ESPOSTI AL RISCHIO

Nella tavola di sopravvivenza sono riportate le seguenti grandezze

$q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ probabilità che un individuo in vita all'età x, deceda con età esatta in $]x, x+1]$

$m_x = \dfrac{d_x}{L_x}$ tasso centrale di mortalità, è un'intensità

Per esprimere q_x dato m_x e viceversa occorre stabilire un legame tra l_x e L_x

Sussistono le seguenti relazioni

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt = \int_x^{x+1} l_y\, dy = T_x - T_{x+1} = l_{x+1} + l_x \int_0^1 t\, f_x(t)\, dt$$

L_x esprime il numero atteso di anni vissuti nell'intervallo di età $]x, x+1]$ dagli l_x individui in vita all'età x; è anche detto **esposizione** o **numero di esposti al rischio** nell'intervallo di età $]x, x+1]$

Per giustificare formalmente tale interpretazione di L_x consideriamo i seguenti n.a.

$T^{(i)}$ durata aleatoria di vita dell'individuo i, $i = 1, 2, \dots, l_x$, nell'intervallo di età $]x, x+1]$

Nota: $T^{(i)}$ ha determinazioni $]0, 1]$

Indicato con $T_x^{(i)}$ la durata aleatoria di vita dell'i-esimo individuo in vita all'età x si ha

$$T^{(i)} = \min\left(T_x^{(i)}, 1\right)$$

Nell'ipotesi che le durate aleatorie di vita degli l_x individui siano ugualmente distribuite con funzione di ripartizione $F_x(t)$ si ha

$$P(T^{(i)} \le t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ F_x(t) & 0 < t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$ ed è inoltre $$P(T^{(i)} = 1) = 1 - F_x(1) = p_x$$

Il numero atteso L_x di anni vissuti nell'intervallo di età $]x, x+1]$ dagli l_x individui in vita all'età x è allora

$$E\left(\sum_{i=1}^{l_x} T^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{l_x} E\left(T^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{l_x}\left[\int_0^1 t\, dF_x(t) + 1\, p_x\right] = l_x \int_0^1 t\ f_x(t)\, dt + l_x \frac{l_{x+1}}{l_x} = l_x \int_0^1 t\ f_x(t)\, dt + l_{x+1}$$

Posto

$$\bar{t}_x = \frac{l_x \int_0^1 t\, f_x(t)\, dt}{d_x}$$

la durata attesa di vita di ciascun individuo che decede in $]x, x+1]$

dalla relazione

$$L_x = l_{x+1} + l_x \int_0^1 t\, f_x(t)\, dt$$

si ottiene

$$L_x = l_x - d_x(1-\bar{t}_x)$$

Si possono esprimere quindi le seguenti relazioni

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{q_x}{1-(1-\bar{t}_x)q_x} \qquad q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{m_x}{1+(1-\bar{t}_x)m_x}$$

Se $\bar{t}_x = 1/2$ (ciò si ha in ipotesi di distribuzione uniforme dei decessi) si ha

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{q_x}{1-1/2\, q_x} \qquad q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{m_x}{1+1/2\, m_x}$$

COMPLETAMENTO DEL MODELLO DI SOPRAVVIVENZA PER ETÀ NON INTERE

Nella tavola di mortalità sono riportati l_x $x = 0, 1, \dots, \omega$

In molti casi si ha la necessità di definire l_x per qualsiasi età $x \geq 0$

<u>Obiettivo</u>: definire l_{x+t} , $x = 0, 1, \dots, \omega$ e $0 \leq t \leq 1$ tale che

l_{x+t} continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$

Interpolazione lineare o ipotesi di distribuzione uniforme dei decessi

$$l_{x+t} = a + b\, t \qquad \Rightarrow \quad l_{x+t} = l_x - t\, d_x$$

$$\Rightarrow \quad l_{x+t} = (1-t)\, l_x + t\, l_{x+1}$$

In tale ipotesi si ha

$$_{s-r}p_{x+r} = \frac{1 - s\, q_x}{1 - r\, q_x} \qquad _s q_x = s\, q_x \qquad \mu(x+t) = \frac{q_x}{1 - t\, q_x} \qquad f_x(t) = q_x$$

$$L_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x = \frac{l_{x+1} + l_x}{2}$$

Interpolazione esponenziale o ipotesi di intensità di mortalità costante

$$l_{x+t} = a \cdot b^t \qquad \Rightarrow \quad l_{x+t} = l_x \, (p_x)^t$$

$$\Rightarrow \quad l_{x+t} = (l_x)^{1-t} \cdot (l_{x+1})^t$$

In tale ipotesi si ha

$$\mu(x+t) = -\log p_x$$

$${}_{s-r}p_{x+r} = e^{-\mu_x (s-r)}$$ con $$\mu_x = -\log p_x$$

$$f_x(t) = e^{-\mu_x t} \mu_x \qquad L_x = \frac{d_x}{\mu_x} \qquad m_x = \mu_x$$

Interpolazione iperbolica

$$l_{x+t} = \frac{1}{a + b\,t} \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1}{l_x} + \left(\frac{1}{l_{x+1}} - \frac{1}{l_x} \right) t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1}{l_{x+1}}\, t + \frac{1}{l_x} (1 - t)$$

In tale ipotesi si ha

$$_{1-r}q_{x+r} = (1-r)\, q_x \qquad\qquad {}_t p_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{l_x}{l_{x+1}} - 1 \right) t}$$

$$\mu(x+t) = \frac{q_x}{p_x + t\, q_x}$$

nota: decrescente con t