omega} \frac{l_x}{l_0}\, dx = \frac{\int_0^{\omega} l_x dx}{l_0}$$

Si definisce

Def. $$T_0 = \int_0^{\omega} l_x dx$$

Poiché

$$\bar{e}_0 = \frac{T_0}{l_0}$$

esprime la vita media alla nascita, allora

T_0 (NB: da non confondere con il n.a. durata aleatoria di vita alla nascita) rappresenta il numero atteso di anni vissuti da una collettività di l_0 neonati

Analogamente si ha

$$\bar{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \, dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt = \frac{\int_0^{\omega-x} l_{x+t} dt}{l_x} = \frac{\int_x^{\omega} l_y dy}{l_x}$$

Si definisce

Def. $$T_x = \int_x^{\omega} l_y dy$$

Poiché

$$\bar{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

esprime la vita media residua di un individuo di età x, allora

T_x (NB: da non confondere con il n.a. durata aleatoria di vita per un individuo di età x) rappresenta il numero atteso di anni vissuti da una collettività di l_x individui di età x

Per il tasso centrale di mortalità relativo all'intervallo di età $(x, x+1)$ si ha

$$m_x = \frac{\int_0^1 \mu(x+t) S(x+t)\, dt}{\int_0^1 S(x+t)\, dt} = \frac{\int_0^1 f_0(x+t)\, dt}{\int_0^1 S(x+t)\, dt} = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+t)\, dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{\int_0^1 l_{x+t}\, dt} = \frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t}\, dt}$$

Si definisce

Def. $$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt$$

Poiché

$$L_x = T_x - T_{x+1}$$

L_x esprime il numero atteso di anni vissuti da una popolazione di l_x individui di età x, tra le età x ed $x+1$

Si ha allora

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

Osservazione: poiché nella tavola di sopravvivenza la funzione $S(x)$ è definita sugli interi $x = 0, 1, \dots, \omega$, per calcolare

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} \; dt$$

occorre approssimare l'integrale.

Se si approssima l'integrale mediante l'area del trapezio, ovvero si considera l'interpolante lineare per definire la funzione l_{x+t} per $t \in (0,1)$, si ottiene la seguente approssimazione

$$L_x \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Essendo inoltre $T_x = \int_x^{\omega} l_y \; dy = L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{\omega-1}$

si ottiene la seguente approssimazione

$$T_x \cong \sum_{h=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+h} + l_{x+h+1}}{2}$$

e quindi l'approssimazione della vita media residua $\bar{e}_x$ mediante la **vita media completa**

$$\overset{o}{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{h=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+h} + l_{x+h+1}}{2}$$

<u>Osservazione</u>

poiché si ha

$$S(x)=\frac{S(x)}{S(x-1)}\cdot\frac{S(x-1)}{S(x-2)}\cdots\cdot\frac{S(1)}{S(0)} \qquad \text{per } x=1,2,\dots,\omega-1$$

ed essendo

$$\frac{S(x)}{S(x-1)}=\frac{P(T_0>x)}{P(T_0>x-1)}=\frac{P(T_0>x,T_0>x-1)}{P(T_0>x-1)}=P(T_0>x\,|\,T_0>x-1)=p_{x-1}$$

per $x=1,2,\dots,\omega-1$

si ottiene

$$S(x)=p_{x-1}\cdot p_{x-2}\cdots p_0 \qquad \text{per } x=1,2,\dots,\omega-1$$

Quindi la stima della funzione di sopravvivenza, in un modello non parametrico, potrà essere ottenuta mediante la stima delle probabilità condizionate di sopravvivenza p_x ovvero mediante la stima delle probabilità condizionate di decesso q_x.

STIMA DELLE PROBABILITÀ DI DECESSO
MEDIANTE LO STIMATORE DI KAPLAN-MEIER

Obiettivo: stimare le probabilità q_x , $x = 0,1,\ldots,\omega - 1$

Consideriamo la generica classe di età $]x, x+1]$ e supponiamo di avere osservato in tale classe di età

$d_1, d_2, \ldots, d_k$ decessi alle età $t_1, t_2, \ldots, t_k$ con $x < t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leq x+1$

essendo

n_j, $j = 1, \ldots, k$, il numero di individui in vita all'età t_j che hanno dato luogo ai d_j decessi

Si noti che $t_0 = x$ rappresenta l'istante iniziale

La stima di Kaplan-Meier per la probabilità q_x è

$$\hat{q}_x = 1 - \hat{p}_x = 1 - \prod_{j=1}^{K} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right)$$