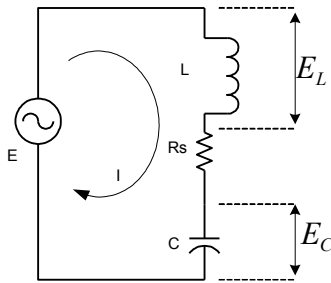
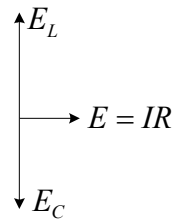


Elettronica per le telecomunicazioni AA 2014 – 2015

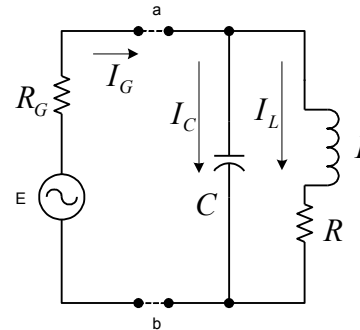
Richiami sulla risonanza serie e parallelo



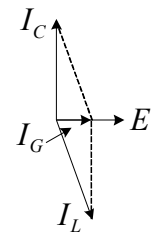
a)



b)



a)



b)

La risonanza

E' conosciuta come risonanza la proprietà delle reattanze di cancellarsi quando sono in serie e sono una induttiva e l'altra capacitiva, lo stesso per la suscettanza in parallelo quando una è induttiva e l'altra capacitiva. Si distinguono due tipi di risonanza :

- La **risonanza serie**,
- La **risonanza parallelo**.


La risonanza, il fattore di merito Q

Definizione del fattore di merito, Q


Poiché le reattanze induttive e capacitive sono essenzialmente dei dispositivi che immagazzinano dell'energia, si ritiene necessario definire l'efficienza con cui questa energia viene immagazzinata in modo da poter confrontare induttanze e condensatori fra loro e progettare i circuiti in modo che siano efficienti.

Come misura dell'efficienza si è scelto un *fattore di merito* o **Q**,

$$Q = 2\pi \frac{\text{massima _ energia _ immagazzinata}}{\text{energia _ dissipata _ per _ ciclo}}$$

Il massimo valore dell'energia immagazzinata è presente in un **induttore** percorso dalla corrente massima è  $\frac{LI_{\max}^2}{2}$

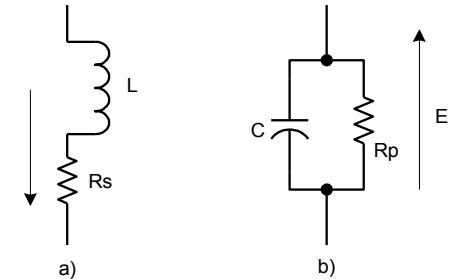
La potenza media dissipata nell'**induttore**, espressa nei termini della massima corrente è  $\frac{R_S I_{\max}^2}{2}$

L'energia dissipata per ciclo è data dalla  $\frac{R_S I_{\max}^2}{2f}$

La risonanza, il fattore di merito Q

Dalla definizione di Q per un **induttore** si ha

$$Q = 2\pi \frac{\frac{LI_{\max}^2}{2}}{\frac{I_{\max}^2 R_S}{2f}} = \frac{2\pi f L}{R_S} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega L}{R_S}$$



Un **condensatore** viene usualmente rappresentato con una resistenza di perdita connessa in parallelo. La massima energia immagazzinata dal **condensatore** si ha quando ai suoi capi si presenta la massima tensione E_{\max} ed è

$$\Rightarrow \frac{CE_{\max}^2}{2}$$

La potenza media dissipata nella resistenza per ciclo R_P è

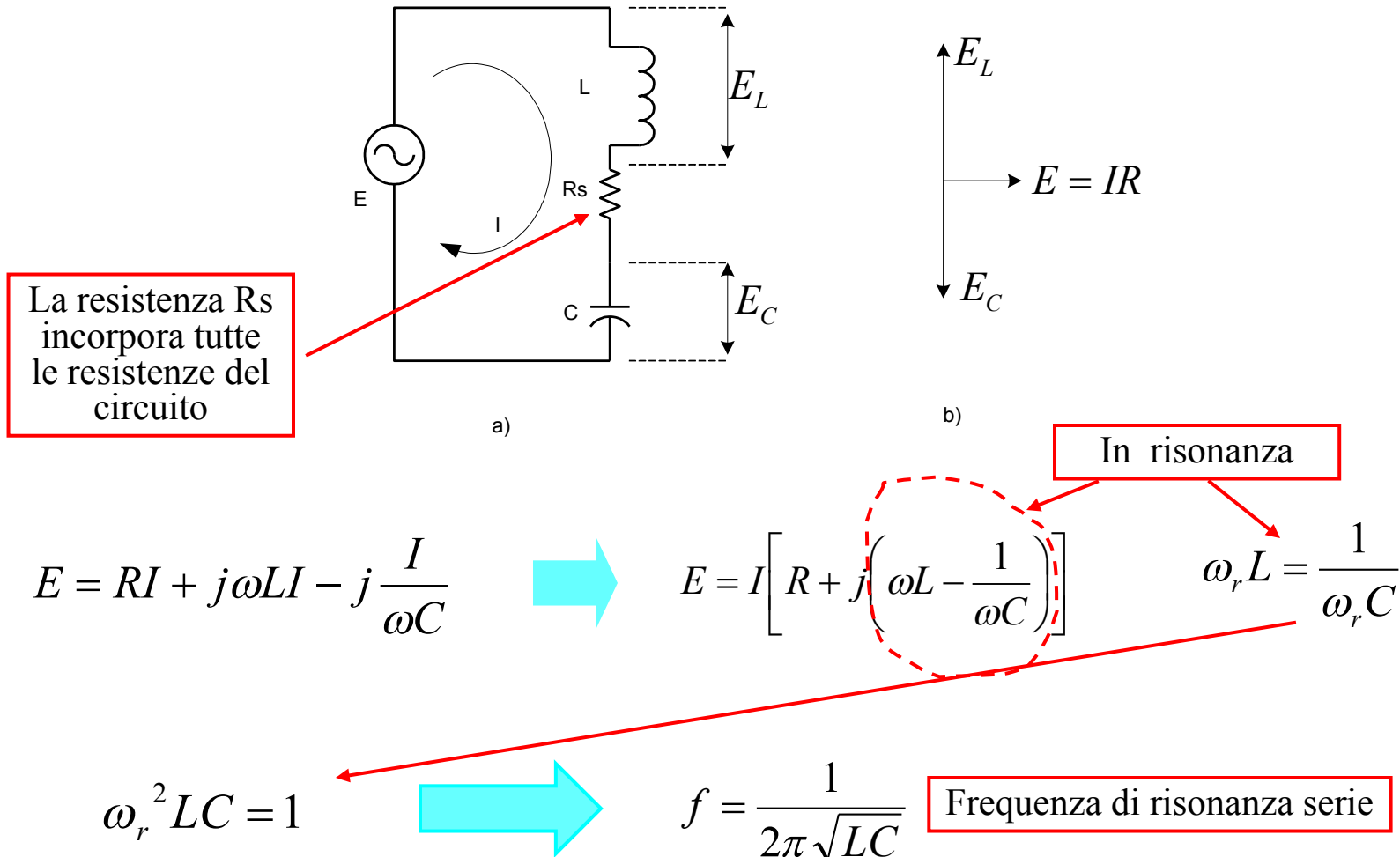
$$\Rightarrow \frac{E_{\max}^2}{2R_P f}$$

Il fattore di merito Q per il **condensatore** sarà

$$Q = 2\pi \frac{\frac{CE_{\max}^2}{2}}{\frac{E_{\max}^2}{2R_P f}} = 2\pi f C R_P \quad \Rightarrow \quad Q = \omega C R_P$$

La risonanza serie

La figura mostra un circuito serie R, L e C pilotato da un generatore E



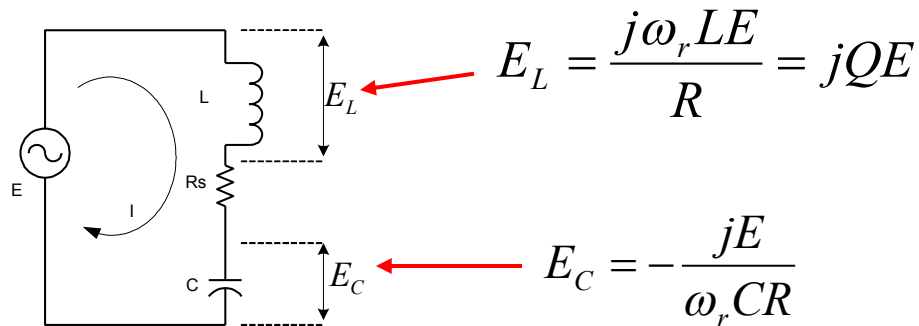
La risonanza serie

Il valore della corrente in risonanza è

$$I_r = \frac{E}{R}$$

La corrente sarà limitata dalla sola resistenza R.

In condizioni di risonanza le tensioni sviluppate ai capi dell'induttanza L e del condensatore C saranno:

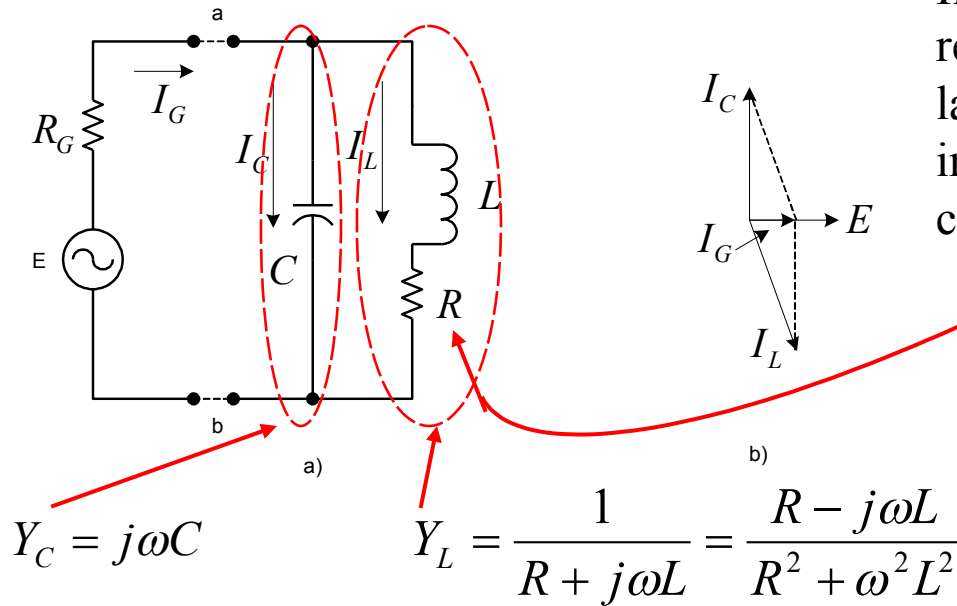


Essendo $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$ si avrà $E_C = -jQE$

Essendo il $Q > 1$ si avrà $E_C > E$ e $E_L > E$

La risonanza parallelo

La figura mostra un circuito parallelo R, L e C pilotato da un generatore E con resistenza interna R_G

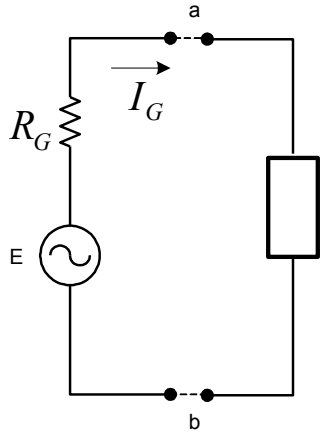


Il condensatore ha solitamente una resistenza trascurabile per cui tutta la resistenza viene inglobata, insieme alla resistenza dovuta al carico, in serie alla induttanza L.

L'ammettenza totale, vista ai terminali a e b sarà $Y = Y_L + Y_C$

$$Y = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \left(\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right)$$

La risonanza parallelo



$$Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \underbrace{\left(\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right)}$$

In risonanza = 0

$$\frac{\omega_p L}{R^2 + \omega_p^2 L^2} - \omega_p C = 0$$

$$\frac{\omega_p L}{R^2 + \omega_p^2 L^2} = \omega_p C \quad \Rightarrow \quad R^2 + \omega_p^2 L^2 = \frac{L}{C} \quad \Rightarrow \quad \omega_p^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

La pulsazione di risonanza parallelo differisce da quella serie per questo termine

Deve essere $\frac{R^2}{L^2} < \frac{1}{LC}$

La risonanza parallelo ed il Q

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

Questa equazione può essere riscritta diversamente

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} \left(\frac{L - R^2 C}{L} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R^2 C}{L} \right)} \Rightarrow f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

Tenendo conto che il Q

$$Q = \frac{\omega_s L}{R} = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{L^2}{R^2 L C}} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \Rightarrow Q^2 = \frac{L}{R^2 C}$$

Questo termine non c'è nella relazione della frequenza di risonanza serie.

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

Per $Q > 10$ si ha $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Frequenza di risonanza serie.

Se $Q < 1$ la risonanza non è possibile

La risonanza parallelo ed il Q

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

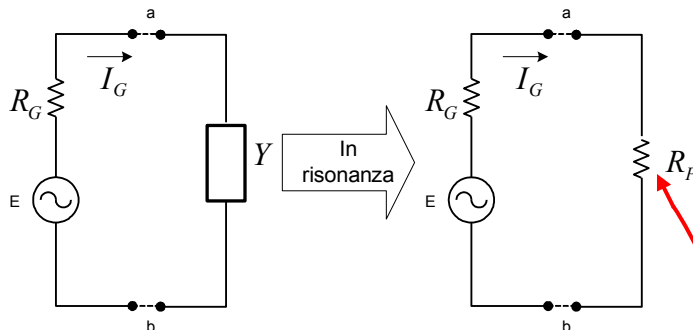
Elevato al quadrato

$$\omega_p^2 LC = \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right) \Rightarrow \omega_p L \omega_p C = \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right) \Rightarrow \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right)$$

A differenza del circuito risonante serie, nel circuito risonante parallelo la reattanza induttiva non è uguale alla reattanza capacitiva.

$$X_L = X_C \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right)$$

In risonanza



~~$$Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \left(\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right)$$~~

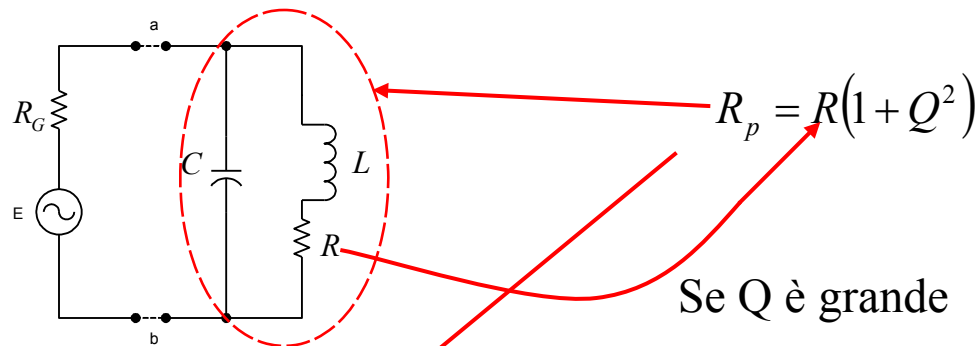
In risonanza

$$Y_p = \frac{R}{R^2 + \omega_p^2 L^2} \Rightarrow Z_p = R_p = \frac{R^2 + \omega_p^2 L^2}{R}$$

La risonanza parallelo ed il Q

$$Z_p = R_p = \frac{R^2 + \omega_p^2 L^2}{R} \Rightarrow R_p = \frac{R^2}{R} + \frac{\omega_p^2 L^2}{R} = R + \frac{\omega_p L}{R} \omega_p L \Rightarrow R_p = R + Q \omega_p L$$

$$R_p = R + Q \omega_p L \mid \cdot \frac{R}{R} \Rightarrow R_p = \frac{R^2}{R} + \frac{\omega_p L}{R} QR \Rightarrow R_p = R + Q^2 R$$



Se Q è grande $\Rightarrow R_p = RQ^2$

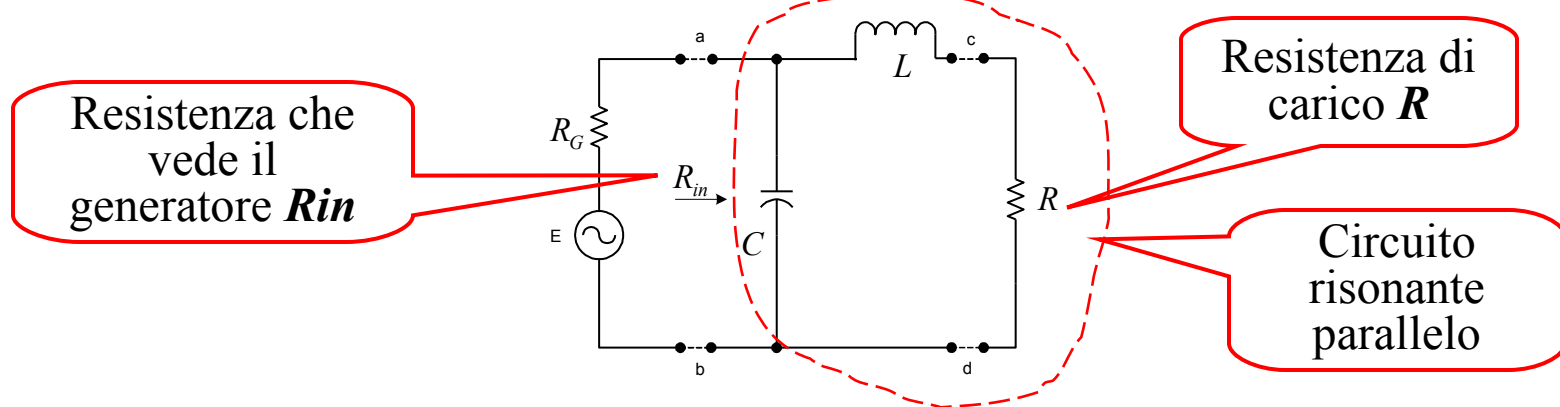
$$Q^2 = \frac{R_p}{R} - \frac{R}{R} = \frac{R_p}{R} - 1 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{R_p}{R} - 1}$$

La risonanza parallelo ed il Q

In risonanza

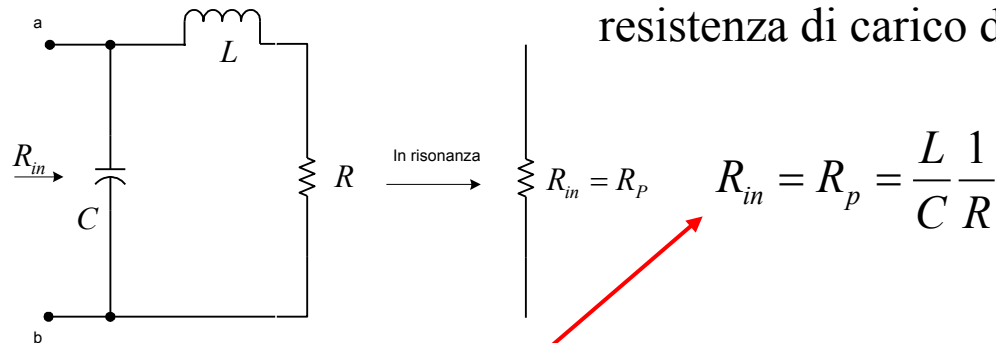
$$Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right)$$
$$R^2 + \omega_p^2 L^2 = \frac{L}{C}$$
$$Z_p = R_p = \frac{R^2 + \omega_p^2 L^2}{R}$$
$$R_p = \frac{L}{CR}$$
$$R_p = \frac{L}{C} \frac{1}{R}$$

Il circuito risonante parallelo può essere disegnato in un modo leggermente diverso

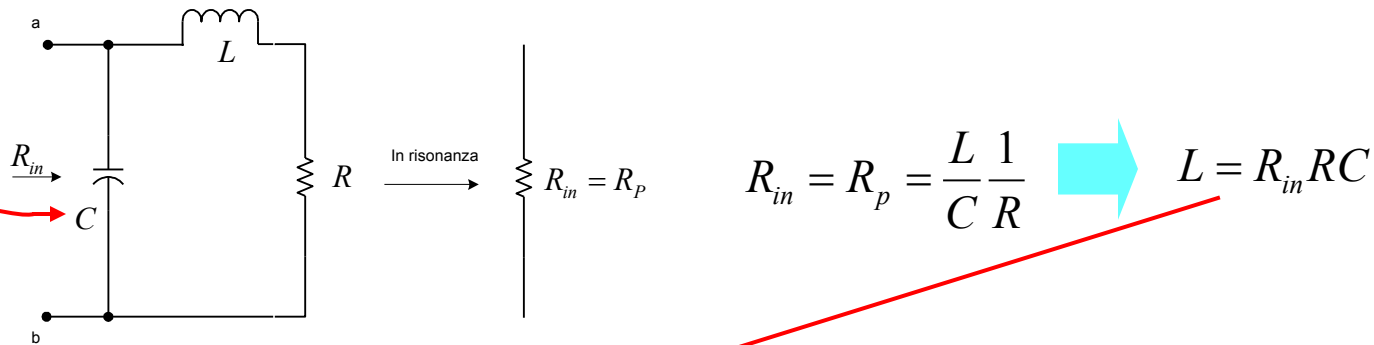


La connessione delle due reattanze di segno opposto rende possibile trasformare, ad una data frequenza, una resistenza di carico R in un'altra resistenza R_{in} da "presentare" al generatore.

La resistenza in **risonanza** R_p appare come la resistenza di carico del generatore.



Il valore di questa resistenza di carico è funzione del rapporto $\frac{L}{C}$ scelto



Pulsazione di
risonanza
parallelo

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{1}{R_{in}RC^2} - \frac{R^2}{R_{in}^2R^2C^2}}$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{R_{in}RC^2} - \frac{1}{R_{in}^2C^2} \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{1}{C^2} \left(\frac{1}{R_{in}R} - \frac{1}{R_{in}^2} \right) \Rightarrow \omega_p^2 C^2 = \left(\frac{1}{R_{in}R} - \frac{1}{R_{in}^2} \right) \cdot \frac{R_{in}^2}{R_{in}^2}$$

$$\omega_p^2 C^2 = \frac{1}{R_{in}^2} \left(\frac{R_{in}^2}{R_{in}R} - \frac{R_{in}^2}{R_{in}^2} \right) \Rightarrow C^2 = \frac{1}{\omega_p^2 R_{in}^2} \left(\frac{R_{in}^2}{R_{in}R} - \frac{R_{in}^2}{R_{in}^2} \right)$$

$$C = \frac{1}{\omega_p R_{in}} \sqrt{\frac{R_{in}}{R} - 1}$$

Valida se $R < R_{in}$

Pulsazione di
risonanza
parallelo

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

$$R_{in} = R_p = \frac{L}{C} \frac{1}{R}$$

$$C = \frac{L}{R_{in} R}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{R_{in} R}{L^2} - \frac{R^2}{L^2}}$$

$$\omega_p^2 = \frac{R_{in} R}{L^2} - \frac{R^2}{L^2}$$

$$\omega_p^2 L^2 = R_{in} R - R^2 \quad \cdot \frac{R^2}{R^2}$$

$$\omega_p^2 L^2 = R^2 \left(\frac{R_{in} R}{R^2} - \frac{R^2}{R^2} \right)$$

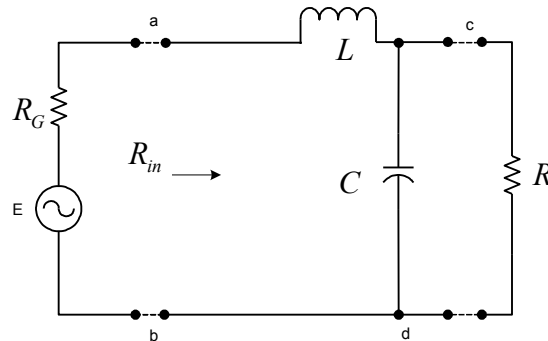
$$\omega_p^2 = \frac{R^2}{L^2} \left(\frac{R_{in} R}{R^2} - \frac{R^2}{R^2} \right)$$

$$L^2 = \frac{R^2}{\omega_p^2} \left(\frac{R_{in}}{R} - 1 \right)$$

$$L = \frac{R}{\omega_p} \sqrt{\frac{R_{in}}{R} - 1}$$

Valida se $R < R_{in}$

Se si verifica la condizione $R > R_{in}$ si ribalta la rete ad L



Le equazioni possono essere sviluppate come per il caso precedente, il risultato finale è simile al precedente solamente vengono invertite R_{in} e R .

$$C = \frac{1}{\omega_p R} \sqrt{\frac{R}{R_{in}} - 1} \qquad L = \frac{R_{in}}{\omega_p} \sqrt{\frac{R}{R_{in}} - 1}$$

Da ricordare che:

- $R_G = R_{in}$ realizza la condizione di adattamento,
- che l'adattamento è valido per una sola frequenza,
- la resistenza di valore più basso è sempre in serie alla L.

Il dimensionamento di L e C per la rete ad L (elle) può essere fatta anche partendo dai valori di R_p (resistenza parallelo) e R_s (resistenza serie) attraverso il Q.

$$Q = \sqrt{\frac{R_p}{R_s} - 1}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q = \frac{X_s}{R_s} & \rightarrow & Q = \frac{\omega_0 L}{R_s} & \rightarrow & L = \frac{Q R_s}{\omega_0} \\ Q = \frac{R_p}{X_p} & \rightarrow & Q = \omega_0 C R_p & \rightarrow & C = \frac{Q}{\omega_0 R_p} \end{array}$$

$$Q = \frac{f_0}{\text{Banda}_{passante}}$$