

## Appunti sulla linearità

---

### Introduzione

Il rumore termico fissa il limite inferiore del più piccolo segnale che può essere processato. La linearità fissa invece il limite superiore, quello del più grande segnale che può essere processato.

### Sistemi lineari e non lineari

Si possono fare dei modelli lineari di quasi tutti i sistemi non lineari se si prende in considerazione una regione limitata della loro gamma di funzionamento. Per esempio un amplificatore RF è un dispositivo non lineare, ma se il segnale di ingresso è sufficientemente piccolo, l'amplificatore può essere rappresentato da un modello lineare.

Anche un semplice filtro LC è un dispositivo non lineare. Se sottoposto a segnali molto ampi si possono manifestare fenomeni di saturazione nell'induttanza e comportamenti non lineari nel dielettrico del condensatore.

La rappresentazione matematica di un sistema lineare è semplice e facilmente comprensibile. Non è così per un sistema non lineare, che viene descritto come una deviazione da un sistema lineare.

I sistemi lineari hanno le seguenti caratteristiche:

- I segnali di corrente e di tensione hanno una sola frequenza, quella del segnale di ingresso.
- E' valido il principio della sovrapposizione degli effetti.
- Le caratteristiche del sistema non variano se al suo ingresso sono applicati più segnali contemporaneamente.

I sistemi che prenderemo in considerazione sono debolmente non lineari, sono dei sistemi che si possono considerare lineari, ma che si comportano come non lineari solamente in certe condizioni e comunque non cambiano drasticamente le loro caratteristiche.

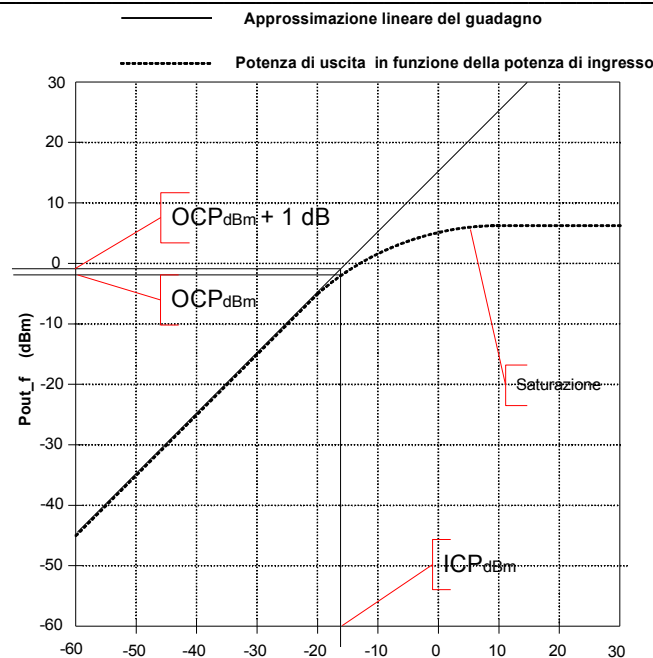
### Compressione del Guadagno

Uno degli effetti più comuni è il modificarsi della caratteristica di trasferimento di tensione in funzione del cambiamento del livello di potenza del segnale di ingresso. Per esempio un amplificatore presenta un guadagno di potenza  $G_p$  ad un livello di ingresso basso, ma questo guadagno di potenza si riduce quando il livello di potenza del segnale di ingresso sale oltre un certo limite. Questo fenomeno è conosciuto come *compressione del guadagno*.

Un possibile concetto per discriminare la linearità di un dispositivo è il *punto di compressione del guadagno a 1 dB*. Il grafico mostra l'andamento della potenza di uscita di un amplificatore in funzione della potenza di ingresso, questo amplificatore è considerato non lineare.

La curva che mostra l'andamento della potenza di uscita è una retta per bassi valori della potenza di ingresso; all'aumentare della potenza di ingresso di  $n$  dB anche la potenza di uscita aumenta di  $n$  dB. La potenza di uscita cresce linearmente fino ad un certo punto poi comincia a manifestarsi la non linearità del dispositivo. La potenza di uscita inizia a non crescere linearmente in funzione della potenza di ingresso, cresce di meno di quanto dovrebbe, la curva della potenza di uscita comincia a piegare ed a scostarsi dalla linearità.

## Appunti sulla linearità



Il punto dove la curva si scosta di 1 dB dalla curva ideale (= andamento lineare rappresentato dalla linea retta) viene chiamato *punto di compressione a 1 dB* (**1 dB Compression Point, CP**).

Ne derivano:

- $ICP_{dBm}$ , il punto di compressione a 1 dB di ingresso, cioè il livello della potenza del segnale di ingresso per cui il guadagno dell'amplificatore diminuisce di 1 dB.
- $OCP_{dBm}$ , il punto di compressione a 1 dB di uscita, corrisponde alla potenza di uscita quando all'ingresso è applicato un segnale di potenza di pari a  $ICP_{dBm}$ .

Queste due grandezze sono legate dalla,

$$OCP_{dBm} = ICP_{dBm} + (G_{P\_dB} - 1)$$

Il punto di compressione a 1 dB dà una indicazione della linearità di un amplificatore, ma non consente di calcolare i valori della distorsione, cosa che è invece possibile fare conoscendo i punti di intercetta di SO e di TO.

### Saturazione

È la potenza di uscita massima della fondamentale che un dispositivo può erogare con un qualsiasi segnale all'ingresso. È la zona orizzontale della caratteristica ingresso uscita nella figura precedente. Viene usata lo stesso, anche se si tratta di una zona di forte non linearità, specialmente negli stadi di uscita degli amplificatori a radio frequenza.

### Distorsione armonica.

Un effetto abbastanza comune dovuto alla non linearità è la distorsione armonica. Quando un segnale molto ampio viene applicato all'ingresso di sistema non lineare, esso genererà all'uscita dei segnali con frequenze diverse da quella applicata all'ingresso.

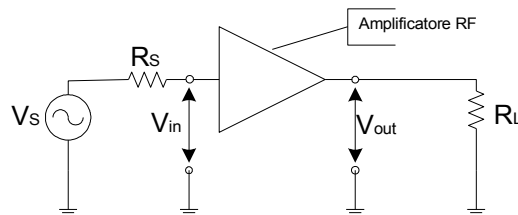
Se per esempio all'ingresso si applicherà un segnale a frequenza  $f_0$ , all'uscita si potranno osservare segnali a DC (frequenza 0),  $f_0$ ,  $2f_0$ ,  $3f_0$ , ....

## Appunti sulla linearità

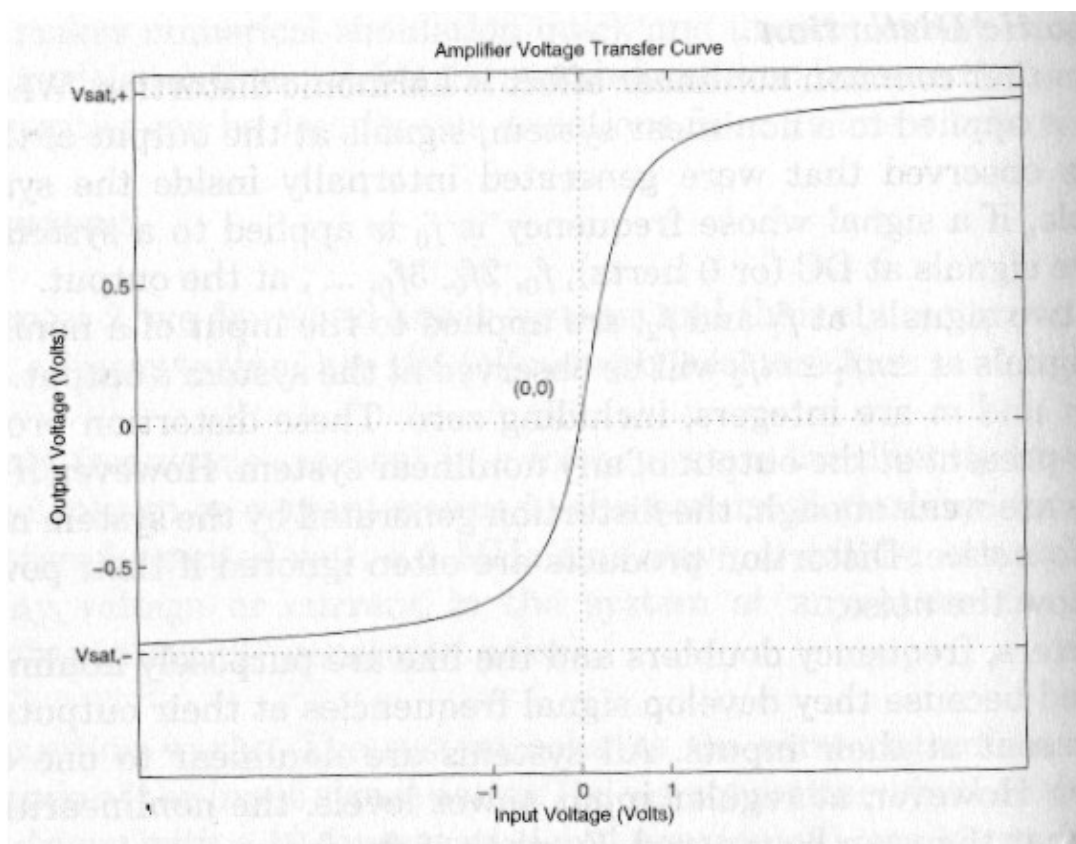
Se all'ingresso del sistema non lineare si applicano due segnali  $f_1$  e  $f_2$ , all'uscita si presenteranno dei segnali a frequenze  $\pm n f_1$  e  $\pm m f_2$ . Le variabili  $n$  ed  $m$  sono interi, incluso lo zero.

### Caratteristica di trasferimento di un amplificatore

La figura rappresenta lo schema di un amplificatore RF



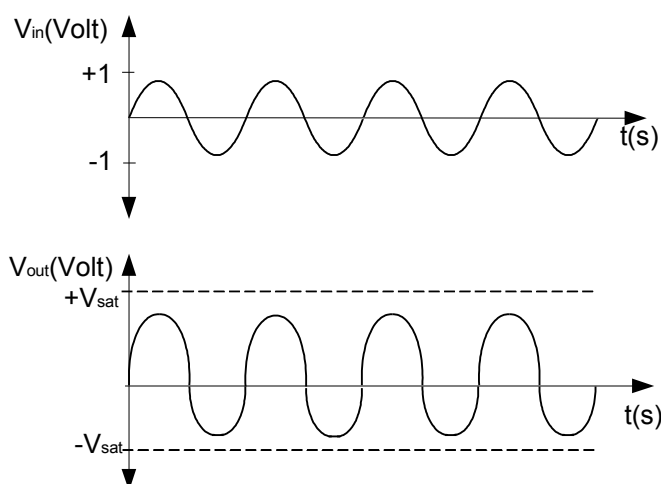
La figura seguente mostra la caratteristica di trasferimento per ampi segnali di un amplificatore. Da notare le zone piatte e la zona con forte pendenza che passa per lo zero. Le zone piatte della stessa sono delle zone di saturazione, la zona ripida è quella dove l'amplificazione dello stadio è definita.



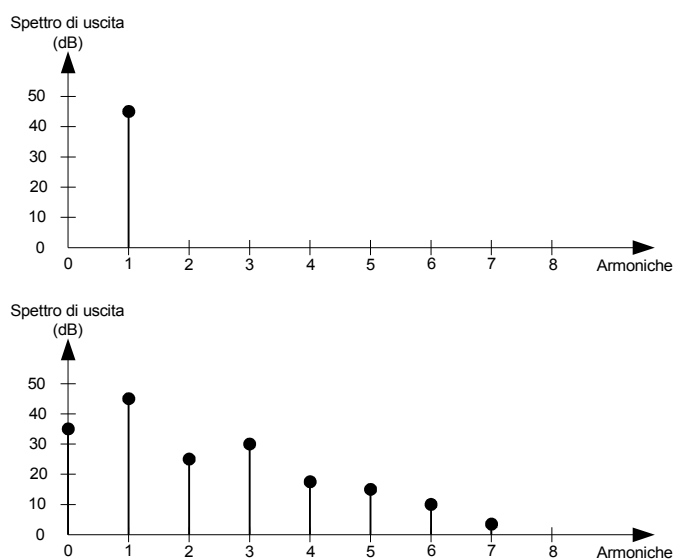
## Appunti sulla linearità

Se si pilota l'amplificatore con un **segnale sinusoidale di grande ampiezza**, si potrà osservare un segnale di uscita come quello nella figura seguente, cioè un segnale distorto. Si verifica la saturazione quando la tensione del segnale supera i livelli  $V_{sat+}$  e  $V_{sat-}$ , questi due livelli non sono simmetrici rispetto allo zero per cui il segnale di uscita risulterà asimmetrico.

Il valori di  $V_{sat+}$  e  $V_{sat-}$  sono correlati con la tensione di alimentazione e con il punto di lavoro stabilito dai circuiti di polarizzazione dell'amplificatore stesso.

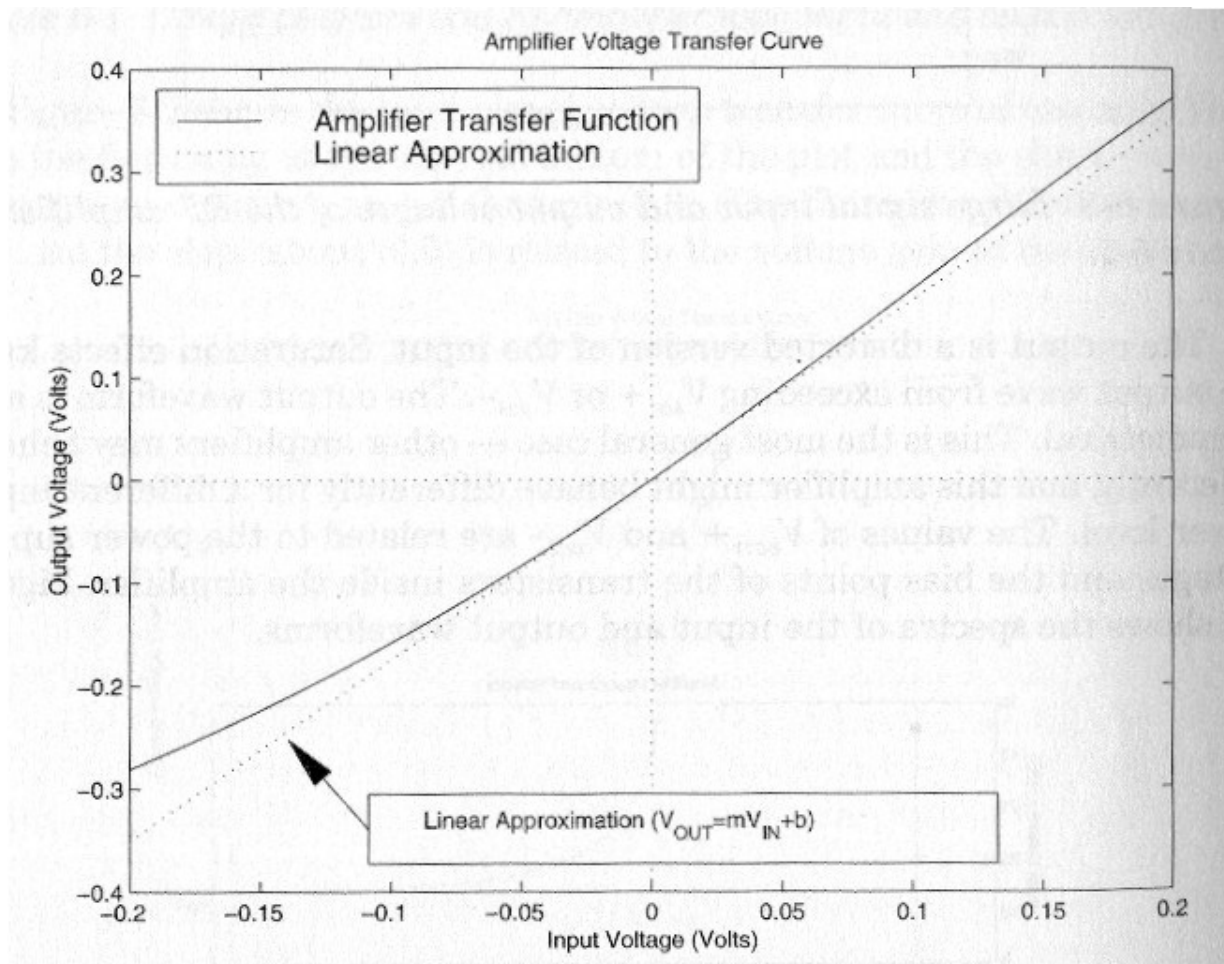


In figura viene rappresentato lo spettro del segnale di ingresso e di uscita. L'ingresso è una sinusoide (una riga sullo spettro) mentre all'uscita oltre sono presenti varie armoniche.



## Appunti sulla linearità

Quando l'amplificatore viene pilotato con un **segnale di ampiezza molto piccola**, un segnale di ampiezza vicino allo zero, l'amplificatore lavora in una condizione di quasi linearità, vedi sotto:



*Esempio relativo alla funzione di trasferimento vista*

Mettere in evidenza che la pendenza della funzione di trasferimento di un amplificatore è direttamente correlata al guadagno di potenza dell'amplificatore. Assumere che l'amplificatore lavora in un sistema con  $Z_0$ .

*Soluzione*

Nella figura è tracciata una linea retta, che passa per lo zero (una curva di primo ordine), la retta coincide con la caratteristiche di trasferimento dell'amplificatore intorno all'origine.

Fissato  $m = \text{pendenza della linea}$ , dalla geometria si ha:  $V_{out}(t) = mV_{in}(t) + b$   
dove  $b$  è il punto di intersezione sull'asse y della retta.

Nel nostro caso  $b = 0$  e si ha  $V_{out}(t) = mV_{in}(t)$

$$\frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} = m$$

facendo riferimento allo schema amplificatore RF il guadagno risulta  $G_P = \frac{\frac{V_{out}^2(t)}{R_L}}{\frac{V_{in}^2(t)}{R_{amp\_in}}}$

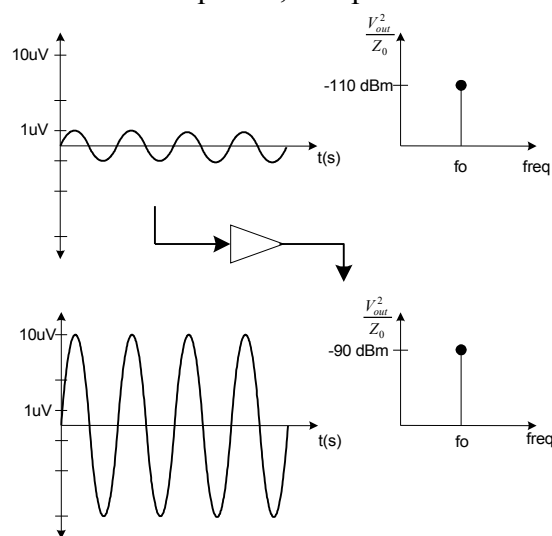
## Appunti sulla linearità

poiché l'amplificatore lavora in un sistema con impedenza caratteristica  $Z_0$  si ha che

$$R_L = R_{amp\_in} = Z_0 \quad \text{da cui} \quad G_P = \frac{V_{out}^2(t)}{V_{in}^2(t)} = m^2$$

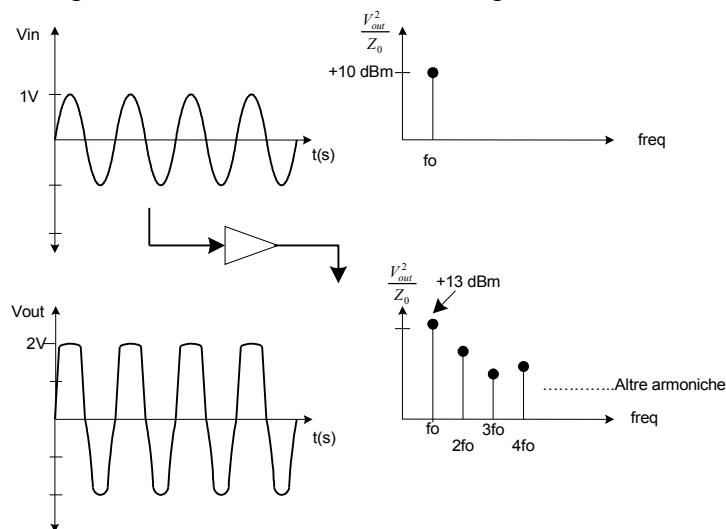
Approssimativamente la pendenza della retta in figura è 1,75 per cui il guadagno di potenza è  $1,75^2 = 3,06 \Rightarrow 4,9\text{dB}$ .

Le due figure seguenti mostrano l'andamento di un dispositivo non lineare. La prima figura fa vedere come un segnale di ingresso di  $1\mu\text{V}$ , equivalente a  $-110\text{ dBm}$  in un sistema a  $50\text{ Ohm}$ , produca un segnale di uscita di  $10\mu\text{V}$ , equivalente a  $-90\text{ dBm}$ . La differenza di livello fra i due segnali è dovuta al guadagno dell'amplificatore che è di  $20\text{ dB}$ . Sia il segnale di ingresso che di uscita, se visti nel dominio della frequenza, non presentano armoniche.



Se nello stesso amplificatore si applica un segnale di ingresso di  $1\text{V}$ , pari a  $+10\text{ dBm}$ , lo si fa lavorare in condizioni di forte non linearità (in saturazione); all'uscita si avrà come risultato un segnale di livello di poco superiore a quello di ingresso,  $2\text{V}$ , ma fortemente distorto. Nel dominio della frequenza il segnale di uscita presenterà diverse righe, tutte multiple della frequenza di ingresso: *le armoniche*.

Questi segnali indesiderati presenti all'uscita sono chiamati prodotti di intermodulazione.



L'amplificatore appena descritto mostra i diversi criteri di un dispositivo non lineare:

## Appunti sulla linearità

- Il suo comportamento cambia in funzione del livello del segnale di ingresso.
- Produce all'uscita un segnale distorto con un contenuto armonico diverso da quello presente in ingresso. Questo è molto evidente con alti livelli di ingresso, mentre è trascurabile o non misurabile con piccoli livelli di ingresso.

Per un singolo segnale di ingresso a frequenza  $f_0$  la distorsione provoca all'uscita una serie infinita di segnali di frequenza  $nf_0$ . Per più segnali di ingresso l'espressione è più complessa.

### Approssimazione dei polinomi

Una qualsiasi funzione di trasferimento di un dispositivo non lineare può essere espressa tramite un polinomio. L'errore di approssimazione la curva caratteristica di trasferimento, sarà tanto più piccolo quanto più grande è il numero dei termini del polinomio.

$y = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots + k_nx^n$  dove  $k_nx^n$  è il termine di  $n^{ordine}$  del polinomio.

### Amplificatore RF

Nel caso di un amplificatore RF l'equazione appena scritta può essere riscritta nel modo seguente

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1V_{in}(t) + k_2V_{in}^2(t) + k_3V_{in}^3(t) + \dots + k_nV_{in}^n(t)$$

Per una caratteristica di trasferimento l'approssimazione lineare è valida se i segnali sono piccoli e vicini al punto 0 della caratteristica stessa. Come i segnali crescono, per tenere in conto la distorsione, si deve descrivere la caratteristica di trasferimento con un polinomio di secondo ordine. Se il segnale da considerare cresce ulteriormente si deve aggiungere al polinomio anche il termine di terzo ordine. In genere i polinomi di terzo ordine descrivono con sufficiente approssimazione lo studio degli amplificatori in regime quasi lineare, per lo studio con segnali molto grandi la analisi con il metodo dei polinomi si può mostrare insufficiente.

### Analisi con un singolo segnale.

Considerando che è possibile approssimare la funzione di trasferimento di tensione di un amplificatore con l'equazione

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1V_{in}(t) + k_2V_{in}^2(t) + k_3V_{in}^3(t) + \dots + k_nV_{in}^n(t)$$

si può studiare il segnale di uscita quando all'ingresso viene applicato un segnale sinusoidale,  
 $V_{in} = \cos(\omega t)$

Il termine  $k_0$ , di ordine 0, è indipendente dal segnale di ingresso. Questo termine rappresenta una tensione continua presente all'uscita dell'amplificatore. In questo contesto l'interesse è orientato ai termini di ordine superiore e quindi lo si trascura. Generalmente lo si può trascurare in pratica se il trasferimento del segnale da uno stadio ad un altro avviene in AC, ma non sempre è così, ad esempio nei circuiti integrati.

Il termine con  $k_1$  rappresenta il guadagno dell'amplificatore.

## Appunti sulla linearità

Per un segnale di ingresso sinusoidale  $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$  il termine  $k_1 V_{in}$  produce una tensione di uscita  $V_{out\_1}(t) = k_1 A \cos(\omega t)$ . Questo termine lineare o di primo ordine non è responsabile di alcuna distorsione sul segnale di uscita. Se all'ingresso viene applicato un segnale  $V_{in}(t)$  il segnale di uscita  $V_{out\_1}(t)$  avrà la stessa frequenza.

Il termine  $k_2 V_{in}^2$  di secondo ordine del polinomio è responsabile per alcuni segnali generati dalla distorsione e presenti all'uscita dell'amplificatore.

Per un segnale sinusoidale di ingresso  $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$  il termine  $k_2 V_{in}^2$  genererà una tensione di uscita  $V_{out\_2}(t) = k_2 A^2 \cos^2(\omega t)$  ovvero  $V_{out\_2}(t) = \frac{k_2 A^2}{2} [1 + \cos(2\omega t)]$

Si vede che il termine di secondo ordine produce energia a frequenze diverse dalla frequenza di ingresso. Si vede che l'energia viene prodotta:

- alla corrente continua, termine  $\frac{k_2 A^2}{2}$ ,
- al doppio della frequenza di ingresso, termine  $\frac{k_2 A^2}{2} \cos(2\omega t)$ .

Chiaramente il termine di secondo ordine è responsabile dell'andamento non lineare in quanto provoca all'uscita dell'amplificatore la comparsa di segnali con frequenze non presenti all'ingresso.

Il termine  $k_3 V_{in}^3$  di terzo ordine del polinomio.

Per un segnale sinusoidale di ingresso  $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$  il termine di terzo ordine produce

$$V_{out\_3}(t) = k_3 A^3 \cos^3(\omega t) \quad \text{ovvero}$$

$$V_{out\_3}(t) = \frac{3k_3 A^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{k_3 A^3}{4} \cos(3\omega t)$$

Il termine di terzo ordine produce energia in uscita a:

- alla frequenza del segnale di ingresso, termine  $\frac{3k_3 A^3}{4} \cos(\omega t)$ ,
- alla frequenza tripla del segnale di ingresso, termine  $\frac{k_3 A^3}{4} \cos(3\omega t)$ .

Similmente al termine di secondo ordine, il termine di terzo ordine è anche responsabile dell'andamento non lineare dell'amplificatore in quanto provoca all'uscita la comparsa di segnali con frequenze non presenti all'ingresso.

Il termine  $k_4 V_{in}^4$ , di quarto ordine del polinomio.

Per un segnale sinusoidale di ingresso  $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$  esso produce all'uscita

$$V_{out\_4}(t) = k_4 A^4 \cos^4(\omega t) \quad \text{ovvero}$$



## Appunti sulla linearità

$$V_{out\_4}(t) = \frac{k_4 A^4}{8} [3 + 4 \cos(2\omega t) + \cos(4\omega t)]$$

Il termine di quarto ordine produce all'uscita energia:

- alla corrente continua, termine  $3 \frac{k_4 A^4}{8}$ ,
- sulla seconda armonica del segnale di ingresso, termine  $4 \frac{k_4 A^4}{8} \cos(2\omega t)$ ,
- alla frequenza quadrupla del segnale di ingresso, termine  $\frac{k_4 A^4}{8} \cos(4\omega t)$ .

Anche il termine di quarto ordine contribuisce alla non linearità del dispositivo.

Il termine  $k_5 V_{in}^5$ , di quinto ordine.

Per un segnale sinusoidale di ingresso  $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$  esso produce all'uscita

$$V_{out\_5}(t) = k_5 A^5 \cos^5(\omega t)$$

$$V_{out\_5}(t) = \frac{k_5 A^5}{16} [10 \cos(\omega t) + 5 \cos(3\omega t) + \cos(5\omega t)]$$

Il termine di quinto ordine produce all'uscita :

- energia alla frequenza di ingresso,
- energia sulla terza armonica del segnale di ingresso,
- energia sulla quinta armonica del segnale di ingresso.

Similmente ai termini di secondo, terzo e quarto ordine anche il termine di quinto ordine dà un contributo alla non linearità.

Il termine  $k_6 V_{in}^6$  : in condizioni di pilotaggio sinusoidale il termine di sesto ordine genera all'uscita

$$V_{out\_6}(t) = k_6 A^6 \cos^6(\omega t)$$

$$V_{out\_6}(t) = \frac{k_6 A^6}{32} [10 + 15 \cos(2\omega t) + 6 \cos(4\omega t) + \cos(6\omega t)]$$

L'uscita avrà energia: corrente continua, seconda armonica, quarta armonica e sulla sesta armonica.

### Alcune osservazioni

Per i termini di **ordine pari**, con  $n$  pari, il termine  $\cos^n(\omega t)$  provoca solamente armoniche **pari** e anche una **componente continua**.

Per i termini di **ordine dispari**,  $n$  dispari, il termine  $\cos^n(\omega t)$  produce, oltre alla **fondamentale**, anche **armoniche dispari**. Non viene generata una componente continua.

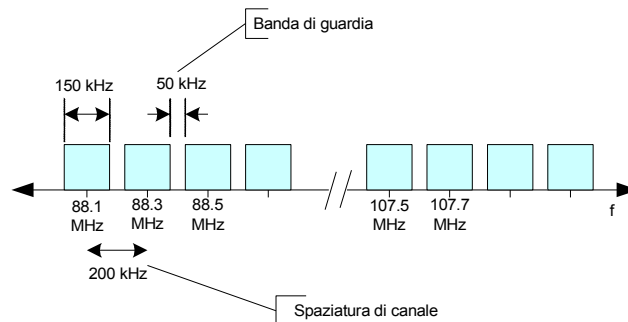
Per un dato valore di  $n$ , il termine  $\cos^n(\omega t)$  produce armoniche fino alla armonica  $n$ , ma non superiori.

La potenza decresce all'aumentare dell'ordine del termine.

## Appunti sulla linearità

### Analisi con due segnali

Si è visto il comportamento di un dispositivo con un solo segnale applicato al suo ingresso, in pratica questa è una condizione rara, di solito all'ingresso di un dispositivo sono applicati più segnali. Ad esempio un ricevitore FM costruito per ricevere segnali nella gamma da 88 a 108 MHz in un tipico ambiente cittadino può avere al suo ingresso diversi segnali (anche qualche decina) provenienti dalle diverse stazioni, ma solo uno di questi sarà quello utile.



Per capire come si comporta un dispositivo non lineare in presenza di più segnali simultaneamente presenti al suo ingresso (segnali con frequenze differenti e con differenti livelli di potenza) si analizzerà il sistema con solamente due segnali all'ingresso, quindi in condizioni più semplici di quelle reali.

Il segnali all'ingresso si ipotizzano sinusoidali  $V_{in}(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$  dove

$f_1$  = frequenza del segnale n° 1,

$f_2$  = frequenza del segnale n° 2,

$A_1, A_2$ , sono le ampiezze dei due segnali sinusoidali

La tensione di uscita sarà sempre espressa dalla

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine  $k_0$

E' il termine che rappresenta la componente continua, valgono le considerazioni fatte in precedenza per l'analisi con un singolo segnale.

Il termine  $k_1 V_{in}^1$

Questo termine rappresenta il guadagno dell'amplificatore. Più grande sarà  $k_1$  maggiore sarà il guadagno. Per un ingresso composto da due segnali sinusoidali si avrà in uscita

$$V_{out\_1}(t) = k_1 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)]$$

Anche in questo caso, come per l'analisi con un singolo tono, il termine di primo ordine non cambia o distorce i segnali di ingresso, semplicemente applica ad essi il fattore di guadagno.

Il termine  $k_2 V_{in}^2$

Quando si applicano due segnali del tipo  $V_{in}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$  ad un dispositivo non lineare, il termine di secondo ordine produce una tensione di uscita di

## Appunti sulla linearità

$$V_{out\_2}(t) = k_2 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)]^2$$

ovvero

$$V_{out\_2}(t) = k_2 \left[ \frac{A_1^2 A_2^2}{2} + \frac{A_1^2 \cos(2\omega_1 t)}{2} + \frac{A_2^2 \cos(2\omega_2 t)}{2} + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \right]$$

Come nel caso dell'analisi con un segnale singolo, il termine di secondo ordine produce energia:

- alla corrente continua,
- alla seconda armonica di ciascuno dei due segnali presenti all'ingresso,  $2\omega_1$  e  $2\omega_2$ ,

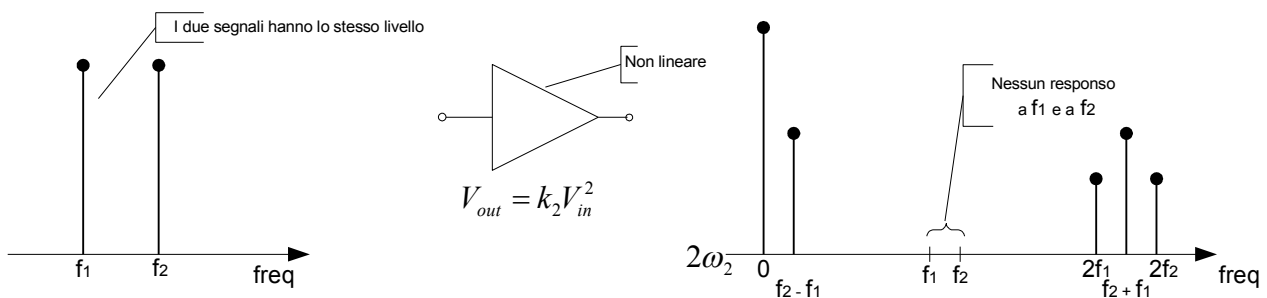
si nota che l'equazione contiene due termini che non erano presenti nell'analisi con un singolo tono:  $\cos[(\omega_1 + \omega_2)t]$  e  $\cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$ .

Si definisce

- la differenza di frequenza  $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$  o  $\Delta f = |f_1 - f_2|$ ,
- la somma di frequenza  $\Sigma\omega = |\omega_1 + \omega_2|$  o  $\Sigma f = |f_1 + f_2|$ .

La figura seguente illustra lo spettro di ingresso e di uscita di un dispositivo con **caratteristica di trasferimento di secondo ordine**, da notare, in uscita l'assenza delle componenti a frequenza  $f_1$  e  $f_2$ .

Un circuito che sfrutta questa caratteristica è il mixer.



### Esempio L.2

Trovare le frequenze generate da una caratteristica di trasferimento di secondo ordine con le seguenti frequenze di ingresso:

a)  $f_1 = 88,1\text{MHz}$ ,  $f_2 = 88,3\text{MHz}$

All'uscita si avrà :

$$2f_1 = 88,1 \cdot 2 = 176,2\text{MHz}; \quad 2f_2 = 88,3 \cdot 2 = 176,6\text{MHz}$$

$$f_2 - f_1 = 88,3 - 88,1 = 0,2\text{MHz} \quad f_2 + f_1 = 88,3 + 88,1 = 176,4\text{MHz}.$$

b)  $f_1 = 107,7\text{MHz}$ ,  $f_2 = 107,9\text{MHz}$

.....

c)  $f_1 = 88,1\text{MHz}$ ,  $f_2 = 107,9\text{MHz}$

## Appunti sulla linearità

Il termine  $k_3 V_{in}^3$

Quando un dispositivo non lineare (con distorsione dovuta solamente al termine di terzo ordine) è pilotato con due segnali sinusoidali di uguale ampiezza, all'uscita si ha

$$V_{out\_3}(t) = k_3 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)]^3$$

$$V_{out\_3}(t) = k_3 \left\{ \left( \frac{3A_1^3}{4} + \frac{3A_1 A_2^2}{4} \right) \cos(\omega_1 t) + \left( \frac{3A_2^3}{4} + \frac{3A_1^2 A_2}{4} \right) \cos(\omega_2 t) + \right.$$

$$+ \frac{A_1^3}{4} \cos(3\omega_1 t) + \frac{A_2^3}{4} \cos(3\omega_2 t) +$$

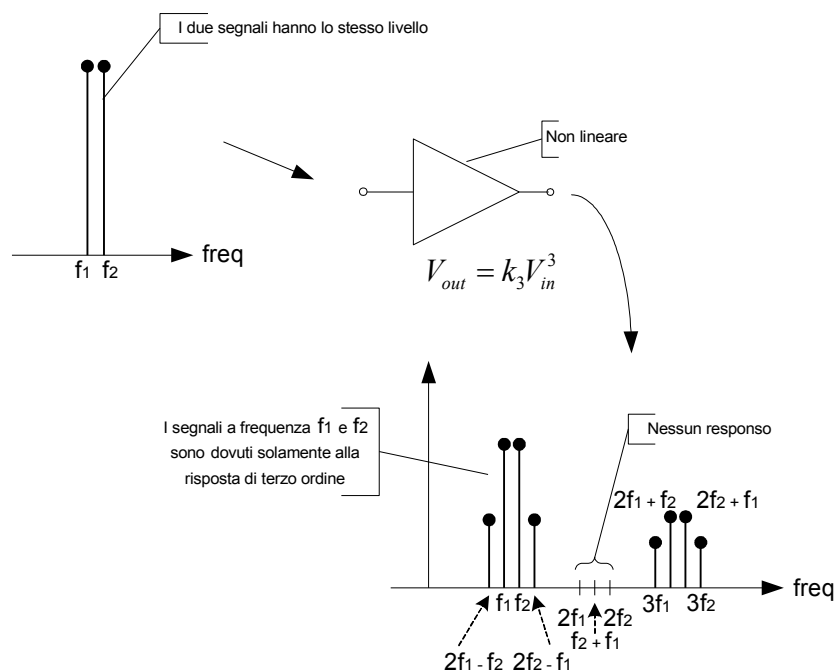
$$+ \left( \frac{3A_1^2 A_2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t] + \left( \frac{3A_1 A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t] +$$

$$+ \left( \frac{3A_1 A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 + \omega_1)t] + \left( \frac{3A_1 A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t]$$

Come per l'analisi con un singolo segnali si vede che il termine di terzo ordine produce energia:

- alla frequenza della fondamentale,
- alle frequenze  $3f_1$  e  $3f_2$
- ci sono diversi prodotti alle frequenze,  $2f_1 + f_2$ ,  $2f_2 + f_1$ ,  $2f_1 - f_2$ ,  $2f_2 - f_1$ .

La figura seguente mostra lo spettro di uscita prodotto da due un segnali sinusoidali applicati all'ingresso di un dispositivo non lineare con caratteristica di trasferimento di solo terzo ordine.



## Appunti sulla linearità

---

### Esempio L.3

Trovare le frequenze generate da un caratteristica di trasferimento di terzo ordine con le seguenti frequenze di ingresso:

a)  $f_1 = 88,1\text{MHz}$ ,  $f_2 = 88,3\text{MHz}$

All'uscita si avrà:

$$3f_1 = 88,1 \cdot 3 = 264,3\text{MHz}; 3f_2 = 88,3 \cdot 3 = 264,9\text{MHz}$$

$$2f_1 + f_2 = 2 \cdot 88,1 + 88,3 = 264,5\text{MHz}; 2f_2 + f_1 = 2 \cdot 88,3 + 88,1 = 264,7\text{MHz}$$

$$2f_1 - f_2 = 2 \cdot 88,1 - 88,3 = 87,9\text{MHz}; 2f_2 - f_1 = 2 \cdot 88,3 - 88,1 = 88,5\text{MHz}$$

$$f_1 = 88,1\text{MHz}, f_2 = 88,3\text{MHz}$$

b)  $f_1 = 107,7\text{MHz}$ ,  $f_2 = 107,9\text{MHz}$

.....

c)  $f_1 = 88,1\text{MHz}$ ,  $f_2 = 107,9\text{MHz}$

.....

d)  $f_1 = 97,9\text{MHz}$ ,  $f_2 = 98,1\text{MHz}$

.....

### Il termine $k_4 V_{in}^4$

Quando un dispositivo non lineare, con sola distorsione di quarto ordine, è pilotato con due segnali sinusoidali di uguale ampiezza all'uscita si ha potenza

- in corrente continua,
- sulla seconda armonica delle due frequenze di ingresso,  $2f_1$  e  $2f_2$ ,
- sulla quarta armonica delle due frequenze di ingresso,  $4f_1$  e  $4f_2$ ,
- $f_1 \pm f_2$ ,
- $2f_1 \pm 2f_2$ ,
- $3f_1 \pm f_2$  e  $3f_2 \pm f_1$ .

### Il termine $k_5 V_{in}^5$

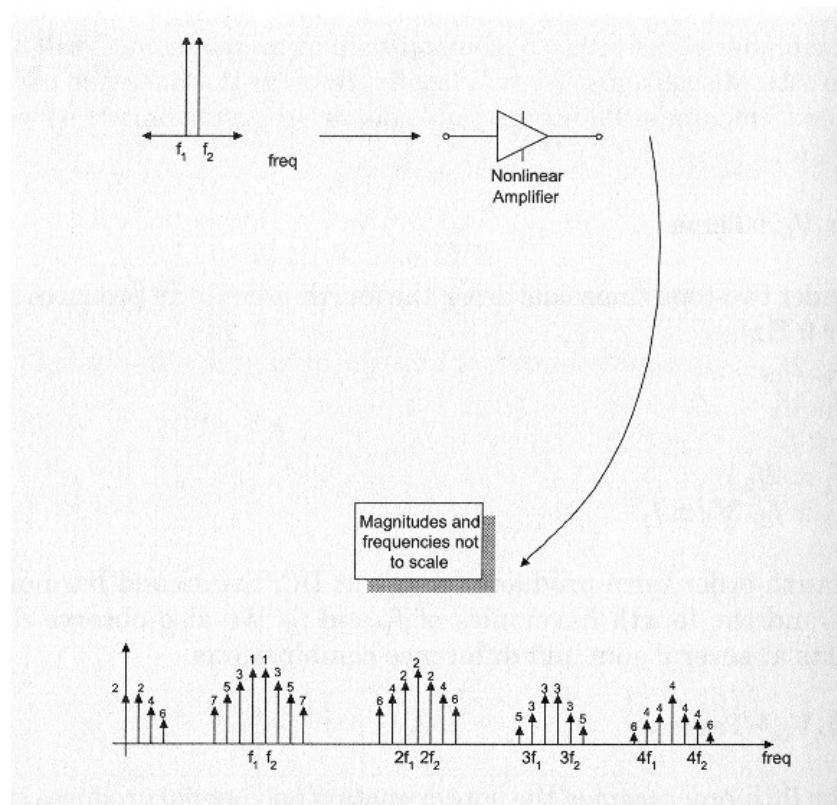
Il termine di quinto ordine produce da solo alle frequenze

- $f_1$ ,  $f_2$ ,
- $2f_1 \pm f_2$  e  $2f_2 \pm f_1$ ,
- $3f_1$ ,  $3f_2$ ,
- $3f_1 \pm 2f_2$  e  $3f_2 \pm 2f_1$ ,
- $4f_1 \pm f_2$  e  $4f_2 \pm f_1$ ,
- $5f_1$  e  $5f_2$ .

## Appunti sulla linearità

### Osservazioni

La figura seguente mostra lo spettro di uscita di un dispositivo non lineare quando è pilotato con due segnali di differente frequenza  $f_1$  e  $f_2$ , le componenti dello spettro sono indicate con il numero corrispondente all'ordine che le genera.



I segnali generati dal processo non lineare tendono a **concentrarsi nelle vicinanze delle armoniche** dei due segnali di ingresso. Quando i due segnali di ingresso sono  $f_1$  e  $f_2$  e  $f_1 \approx f_2$  i segnali spuri saranno raggruppati nella zona di  $n \frac{f_1 + f_2}{2}$  dove  $\Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Questi segnali saranno **separati** di  $\Delta f = |f_1 - f_2|$ .

La **potenza** dei segnali spuri è inversamente proporzionale all'ordine, un segnale quinto ordine sarà di livello superiore ad uno di settimo ordine.

Le spurie avranno i valori di frequenza secondo  $f_{out} = |\pm n f_1 \pm m f_2|$  dove  $\Rightarrow \begin{cases} n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

dove  $m + n$  è l'ordine del prodotto spurio.

### Riepilogo sulla distorsione

Le approssimazioni fatte fin qui vanno bene per dispositivi moderatamente non lineari pilotati con segnali sinusoidali di livello moderato, cioè che non vanno ad interessare le zone di saturazione. Per segnali deboli si possono fare due ulteriori semplificazioni.

## Appunti sulla linearità

Per segnali veramente molto piccoli (ignorando la componente DC) si possono ignorare tutti i termini superiori al primo ordine ed il dispositivo può essere considerato lineare

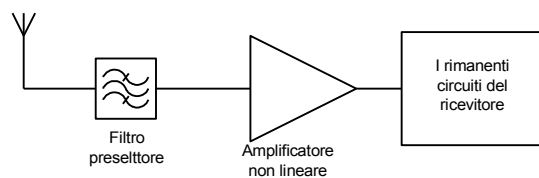
$$V_{out}(t) = k_1 V_{in}(t) \text{ per } \Rightarrow V_{in}(t) \approx 0$$

Quando il segnale è relativamente piccolo, ma di ampiezza sufficiente a generare una distorsione misurabile si può considerare il polinomio fino al terzo ordine

$$V_{out}(t) = k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t)$$

### La preselezione

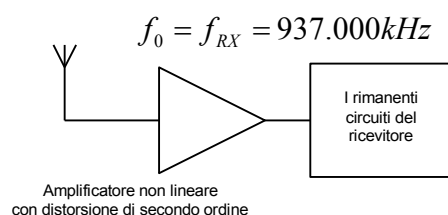
Ogni sistema di ricezione è progettato per ricevere dei segnali in una determinata banda. Per delimitare la capacità di ricezione del ricevitore alla sola banda interessata si inserisce fra l'antenna ed il primo stadio amplificatore un filtro (generalmente passa banda) che viene chiamato filtro preselettore.



### Il filtro preselettore e la distorsione di secondo ordine

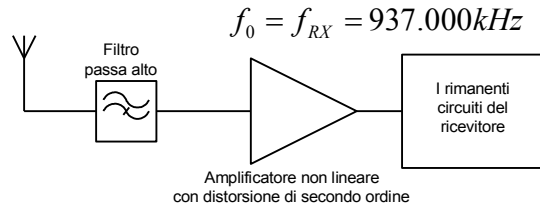
#### Un solo segnale di ingresso

Dalla relazione  $V_{out\_2}(t) = \frac{k_2 A^2}{2} + \frac{k_2 A^2}{2} \cos(2\omega t)$  si è visto che la distorsione di secondo ordine genera una componente continua ed una componente seconda armonica del segnale di ingresso. Se si considera un ricevitore privo di filtro preselettore e sintonizzato sulla frequenza di un canale GSM 900, ad esempio sul canale 10, pari a  $f_0 = 937.000 \text{ kHz}$  e se viene ricevuto un segnale a frequenza  $\frac{f_0}{2}$  con intensità sufficiente da provocare una distorsione di secondo ordine e quindi da generare una seconda armonica, questo segnale verrà ricevuto come un segnale utile.



## Appunti sulla linearità

Per impedire che un segnale a  $\frac{f_0}{2}$  venga ricevuto sarà sufficiente inserire far antenna ed amplificatore un filtro passa alto.



In generale se un ricevitore deve ricevere dei segnali da una frequenza minima  $f_{LOW}$  ad una frequenza massima  $f_{HIGH}$  si dovrà fare attenzione ai singoli segnali che nella gamma

$$da \Rightarrow \frac{f_{LOW}}{2} \Rightarrow \frac{f_{HIGH}}{2}$$

possono generare distorsioni di secondo ordine.

### Due segnali di ingresso

Dall'equazione

$$V_{out\_2}(t) = k_2 \left[ \frac{A_1^2 A_2^2}{2} + \frac{A_1^2 \cos(2\omega_1 t)}{2} + \frac{A_2^2 \cos(2\omega_2 t)}{2} + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \right]$$

che descrive le uscite di secondo ordine per due segnali di ingresso si vede che qualsiasi coppia di segnali che soddisfa la relazione  $f_{tuned} = |f_1 \pm f_2|$  può provocare una interferenza di secondo ordine.

Il rimedio per ridurre gli effetti della distorsione di secondo ordine è un filtro preselettore passa banda con banda passante inferiore a una ottava, si deve far sì che  $f_{HIGH} < 2f_{LOW}$  di conseguenza anche la banda di ricezione sarà contenuta entro questi limiti.

### **Il filtro preselettore e la distorsione di terzo ordine**

Si è visto che, in un dispositivo non lineare, la distorsione di secondo ordine produce la distorsione più forte, i cui effetti si possono però attenuare fortemente tramite l'impiego di un appropriato filtro preselettore. Non è così per la distorsione da intermodulazione di terzo ordine i cui effetti sono limitati solamente dalla linearità del sistema.

### Un solo segnale di ingresso

L'equazione  $V_{out\_3}(t) = \frac{3k_3 A^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{k_3 A^3}{4} \cos(3\omega t)$  descrive il segnale di uscita dovuto alla distorsione di terzo ordine quando all'ingresso dell'amplificatore è presente un solo segnale sinusoidale. Se il segnale di ingresso ha la frequenza

$f_1$  le uscite di terzo ordine all'uscita saranno  $f_1$  e  $3f_1$ . La componente a frequenza  $f_1$  si combina (da considerare la fase) con la componente fondamentale o utile. La componente a



## Appunti sulla linearità

frequenza  $3f_1$  cade al di fuori del filtro preselettore se questo è stato dimensionato secondo i criteri dettati dalla distorsione di secondo ordine ( $f_{HIGH} < 2f_{LOW}$ ).

### Due segnali di ingresso

L'equazione dovuta al termine di terzo ordine

$$V_{out\_3}(t) = k_3 \left\{ \left( \frac{3A_1^3}{4} + \frac{3A_1A_2^2}{4} \right) \cos(\omega_1 t) + \left( \frac{3A_2^3}{4} + \frac{3A_1^2A_2}{4} \right) \cos(\omega_2 t) + \right. \\ \left. + \frac{A_1^3}{4} \cos(3\omega_1 t) + \frac{A_2^3}{4} \cos(3\omega_2 t) + \left( \frac{3A_1^2A_2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t] + \left( \frac{3A_1A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t] + \right. \\ \left. + \left( \frac{3A_1A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 + \omega_1)t] + \left( \frac{3A_1A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t] \right\}$$

produce energia sulle frequenze fondamentali,  $f_1$  e  $f_2$  e a tre volte le frequenze di ingresso,  $3f_1$  e  $3f_2$ . Sono anche presenti segnali alle frequenze,  $2f_1 + f_2$ ,  $2f_2 + f_1$ ,  $2f_1 - f_2$  e  $2f_2 - f_1$ . E' interessante e conveniente osservare questi segnali quando si verifica che le frequenze,  $f_1$  e  $f_2$  di ingresso sono vicine e sono contenute nella banda del filtro preselettore.

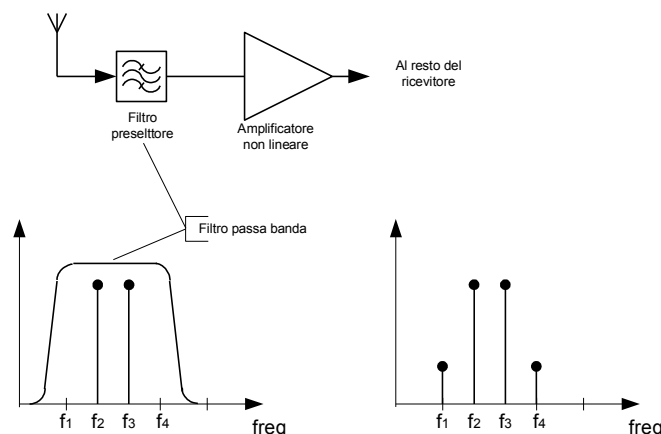
Per semplificare l'analisi conviene fare una approssimazione ponendo  $f_1 \approx f_2$  in quanto si ipotizza che ambedue i segnali cadano nella banda del filtro preselettore. Le componenti di terzo ordine sono:

- $2f_1 + f_2$  e  $2f_2 + f_1$ ; se  $f_1 \approx f_2$  si ha che
  - $2f_1 + f_2 \approx 3f_1 \approx 3f_2$  e che  $2f_2 + f_1 \approx 3f_1 \approx 3f_2$

queste componenti cadono vicino alla terza armonica della frequenza di ingresso e quindi possono essere filtrate dal filtro preselettore se ha una banda inferiore all'ottava.

- $2f_1 - f_2$  e  $2f_2 - f_1$ ; se  $f_1 \approx f_2$  si ha che
  - $2f_1 - f_2 \approx f_1 \approx f_2$  e che  $2f_2 - f_1 \approx f_1 \approx f_2$

queste componenti della distorsione cadono vicino alle frequenze di ingresso e non vengono filtrate dal filtro preselettore. La sola via per ridurle è avere una caratteristica di trasferimento più lineare possibile.



## Appunti sulla linearità

---

La figura mostra i circuiti di ingresso di un ricevitore predisposto per ricevere 4 canali equamente spaziatati nella gamma da  $f_1$  a  $f_4$ . Il filtro passa banda deve avere una larghezza di banda tale da coprire questa banda.

Se noi applichiamo due segnali all'ingresso sui canali  $f_2$  e  $f_3$  si potranno osservare dei prodotti di intermodulazione di terzo ordine a sui canali a frequenza  $f_1$  e  $f_4$ .

Sono state prese in considerazioni in dettaglio le distorsioni di secondo ordine e di terzo ordine perché sono quelle di maggiore interesse pratico, bisogna però ricordare che un dispositivo reale presenta anche distorsioni di ordine superiore.

Se un segnale di ingresso di frequenza  $f_0$  viene applicato ad un dispositivo non lineare il dispositivo genererà armoniche a  $nf_0 \Rightarrow \text{dove} \Rightarrow n = 2, 3, 4, \dots$

Se guardiamo al problema dal punto di vista del ricevitore significa che se esso è sintonizzato non solo su un segnale a frequenza  $f_0$ ,

ma su vari segnali di ingresso con frequenza  $\frac{f_0}{n} \Rightarrow \text{dove} \Rightarrow n = 2, 3, 4, \dots$

che potranno generare interferenze con il segnale utile.

## Appunti sulla linearità

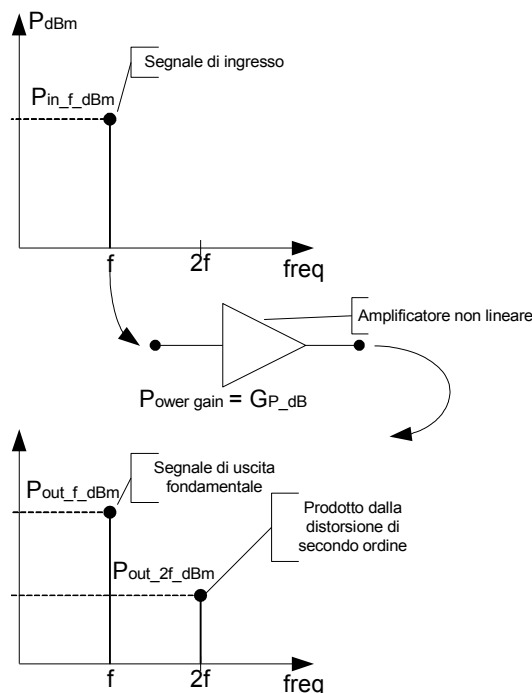
### Punto di intercetta di secondo ordine

Dato un amplificatore (considerato come dispositivo non lineare) e dato un segnale di ingresso di potenza definita, quale sarà la distorsione di secondo ordine? Quale sarà la potenza di uscita delle componenti di secondo ordine?

Il concetto di punto di intercetta (*Intercept Point*, IP) quantifica in maniera pratica la linearità di un dispositivo. La linearità di diversi dispositivi potrà di conseguenza essere comparata usando il valore del punto di intercetta per una data potenza di ingresso del segnale fondamentale.

#### La misura della non linearità

Si applica all'ingresso del dispositivo in esame un segnale sinusoidale e si misura alla sua uscita la differenza in potenza fra il segnale fondamentale a frequenza  $f$  e quello alla frequenza della seconda armonica  $2f$ .



Per eseguire la misura si devono prendere delle precauzioni:

- Il generatore deve essere privo di energia sulla seconda armonica,
- L'analizzatore di spettro non deve generare prodotti di seconda armonica.

Si applica un segnale all'ingresso a frequenza  $f$  e si misura all'uscita l'attenuazione fra il segnale a frequenza fondamentale e la sua seconda armonica,

- $P_{in\_f\_dBm}$ , potenza del segnale di ingresso (frequenza fondamentale),
- $G_P\_dB$ , guadagno di potenza dell'amplificatore,
- $P_{out\_f\_dBm}$ , potenza di uscita del segnale alla frequenza della fondamentale,
- $P_{out\_2f\_dBm}$ , potenza di uscita della seconda armonica.

La potenza di uscita del segnale utile è  $P_{out\_f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} + G_P\_dB$

## Appunti sulla linearità

la potenza della seconda armonica è  $P_{out\_2f\_dBm}$ ,

la distorsione di secondo ordine (SO) sarà definita da  $P_{out\_f\_dBm} - P_{out\_2f\_dBm}$

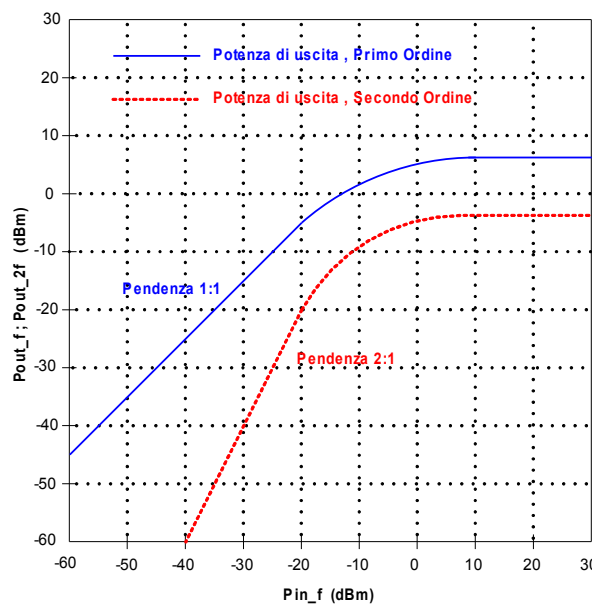
talvolta si preferisce riferire la distorsione all'ingresso anziché all'uscita (è una potenza virtuale, non esiste la seconda armonica all'ingresso)  $P_{out\_2f\_dBm} = P_{in\_2f\_dBm} + G_{p\_dB}$

Se si traccia una curva che rappresenti l'andamento della potenza di uscita in funzione della potenza di ingresso si ottiene un grafico con una pendenza 1:1 (in dB) fino alla saturazione dell'amplificatore, questo grafico rappresenta l'andamento del guadagno.

Il grafico che lega l'uscita di secondo ordine (SO) alla potenza di ingresso avrà invece una pendenza 2:1 (in dB).

Questo è dovuto al fatto che la componente di SO è provocata dal termine  $V_{out} = k_2 V_{in}^2$

Ambedue le caratteristiche una volta superato un certo livello di ingresso diventano orizzontali a causa della saturazione dell'amplificatore.

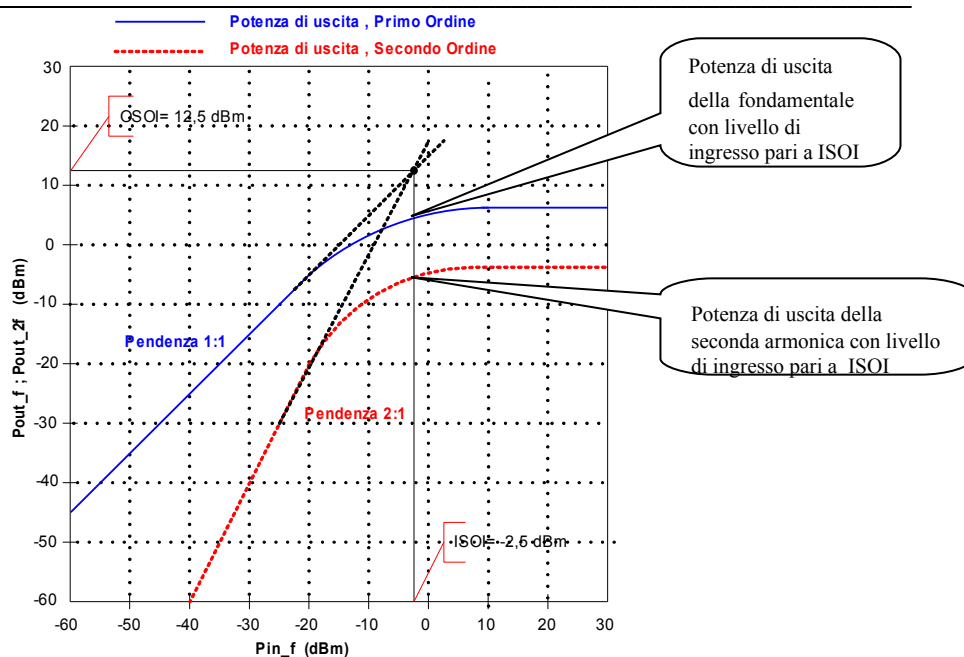


### Punto di intercetta di secondo ordine

Se si prolungano i tratti rettilinei della curva di uscita della fondamentale e della curva dell'uscita di SO, ad un certo punto queste due linee si intersecano. Questo punto viene chiamato *punto di intercetta di secondo ordine* (**Second Order Intercept point = SOI**, si userà il termine inglese), esso rappresenta il punto, ideale, in cui la potenza dell'uscita di SO raggiunge lo stesso livello della potenza di uscita della fondamentale.

Questo punto è la misura delle prestazioni dell'amplificatore nei confronti della distorsione di SO.

## Appunti sulla linearità



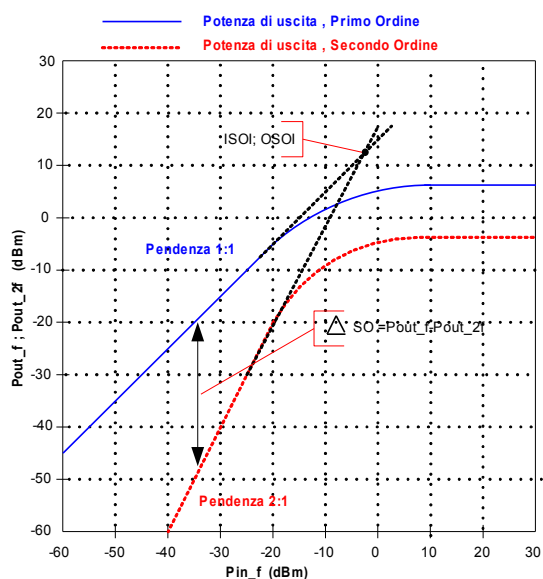
Ci sono due possibili misure di SOI, una di ingresso e uno di uscita,

- $ISOI$  = punto di intercetta di SO di ingresso, ( $ISOI$  = Input Second Order Intercept point),
- $OSOI$  = punto di intercetta di SO di uscita, ( $OSOI$  = Output Second Order Intercept point),

sono espressi in potenza (dBm).

Dalla figura si può ricavare la relazione  $OSOI_{dBm} = ISOI_{dBm} + G_{P\_dB}$

Nota: I punti  $ISOI$  e  $OSOI$  non rappresentano dei livelli di potenza applicabili, ma un artificio matematico per semplificare i calcoli.



## Appunti sulla linearità

La figura mostra la differenza fra il livello di potenza della fondamentale e la distorsione di SO.

Le linee che rappresentano la fondamentale e la distorsione di SO hanno in comune il punto di intercetta ( $ISOI$ ,  $OSOI$ , in dBm). La pendenza della linea della fondamentale è 1 mentre quella della di SO è 2.

L'equazione di una retta che passa per due punti è:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

L'equazione che descrive la potenza di uscita della fondamentale

$$P_{out\_f\_dBm} - OSOI_{dBm} = 1 \bullet (P_{in\_f\_dBm} - ISOI_{dBm})$$

$$\Rightarrow P_{out\_f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} - ISOI_{dBm} + OSOI_{dBm}$$

Similmente per la seconda armonica

$$P_{out\_2f\_dBm} - OSOI_{dBm} = 2 \bullet (P_{in\_f\_dBm} - ISOI_{dBm})$$

$$\Rightarrow P_{out\_2f\_dBm} = 2P_{in\_f\_dBm} - 2ISOI_{dBm} + OSOI_{dBm}$$

Se si definisce  $\Delta_{SO\_dB}$  come  $\Delta_{SO\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{out\_2f\_dBm}$  allora

$$\Delta_{SO\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{out\_2f\_dBm}$$

$$= P_{in\_f\_dBm} - ISOI_{dBm} + OSOI_{dBm} - (2P_{in\_f\_dBm} - 2ISOI_{dBm} + OSOI_{dBm})$$

$$\Delta_{SO\_dB} = ISOI_{dBm} - P_{in\_f\_dBm}$$

Similmente  $\Delta_{SO\_dB}$  si può ottenere espressa in modo diverso

$$OSOI_{dBm} = ISOI_{dBm} + G_{P\_dB} \quad \text{da cui} \quad ISOI_{dBm} = OSOI_{dBm} - G_{P\_dB}$$

$$G_{P\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{in\_f\_dBm}$$

$$ISOI_{dBm} = OSOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm} + P_{in\_f\_dBm}$$

$$\Delta_{SO\_dB} = ISOI_{dBm} - P_{in\_f\_dBm} \quad \text{ovvero} \quad \Delta_{SO\_dB} = OSOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm} - P_{in\_f\_dBm} + P_{in\_f\_dBm}$$

$$\text{ovvero} \quad \Delta_{SO\_dB} = OSOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm}$$

Con altre manipolazioni delle equazioni (Nota 1)

$$\Delta_{SO\_dB} = ISOI_{dBm} - P_{in\_f\_dBm}$$

e

$$\Delta_{SO\_dB} = OSOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm} \quad \text{si ottiene}$$

e

$$P_{in\_2f\_dBm} = 2P_{in\_f\_dBm} - ISOI_{dBm}$$

$$P_{out\_2f\_dBm} = 2P_{out\_f\_dBm} - OSOI_{dBm}$$

## Appunti sulla linearità

### Nota 1

$$\Delta_{SO\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{out\_2f\_dBm}$$

$$P_{out\_f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} + G_{p\_dB}$$

$$P_{out\_2f\_dBm} = P_{in\_2f\_dBm} + G_{p\_dB}$$

$$\Delta_{SO\_dB} = P_{in\_f\_dBm} + G_{p\_dB} - (P_{in\_2f\_dBm} + G_{p\_dB})$$

$$\Delta_{SO\_dB} = P_{in\_f\_dBm} - P_{in\_2f\_dBm}$$

$$P_{in\_2f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} - \Delta_{SO\_dB}$$

$$\Delta_{SO\_dB} = ISOI_{dBm} - P_{in\_f\_dBm}$$

$$P_{in\_2f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} - ISOI_{dBm} + P_{in\_f\_dBm}$$

$$P_{in\_2f\_dBm} = 2P_{in\_f\_dBm} - ISOI_{dBm}$$

$$\Delta_{SO\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{out\_2f\_dBm}$$

$$P_{out\_2f\_dBm} = P_{out\_f\_dBm} - \Delta_{SO\_dB}$$

$$\Delta_{SO\_dB} = OSOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm}$$

$$P_{out\_2f\_dBm} = P_{out\_f\_dBm} - OSOI_{dBm} + P_{out\_f\_dBm}$$

$$P_{out\_2f\_dBm} = 2P_{out\_f\_dBm} - OSOI_{dBm}$$

## Appunti sulla linearità

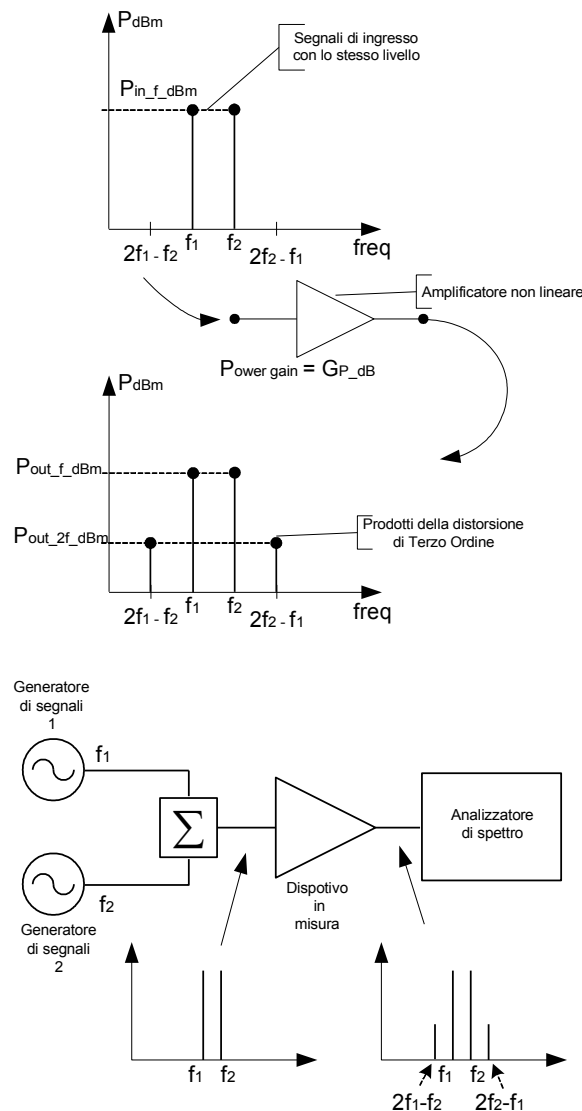
### Punto di intercetta di terzo ordine

A differenza della distorsione di SO, la distorsione di terzo ordine **non si può attenuare completamente** con una appropriata scelta del filtro, essa dipende esclusivamente dalla linearità del dispositivo e quindi su questo bisogna lavorare per ridurla.

Il punto di intercetta di terzo ordine (**Third Order Intercept Point = TOI**, in inglese) è usato per comparare la linearità di dispositivi diversi.

### La misura

Il metodo di misura potrebbe essere quello usato per la distorsione di SO cioè pilotando un amplificatore con un singolo segnale sinusoidale a frequenza  $f$  e misurare in uscita l'attenuazione fra la componente a frequenza  $f$  e quella a frequenza  $3f$ . Siccome però i termini che danno più fastidio sono quelli che non possono essere filtrati dal filtro preselettore, cioè le componenti a frequenza  $2f_1 - f_2$  e  $2f_2 - f_1$  (cascano in banda utile). Queste componenti si presentano quando l'amplificatore è pilotato con due segnali e quindi si preferisce fare la misura con due segnali di ingresso di potenza uguale.



Schema a blocchi di un sistema di misura per la distorsione di TO

Alcune definizioni con riferimento alle figure precedenti:



## Appunti sulla linearità

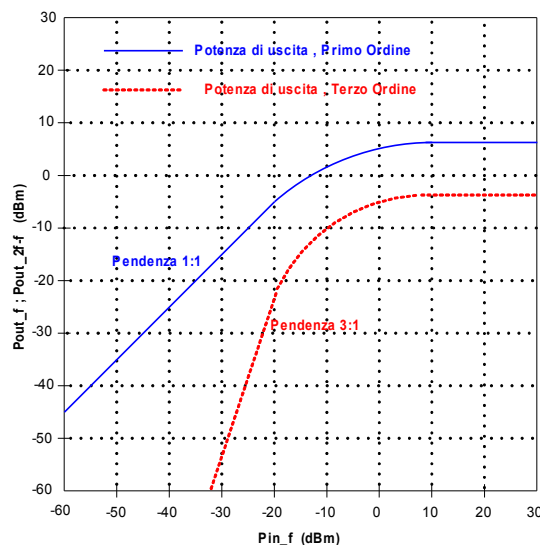
- $P_{in\_f\_dBm}$ , potenza di ingresso di ogni singolo segnale,
- $P_{out\_f\_dBm}$ , potenza di uscita di ogni singolo segnale alla frequenza della fondamentale,
- $G_{P\_dB}$ , guadagno di potenza dell'amplificatore,
- $P_{out\_f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} + G_{P\_dB}$ , relazione fra le potenze di uscita e di ingresso,
- $2f_1 - f_2$  e  $2f_2 - f_1$ , frequenze dei prodotti di terzo ordine, le componenti a queste frequenze hanno potenza uguale,
- $P_{out\_2f-f\_dBm}$ , potenza di ciascuna delle componenti a frequenza  $2f_1 - f_2$  e  $2f_2 - f_1$ .

Come per il SO è conveniente definire anche un livello di potenza di ingresso di terzo ordine

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = P_{in\_2f-f\_dBm} + G_{P\_dB}$$

dove il termine  $P_{in\_2f-f\_dBm}$  è la potenza equivalente di ingresso di TO (è solo una manipolazione matematica, in realtà questo livello di potenza non esiste, non ci sono segnali all'ingresso con la frequenza  $2f_1 - f_2$  oppure con  $2f_2 - f_1$ ).

Se si misurano  $P_{in\_f\_dBm}$ ,  $P_{out\_f\_dBm}$  e  $P_{out\_2f-f\_dBm}$  per molti e diversi valori di potenza e si traccia un grafico di queste quantità in funzione di  $P_{in\_f\_dBm}$  si ottiene una rappresentazione come quella della figura seguente, i livelli di potenza sono espressi in dBm.



Nel grafico si nota che la potenza di uscita della fondamentale sale con pendenza 1:1 nei confronti dell'incremento della potenza di ingresso, mentre la potenza di uscita delle componenti di TO salgono con pendenza 3:1. Questo dipende dal fatto che le componenti di Terzo Ordine sono generate dal termine  $k_3 V_{in}^3$ .

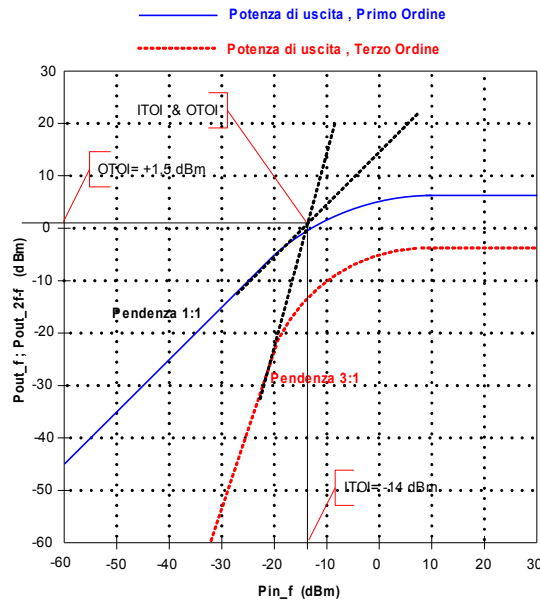
Ambedue le curve dopo un certo livello si appiattiscono a causa della saturazione. Prima della saturazione è presente una regione fortemente non lineare.

### Punto di intercetta di terzo ordine (TOI)

Se si prolungano i tratti rettilinei della curva di uscita della fondamentale e della curva dell'uscita di TO, ad un certo punto queste due linee si intersecano. Questo punto viene chiamato *punto di intercetta di terzo ordine* (**Third Order Intercept point = TOI**, si userà il termine inglese), esso rappresenta il punto, ideale, in cui la potenza dell'uscita di TO raggiunge lo stesso

## Appunti sulla linearità

livello della potenza di uscita della fondamentale. Questo punto è la indicazione delle prestazioni dell'amplificatore nei confronti della distorsione di TO.



Ci sono due possibili misure di TOI, una di ingresso e uno di uscita,

- $ITOI$  = punto di intercetta di TO di ingresso, ( $ITOI$ = Input Third Order Intercpet point),
  - $OTOI$  = punto di intercetta di SO di uscita, ( $OTOI$ = Output Third Order Intercpet point),
- sono espressi in potenza (dBm).

Dalla figura si osserva che  $OTOI_{dBm} = ITOI_{dBm} + G_{P\_dB}$

I punti  $ITOI$  e  $OTOI$  non rappresentano dei livelli di potenza applicabili, ma un artificio matematico per semplificare i calcoli.

Le linee rette che rappresentano la fondamentale e la distorsione di TO hanno in comune il punto di intercetta ( $ITOI$ ,  $OTOI$ , in dBm). La pendenza della linea della fondamentale è 1 mentre quella della di TO è 3.

L'equazione che descrive la potenza di uscita della fondamentale  $P_{out\_f\_dBm}$  è, (dalla equazione della retta che passa per due punti,  $y - y_1 = m(x - x_1)$ )

$$P_{out\_f\_dBm} - OTOI_{dBm} = 1 \cdot (P_{in\_f\_dBm} - ITOI_{dBm}) \quad \text{pendenza } m = 1$$

$$\Rightarrow P_{out\_f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} - ITOI_{dBm} + OTOI_{dBm} \quad \text{Eq. 1}$$

Con lo stesso criterio si scrive l'equazione della potenza di TO, solamente la retta ha pendenza 3.

L'equazione per il TO  $P_{out\_2f\_dBm}$  è,

$$P_{out\_2f\_dBm} - OTOI_{dBm} = 3 \cdot (P_{in\_f\_dBm} - ITOI_{dBm}) \quad \text{pendenza } m = 3$$

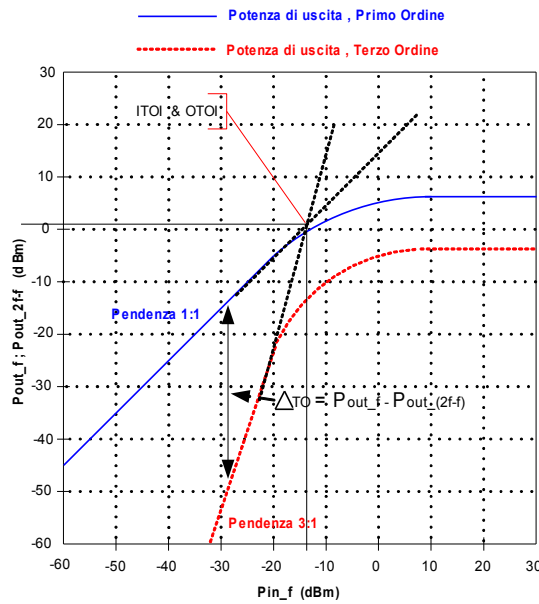
$$\Rightarrow P_{out\_2f\_dBm} = 3P_{in\_f\_dBm} - 3ITOI_{dBm} + OTOI_{dBm} \quad \text{Eq. 2}$$

Si definisce  $\Delta_{TO\_dB}$  come la differenza fra la potenza di uscita della fondamentale e la potenza di uscita delle componenti di TO,

## Appunti sulla linearità

$$\Delta_{TO\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{out\_2f\_f\_dBm}$$

Eq. 3



Inserendo la Eq 1 e la Eq 2 nella Eq 3 si ha:

$$\Delta_{TO\_dB} = P_{in\_f\_dBm} - ITOI_{dBm} + OTOI_{dBm} - (3P_{in\_f\_dBm} - 3ITOI_{dBm} + OTOI_{dBm})$$

semplificando

$$\Delta_{TO\_dB} = 2(ITOI_{dBm} - P_{in\_f\_dBm})$$

Eq. 4

Avremmo anche

$$OTOI_{dBm} = ITOI_{dBm} + G_{P\_dB}$$

$$ITOI_{dBm} = OTOI_{dBm} - G_{P\_dB} \quad G_{P\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{in\_f\_dBm}$$

$$ITOI_{dBm} = OTOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm} + P_{in\_f\_dBm}$$

$$\Delta_{TO\_dB} = 2(ITOI_{dBm} - P_{in\_f\_dBm})$$

$$\Delta_{TO\_dB} = 2(OTOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm} + P_{in\_f\_dBm} - P_{in\_f\_dBm})$$

$$\Delta_{TO\_dB} = 2(OTOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm})$$

Eq. 5

Combinando la Eq.3 con la Eq.5 si ha

$$P_{out\_2f\_f\_dBm} = P_{out\_f\_dBm} - \Delta_{TO\_dB}$$

$$P_{out\_2f\_f\_dBm} = P_{out\_f\_dBm} - 2(OTOI_{dBm} - P_{out\_f\_dBm})$$

e, semplificando

$$P_{out\_2f\_f\_dBm} = 3P_{out\_f\_dBm} - 2OTOI_{dBm}$$

## Appunti sulla linearità

### Un richiamo sulla distorsione di intermodulazione

Si è visto che se si applica all'ingresso di un dispositivo non lineare (ad esempio un amplificatore) una coppia di segnali sinusoidali di frequenza  $f_1$  e  $f_2$  e se si stabilisce che  $\Delta f = f_2 - f_1$  si avrà all'uscita, dovuto ai prodotti di intermodulazione, uno spettro di frequenze composto, oltre che da  $f_1$  e  $f_2$  da prodotti di ordine **dispari** :

$$\begin{array}{ll} 2f_2 - f_1 = f_2 + \Delta f & 2f_1 - f_2 = f_1 - \Delta f \\ 3f_2 - 2f_1 = f_2 + 2\Delta f & 3f_1 - 2f_2 = f_1 - 2\Delta f \\ 4f_2 - 3f_1 = f_2 + 3\Delta f & 4f_1 - 3f_2 = f_1 - 3\Delta f \end{array}$$

Come si vede si trovano tutte attorno a  $f_1$  e  $f_2$ . Altri prodotti di intermodulazione cadono allo stesso modo attorno alla armoniche di  $f_1$  e  $f_2$ .

### Un richiamo su dB e dBm

Il decibel(dB) è una misura di quanto è più grande o più piccola la potenza  $P_2$  se comparata con la potenza  $P_1$ , si definisce  $N_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$

Le potenze  $P_1$  e  $P_2$  possono essere potenze di ingresso e di uscita di un sistema qualsiasi.

Se  $P_2 > P_1$  il sistema ha un guadagno e  $N_{dB}$  sarà un numero positivo, se  $P_2 < P_1$  il sistema avrà un guadagno rappresentato da un numero,  $N_{dB}$  negativo. (Il logaritmo di un numero minore di 1 è negativo). E' generalmente conveniente rappresentare il guadagno con numeri positivi e negativi anche quando il numero negativo, che rappresenta una attenuazione, potrebbe essere espresso come

$$A_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

Ad esempio se si ha,  $P_1 = 0,1W$  e  $P_2 = 10W$ ,

il guadagno sarà :  $G_P = \frac{10}{0,1} = 100$  oppure in dB  $G_{P_{dB}} = 20$ .

L'equazione  $N_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$  viene usata per esprimere la potenza  $P_2$  in dB relativi ad una potenza di riferimento  $P_1$ . La designazione **dBm** viene usata per i calcoli con potenza di riferimento  $P_1 = 1mW$ . Ad esempio se si ha  $P_2 = 10\mu W$  si ha

$$N_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{10 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-3}} = 10 \log_{10} 10^{-2} = -20dBm$$

questo significa che il segnale con potenza  $P_2 = 10\mu W$  è **20dB** più basso rispetto ad  $1mW$ , oppure che  $10\mu W$  equivale a **-20dBm**.

Il livello di potenza di  $1mW$  è rappresentato da **0dBm**. Riscrivendo le equazioni di cui sopra si ha

$$N_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\frac{P_2}{1mW}}{\frac{P_1}{1mW}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{1mW} - 10 \log_{10} \frac{P_1}{1mW} = P_{2_{dBm}} - P_{1_{dBm}}$$

il risultato e che se due livelli di potenza sono espressi in **dBm** la loro differenza si esprime in **dB**.

Una delle ragioni per preferire l'espressione delle quantità in **dB** è la maggiore facilità è comprensibilità delle rappresentazioni grafiche.

## Appunti sulla linearità

Supponiamo che le potenze  $P_1$  e  $P_2$  siano legate dalla  $P_2 = a(P_1)^3$  dove  $a$  è una costante.

Il grafico di  $P_2$  in funzione di  $P_1$  su di un piano con coordinate rettangolari sarà un grafico non lineare. Ma se ambedue le variabili vengono espresse in forma logaritmica e se si traccia  $(\log P_2, \log P_1)$  su coordinate rettangolari, oppure se  $P_2$  e  $P_1$  vengono espresse su coordinate logaritmiche, il risultato grafico sarà una linea retta la cui pendenza sarà uguale all'esponente (3 nel caso nostro) e che intercetterà l'asse verticale nel punto  $a$ .

### Il punto di intercetta di terzo ordine

Come si è già visto negli appunti sulla linearità, quando due segnali di uguale ampiezza sono applicati ad un sistema le tensioni di uscita dovute alle componenti fondamentali sono tra loro uguali e proporzionali alle ampiezze dei segnali di ingresso,  $V_1 = V_2 = V$ . Inoltre le tensioni di uscita di ciascuno dei prodotti di terzo ordine sono tra loro uguali e proporzionali al cubo dei segnali di ingresso  $V_1 = V_2 = V$ . Si trascurano i prodotti di ordine superiore al terzo.

Ogni segnale di ingresso fornisce una potenza di ingresso  $P_{in}$  (in Watt) che varia con il quadrato di  $V$  che se espressa in  $dBm$  diventa  $P_{in\_dBm} = 10 \log_{10} \frac{P_{in}}{10^{-3}} = 10 \log_{10} \frac{V^2}{2R_{in} 10^{-3}}$

$$\begin{aligned} P_{in\_dBm} &= 10 \log_{10} V^2 - (10 \log_{10} R_{in} + 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10} 10^{-3}) = \\ &= 10 \log_{10} V^2 - (10 \log_{10} R_{in} + 3 - 30) = \\ &= 10 \log_{10} V^2 - 10 \log_{10} R_{in} + 27 \end{aligned} \quad \text{Eq.1}$$

La potenza di uscita di ogni componente fondamentale è data dalla  $P_{out} = \frac{A^2 V^2}{2R_L}$  (in Watt) che se

$$\begin{aligned} \text{espressa in } dBm \text{ diventa } P_{out\_dBm} &= 10 \log_{10} \frac{P_{out}}{10^{-3}} = 10 \log_{10} \frac{A^2 V^2}{2R_L 10^{-3}} \\ P_{out\_dBm} &= 10 \log_{10} V^2 + 10 \log_{10} A^2 - (10 \log_{10} R_L + 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10} 10^{-3}) = \\ &= 10 \log_{10} V^2 + 10 \log_{10} A^2 - 10 \log_{10} R_L + 27 \end{aligned} \quad \text{Eq.2}$$

Il guadagno di potenza delle componenti fondamentali è  $G_P = \frac{P_{out}}{P_{in}}$ , che se espresso in dB diventa

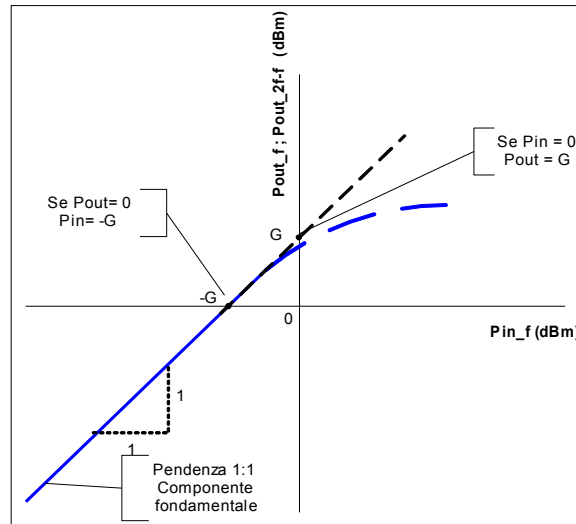
$$\begin{aligned} G_{P\_dB} &= P_{out\_dBm} - P_{in\_dBm} = 10 \log_{10} G_P = 10 \log_{10} A^2 \frac{R_{in}}{R_L} = \\ &= 10 \log_{10} A^2 + 10 \log_{10} R_{in} - 10 \log_{10} R_L \end{aligned} \quad \text{Eq.3}$$

Combinando la	$P_{in\_dBm} = 10 \log_{10} V^2 - 10 \log_{10} R_{in} + 27$
la	$P_{out\_dBm} = 10 \log_{10} V^2 + 10 \log_{10} A^2 - 10 \log_{10} R_L + 27$
e la	$G_{P\_dB} = 10 \log_{10} A^2 + 10 \log_{10} R_{in} - 10 \log_{10} R_L$
nella	$P_{out\_dBm} = P_{in\_dBm} + G_{P\_dB}$

$$\begin{aligned} 10 \log_{10} V^2 + 10 \log_{10} A^2 - 10 \log_{10} R_{in} + 27 &= 10 \log_{10} V^2 - 10 \log_{10} R_{in} + 27 + \\ + 10 \log_{10} A^2 + 10 \log_{10} R_{in} - 10 \log_{10} R_L &\quad \text{semplificando si arriva a } 1 = 1. \end{aligned}$$

## Appunti sulla linearità

Questo significa che se si traccia su un sistema di coordinate rettangolari, con la scala  $P_{out\_dBm}$  (in  $dBm$ ) come ordinate e con la scala  $P_{in\_dBm}$  (in  $dBm$ ) sull'asse delle ascisse, si ottiene una retta con pendenza unitaria e che intercetta l'asse verticale nel punto G. Il valore di G determina la posizione della retta.



$$P_{out\_dBm} = P_{in\_dBm} + G_{P\_dB}$$

Il valore della tensione di uscita di ciascuno dei prodotti provocati dalla distorsione da intermodulazione di Terzo Ordine sono uguali a e pari a  $\frac{3}{4}k_3V^3$ , si trascurano i termini di ordine

superiori al terzo. La potenza di ciascuna delle componenti sarà  $P_{out\_2f-f} = \frac{\left(\frac{3}{4}k_3V^3\right)^2}{2R_L}$

che se espressa in  $dBm$  diventa

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = 10 \log_{10} \frac{\left(\frac{3}{4}k_3V^3\right)^2}{2R_L \cdot 10^{-3}} = 10 \log_{10} \frac{\left(\frac{3}{4}k_3\right)^2 (V^2)^3}{2R_L \cdot 10^{-3}}$$

che riscritta

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = 10 \log_{10} \frac{\left(\frac{3}{4}k_3\right)^2 (V^2)^3}{R_L \frac{2^3 R_{in}^3 (10^{-3})^3}{2^2 R_{in}^3 (10^{-3})^2}} \quad (P_{in})^3$$

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = 10 \log_{10} \left(\frac{3}{4}k_3\right)^2 - 10 \log_{10} \frac{R_L}{2^2 R_{in}^3 (10^{-3})^2} + 3P_{in\_dBm}$$

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = 3P_{in\_dBm} + 20 \log_{10} \frac{3}{4} + 20 \log_{10} k_3 - 10 \log_{10} R_L + 10 \log_{10} 2^2 + 10 \log_{10} R_{in}^3 + 20 \log_{10} 10^{-3}$$

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = 3P_{in\_dBm} + 20 \log_{10} k_3 - 10 \log_{10} R_L + 10 \log_{10} R_{in}^3 + 20 \log_{10} \frac{3}{4} + 10 \log_{10} 2^2 + 20 \log_{10} 10^{-3}$$

K

## Appunti sulla linearità

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = 3P_{in\_dBm} + K$$

dove  $K = -56,4988 + 20 \log_{10} k_3 - 10 \log_{10} R_L + 10 \log_{10} R_{in}^3$

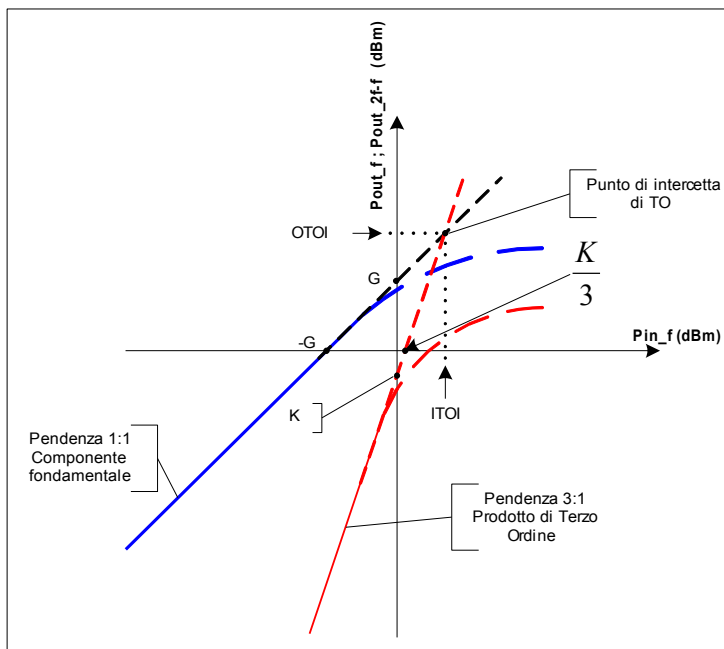
oppure in altra forma  $K = -56,5 + 20 \log_{10} k_3 + 10 \log_{10} \frac{R_{in}^3}{R_L}$

Se si traccia su di un sistema di coordinate rettangolari (con scala in  $dBm$ ) l'andamento di  $P_{out\_2f-f\_dBm}$  in funzione di  $P_{in\_dBm}$  si ottiene una retta con pendenza 3, che interseca l'asse verticale nel punto  $K$  e l'asse orizzontale nel punto  $-\frac{K}{3}$ .

Il punto  $K$  definisce quindi la posizione della retta.

Il punto in cui le due linee rette si intersecano viene chiamato punto di intercetta di Terzo Ordine. Esso viene identificato:

- dalla sua proiezioni sull'asse orizzontale della  $P_{in\_dBm}$ , che viene chiamato *punto di intercetta di ingresso di terzo ordine, ITOI*,
- dalla sua proiezioni sull'asse verticale della  $P_{out\_2f-f\_dBm}$ , che viene chiamato *punto di intercetta di uscita di terzo ordine OTOI*.



Il punto di intercetta di TO è quel punto ipotetico in cui il segnale di uscita, dovuto alla fondamentale, ha la stessa ampiezza di quella dei segnali provocati dalla distorsione di TO.

Per calcolare il punto di intercetta si comparano le equazioni

$$P_{out\_dBm} = P_{in\_dBm} + G_{P\_dB}$$

$$P_{out\_2f-f\_dBm} = 3P_{in\_dBm} + K \quad \text{con} \quad K = -56,5 + 20 \log_{10} k_3 + 10 \log_{10} \frac{R_{in}^3}{R_L} \quad \text{ed usando la}$$

$$G_{P\_dB} = 10 \log_{10} A^2 + 10 \log_{10} R_{in} - 10 \log_{10} R_L$$

## Appunti sulla linearità

$$P_{in\_dBm} + G_{P\_dB} = 3P_{in\_dBm} - 56,5 + 20 \log_{10} k_3 + 10 \log_{10} \frac{R_{in}^3}{R_L}$$

$$P_{in\_dBm} = 3P_{in\_dBm} - 56,5 + 20 \log_{10} k_3 + 10 \log_{10} \frac{R_{in}^3}{R_L} - 10 \log_{10} A^2 - 10 \log_{10} R_{in} + 10 \log_{10} R_L$$

$$P_{in\_dBm} - 3P_{in\_dBm} = -56,5 + 20 \log_{10} k_3 + 10 \log_{10} \frac{R_{in}^3}{R_L} - 10 \log_{10} A^2 - 10 \log_{10} R_{in} + 10 \log_{10} R_L$$

$$P_{in\_dBm} = \frac{56,5}{2} - 10 \log_{10} k_3 - 5 \log_{10} R_{in}^3 + 5 \log_{10} R_L + 5 \log_{10} A^2 + 5 \log_{10} R_{in} - 5 \log_{10} R_L$$

$$P_{in\_dBm} = 28,25 - 10 \log_{10} k_3 - 15 \log_{10} R_{in} + 10 \log_{10} A + 5 \log_{10} R_{in}$$

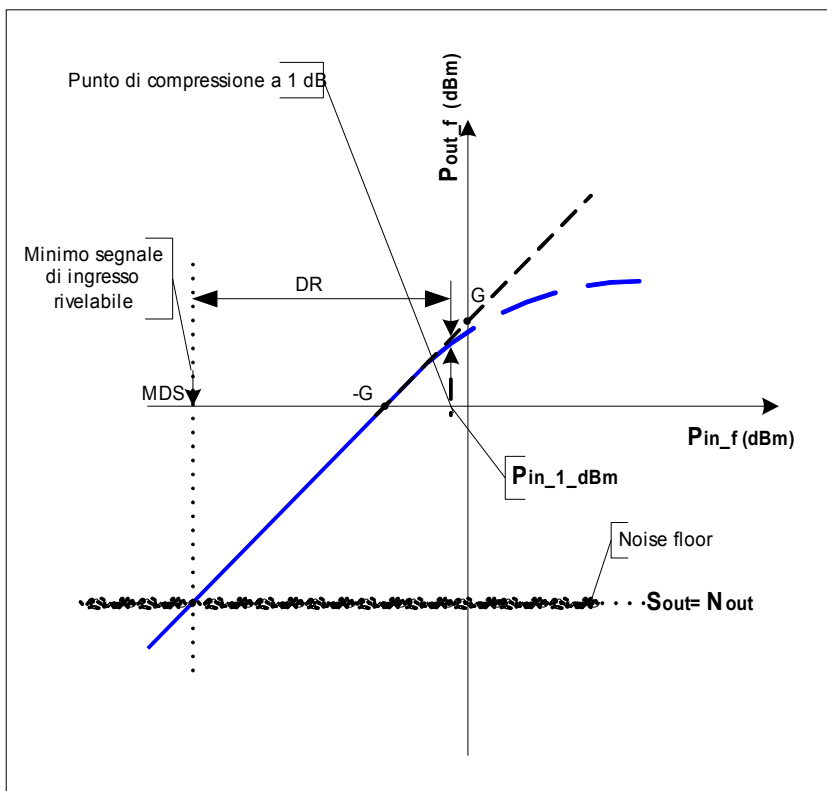
$$P_{in\_dBm} = 28,25 - 10 \log_{10} k_3 - 10 \log_{10} R_{in} + 10 \log_{10} A$$

e sostituendo  $P_{in\_dBm}$  con **ITOI** (cioè quel particolare valore di potenza di ingresso che corrisponde al punto di intercetta di TO) si ottiene

$$ITOI = 10 \log_{10} A - 10 \log_{10} k_3 - 10 \log_{10} R_{in} + 28,24 = 10 \log_{10} \frac{666,67 A}{k_3 R_{in}}$$

Questo è quel particolare valore di potenza di ingresso che corrisponde al punto di intercetta di Terzo Ordine di ingresso.

### Minimo segnale rivelabile (Minimum Discernible Signal, MDS)





## Appunti sulla linearità

La cifra di rumore  $F$  rappresenta il rapporto fra il rapporto segnale –rumore di ingresso ed il rapporto fra il segnale e il rumore di uscita

- $\frac{S_{in}}{N_{in}}$ , rapporto segnale rumore di ingresso,
- $\frac{S_{out}}{N_{out}}$ , rapporto segnale rumore di uscita,
- $F = \frac{\frac{S_{in}}{N_{in}}}{\frac{S_{out}}{N_{out}}}$ , Cifra di Rumore

Il minimo rapporto segnale rumore di uscita accettabile viene definito come  $\frac{S_{out}}{N_{out}} = 1$

quindi, in queste condizioni si ha che la cifra di rumore diventa  $F = \frac{S_{in}}{N_{in}}$  e  $S_{in} = FN_{in}$ .

Un segnale di ingresso, di una data potenza tale che si abbia  $\frac{S_{out}}{N_{out}} = 1$ , provocherà un rapporto segnale + rumore su rumore  $\frac{S_{out} + N_{out}}{N_{out}} = 2 \Rightarrow 3dB$ . Il livello del segnale di ingresso che provoca questo rapporto, espresso in  $dBm$ , diventa per definizione il Minimo Segnale Rivelabile (MDS).

Si avrà quindi

$$S_{in} = FN_{in}$$

$$N_{in} = N_0 \cdot B \quad N_0 = k \cdot T_0$$

$$N_{in} = k \cdot T_0 \cdot B$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad T_0 = 290^\circ K$$

$B$  = banda passante in Hz.

$NF_{dB}$  = Figura di Rumore

$$S_{in\_dBm} = MDS = NF_{dB} + 10 \log kT_0 + 10 \log B$$

$$MDS = NF_{dB} + 10 \log kT_0 + 10 \log B$$

$$MDS = NF_{dB} + 10 \log(1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290) + 10 \log B$$

$$MDS = NF_{dB} + 10 \log \left( \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}{10^{-3}} \right) + 10 \log B$$

$$MDS = NF_{dB} - 174 + 10 \log B$$

Riassumendo il MDS misura la sensibilità di un sistema e definisce il livello del rumore all'uscita (*noise floor*) con  $S_{out} = N_{out}$ . Qualsiasi segnale con un livello di potenza inferiore a questo livello richiederà molti sforzi per essere rivelato.

## Appunti sulla linearità

Gamma della dinamica del segnale senza spurie (**Spurious Free Dynamic Range, SFDR**) e gamma della dinamica (**Dynamic Range, DR**)

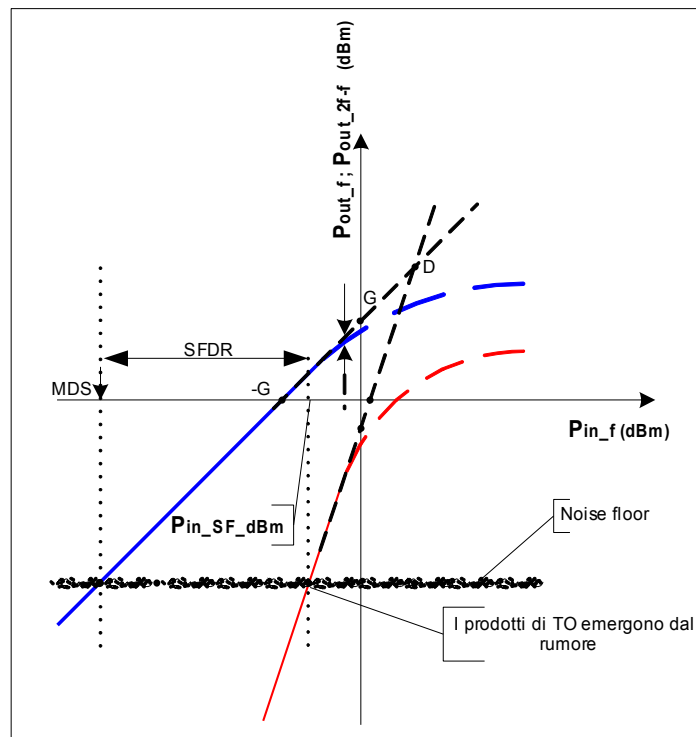
Come il segnale di ingresso aumenta e supera il livello di MDS così aumenta, in modo lineare, la potenza del segnale di uscita,  $S_{out} = P_{out\_dBm}$ . I prodotti di intermodulazione di TO,  $P_{out\_2f-f\_dBm}$  aumentano anche loro, ma con un tasso di crescita di 3 volte più veloce di  $P_{out\_dBm}$ , inizialmente sono immersi nel rumore e la loro presenza non rivelabile.

Quando la potenza di ingresso supera un certo valore i prodotti di TO superano il livello di potenza del noise floor e diventano rivelabili, questo livello di potenza del segnale di uscita viene definito come *livello di potenza senza spurie* (spurious free),  $P_{out\_SF\_dBm}$  e viene chiamata *gamma della dinamica del segnale senza spurie* (Spurious Free Dynamic Range, SFDR)

$$SFDR = P_{in\_SF\_dBm} - MDS \text{ e viene misurata in dB.}$$

Talvolta si definisce come *gamma della dinamica del segnale*,  $DR$ , la differenza fra il livello di potenza di ingresso corrispondente al punto di compressione a 1 dB,  $P_{in\_1\_dBm}$  e il livello MDS

$$DR = P_{in\_1\_dBm} - MDS \text{ anche questa si misura in dB.}$$



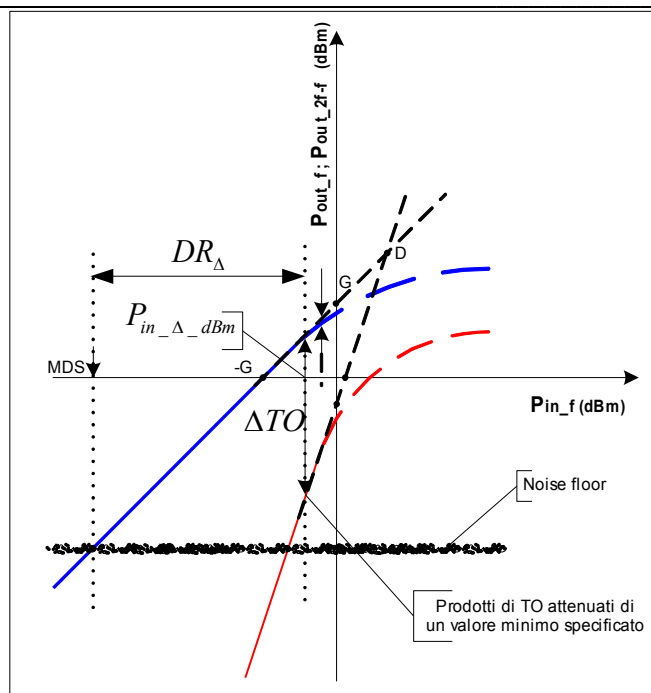
Spurious Free Dynamic Range, SFDR

Viene definita anche un'altra *gamma dinamica del segnale*,  $DR_{\Delta} = P_{in\__{\Delta}dBm} - MDS$

dove  $P_{in\__{\Delta}}$  è il livello di potenza di ingresso per il quale i prodotti di intermodulazione di TO sono attenuati (rispetto alla fondamentale) uno valore minimo specificato (in dB),

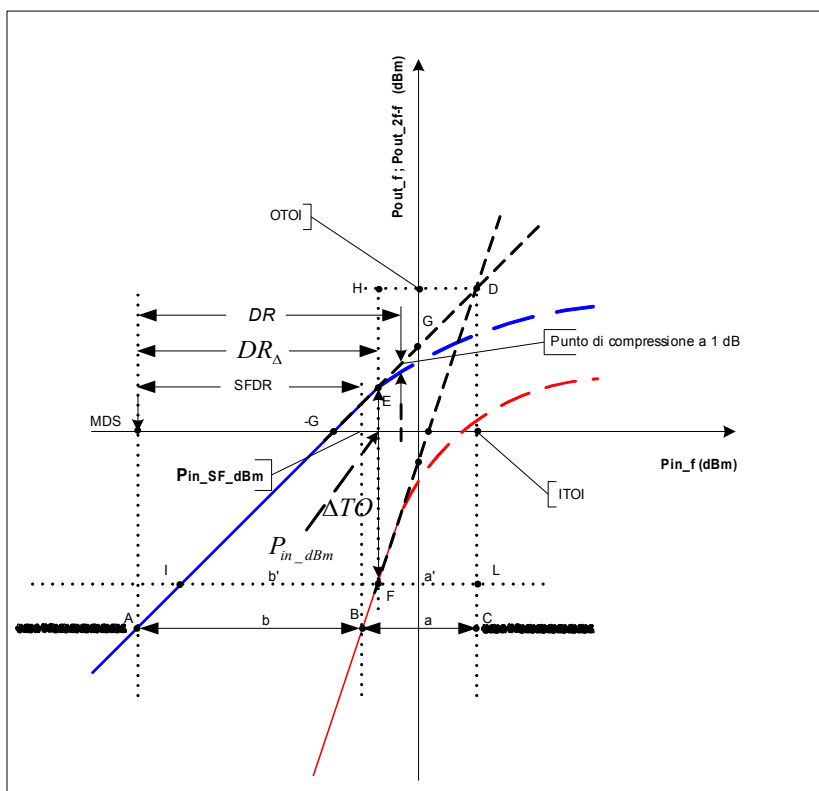
$$\Delta TO = P_{out\__{\Delta}dBm} - P_{out\_2f-f\_dBm}, \quad \text{per esempio 60 dB.}$$

## Appunti sulla linearità



$$\Delta TO = P_{out\_Δ\_dBm} - P_{out\_2f-f\_dBm}$$

### Alcune considerazioni geometriche su grafico



## Appunti sulla linearità

Sulla linea retta, tracciata in corrispondenza del Noise Floor, si individuano i segmenti,

- AB di lunghezza  $b$  definita ai punti di intersezione con le curve della fondamentale  $P_{out\_f}$  e quella dei prodotti di TO  $P_{out\_2f-f}$ ,
- BC di lunghezza  $a$  definita dal punto di intersezione con la curva della potenza dei prodotti di TO e la verticale che passa per ITOI,

La pendenza della retta AD è unitaria (D è il punto di intercetta di TO), quindi gli angoli in A ed in D sono uguali e il triangolo ADC è isoscele, di conseguenza anche i lati (segmenti) AC e DC.

Si avrà che  $CD = AC = a + b$

La pendenza BD è 3, perciò la lunghezza del lato CD è uguale ad a tre volte il lato BC (triangolo BCD).

Si avrà che  $CD = 3a$

Ne consegue che  $a + b = 3a$  e cioè  $b = 2a$ .

Queste relazioni sono vere per qualsiasi valore di potenza di ingresso. Le rette, AD e BD possono essere tracciate avendo noto solamente un punto di una delle due curve.

Per esempio tramite un sistema di misura composto da due generatori e da un analizzatore di spettro calibrati (= si possono misurare i livelli di potenza) si possono definire con sufficiente precisione i livelli di ingresso e di uscita ed il valore di attenuazione di uno dei prodotti di TO. (vedere *Appunti sulla costruzione del grafico di IP3*)

Si possono così definire i punti E ed F e definire il guadagno. Questo consentirà di tracciare un grafico come quello di figura.

Disegnando una linea orizzontale che passa per il punto F si ottiene un nuovo segmento di lunghezza  $b'$  che è la lunghezza del lato FI del triangolo isoscele IFE. I lati IF ed EF saranno uguali, si avrà  $b' = \Delta TO$

Ripetendo le considerazioni fatte in precedenza per i triangoli ACD e BCD sui triangoli IFE e FLD si potrà scrivere

$$a' + b' = 3a'$$

$$\text{quindi } a' = \frac{b'}{2} \text{ si avrà che } a' = \frac{b'}{2} = \frac{\Delta TO}{2} = ITOI - P_{in\_dBm} \text{ da cui } ITOI_{dBm} = \frac{\Delta TO}{2} + P_{in\_dBm}$$

Sempre dalla figura si vede che  $b = SFDR$  e che  $a = \frac{SFDR}{2}$  quindi la lunghezza del segmento AC è uguale sarà

$$AC = b + a = SFDR_{dB} + \frac{SFDR_{dB}}{2}$$

$$SFDR_{dB} + \frac{SFDR_{dB}}{2} = 3 \frac{SFDR_{dB}}{2} = ITOI_{dBm} - MDS_{dBm} \text{ da cui}$$

$$SFDR_{dB} = 2 \frac{(ITOI_{dBm} - MDS_{dBm})}{3}$$

## Appunti sulla linearità

La gamma dinamica del segnale senza spurie, **SFDR**, (*Spurious Free Dynamic Range*) si può aumentare o abbassando il valore di **MDS** (quindi abbassare il Noise Floor) oppure alzando il valore del punto di intercetta di TO (**ITOI**).

Ancora dalla figura essendo  $a = \frac{b}{2}$  e  $b = SFDR_{dB}$  si vede che al livello del Noise Floor la lunghezza

del segmento BC è  $BC = ITOI - P_{in\_SF\_dBm} = \frac{SFDR_{dB}}{2}$  che con l'inserimento della  $SFDR_{dB} = 2 \frac{(ITOI_{dBm} - MDS_{dBm})}{3}$  e risolvendo per la massima potenza ammissibile senza spurie,

$P_{in\_SF\_dBm}$ , si ottiene

$$SFDR_{dB} = P_{in\_SF\_dBm} - MDS_{dBm} \quad P_{in\_SF\_dBm} - MDS_{dBm} = \frac{2}{3} ITOI_{dBm} - \frac{2}{3} MDS_{dBm}$$

$$P_{in\_SF\_dBm} = \frac{2}{3} ITOI_{dBm} - \frac{2}{3} MDS_{dBm} + MDS_{dBm} \quad P_{in\_SF\_dBm} = \frac{2 ITOI_{dBm} + MDS_{dBm}}{3}$$

Per segnali di ingresso maggiori di quelli dati da questa relazione, i prodotti di TO cresceranno con un ritmo 3 volte più veloce del segnale desiderato. Per livelli inferiori essi saranno immersi nel rumore.

Facendo sempre riferimento alla Figura e fissata  $|x|$  la distanza  $EH = HD$ , la distanza  $FH$  sarà  $|x| + \Delta TO$ , siccome la pendenza della retta FD è 3 si avrà  $3|x| = |x| + \Delta TO$  da cui  $|x| = \frac{\Delta TO}{2}$ . Questo

ci consente di localizzare il punto di intercetta al di sopra di un valore misurato di potenza in dBm. Si avrà che

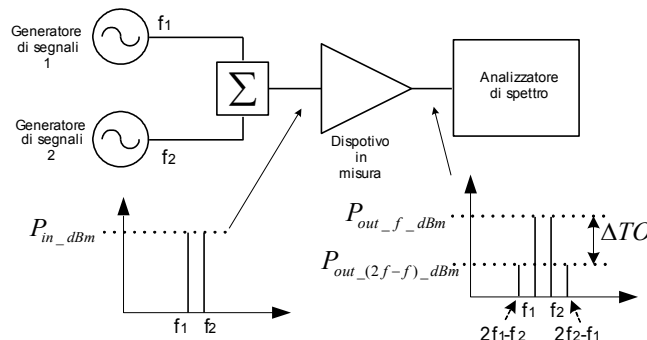
$$OTOI_{dBm} = \frac{\Delta TO_{dB}}{2} + P_{in\_dBm} + G.$$

### Costruzione del grafico

Le due curve che rappresentano l'andamento della potenza di uscita della fondamentale,  $P_{out\_f\_dBm}$ , e della potenza dei prodotti di Terzo Ordine,  $P_{out\_2f-f\_dBm}$ , in funzione della potenza di ingresso, possono essere tracciate conoscendo solamente un punto per ognuna delle due. In questo modo è possibile ricavare il punto di intercetta di Terzo Ordine, IP3.

Usando un sistema di misura come quello indicato in figura si misurano:

- il livello di potenza di ingresso,  $P_{in\_dBm}$ ,
- il livello di potenza del segnale di uscita della fondamentale,  $P_{out\_f\_dBm}$ ,
- il livello di potenza di uscita delle componenti di Terzo Ordine,  $P_{out\_2f-f\_dBm}$ ,

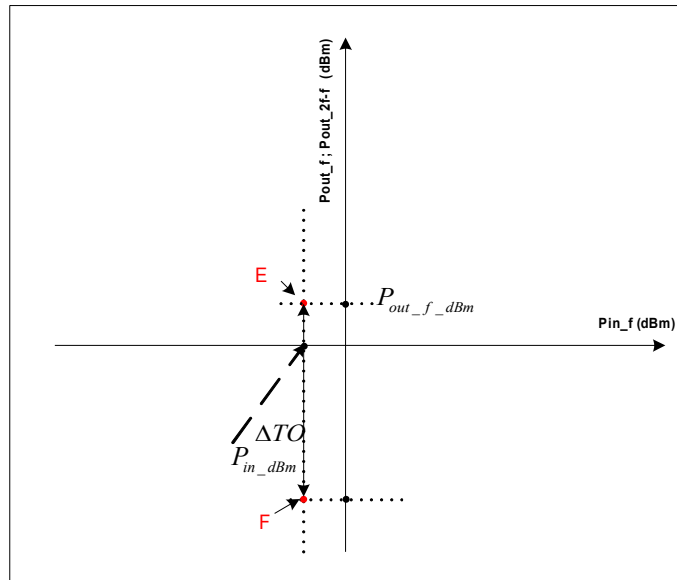


## Appunti sulla linearità

All'ingresso del dispositivo sotto misura si applicano due segnali sinusoidali (talvolta vengono chiamati toni). La potenza di uscita viene misurata con un analizzatore di spettro calibrato e quindi sarà possibile il livello della potenza della fondamentale,  $P_{out\_f\_dBm}$

e dell'attenuazione relativa rispetto ad essa dei prodotti di TO,  $\Delta TO_{dB}$ .

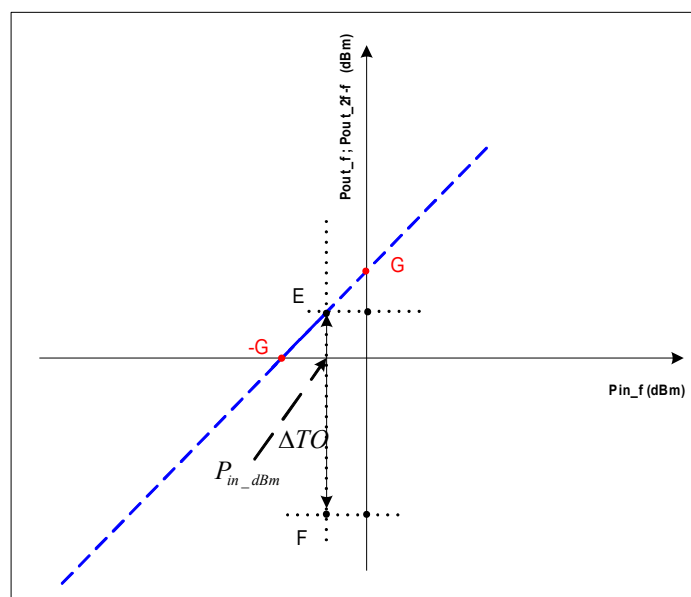
Essendo noto il valore della potenza di ingresso si possono tracciare i punti **E** ed **F** sul piano degli assi della potenza di ingresso ed i uscita:



Conoscendo i valori della potenza di uscita e quella di ingresso si calcola facilmente il guadagno

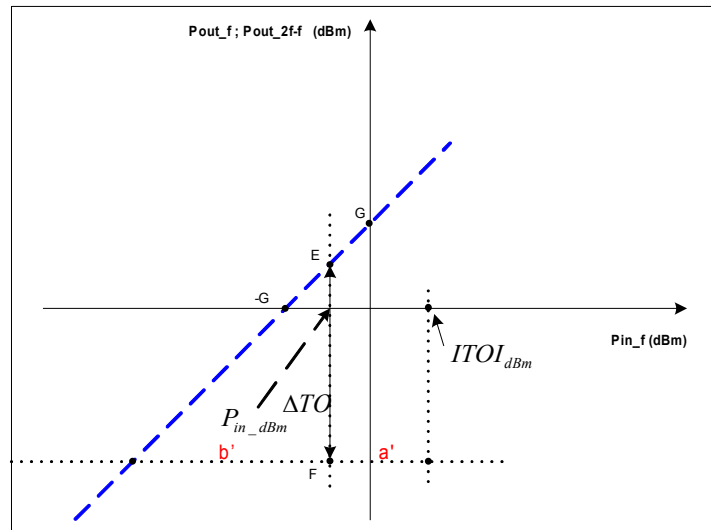
$$G_{p\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{in\_dBm}$$

quindi si fissano i punti  $G_{p\_dB}$  sull'asse  $y$  e  $-G_{p\_dB}$  sull'asse  $x$ . Si traccia la retta che passa per i punti **G** ed **E**, è la curva (retta) che rappresenta l'andamento della potenza della fondamentale:



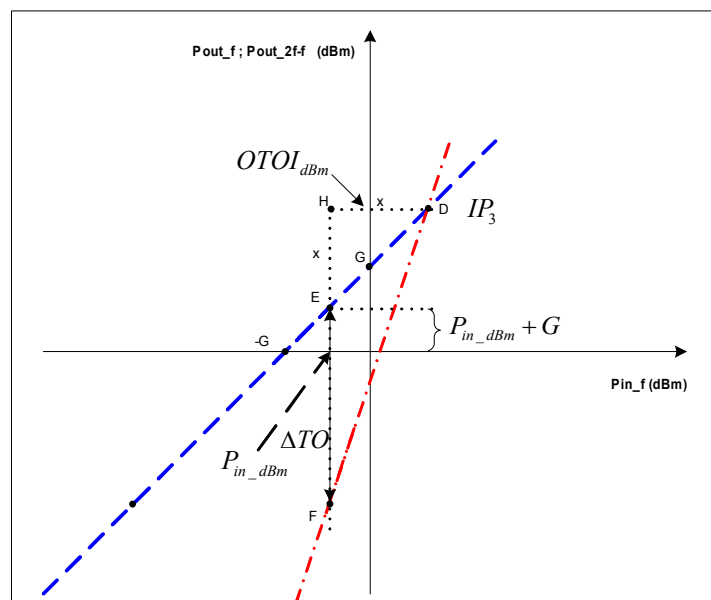
## Appunti sulla linearità

Si traccia una retta orizzontale che passa per il punto F. Figura 4



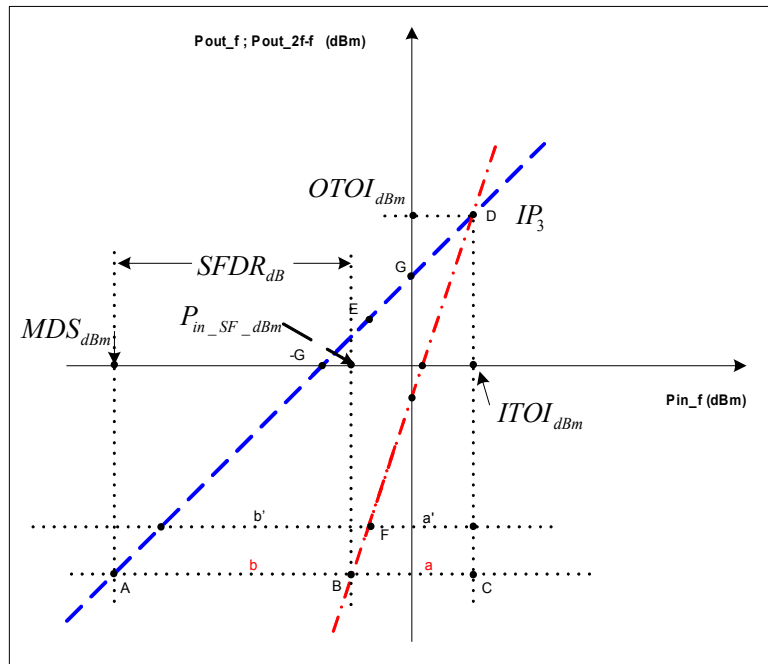
Si ottengono due segmenti,  $b'$  e  $a'$ , dove  $b' = \Delta TO$ , considerando che  $b' = 2a'$  si ha  $a' = \frac{\Delta TO}{2}$   
 ma anche  $a' = ITOI_{dBm} - P_{in\_dBm}$  quindi  $\frac{\Delta TO}{2} = ITOI_{dBm} - P_{in\_dBm}$  da cui  $ITOI_{dBm} = \frac{\Delta TO}{2} + P_{in\_dBm}$

A questo punto si conosce l'ascissa del punto IP3, che è ITOI, questo consente di individuare il punto IP3 sulla retta della potenza fondamentale tracciando una verticale che passa per ITOI. Ora si potrà tracciare la caratteristica della potenza di Terzo Ordine tracciando una retta che passa per i punti IP3 ed F. In rosso nella figura



## Appunti sulla linearità

Vediamo alcune considerazioni sullo *SFDR* usando il grafico appena tracciato.



$$SFDR_{dB} = b \quad a = \frac{b}{2} = \frac{SFDR_{dB}}{2}$$

$$ITOI_{dBm} - MDS = a + b$$

$$ITOI_{dBm} - MDS = \frac{SFDR_{dB}}{2} + SFDR_{dB}$$

$$SFDR_{dB} = \frac{2}{3}(ITOI_{dBm} - MDS)$$

### Nota

Perché  $a = \frac{b}{2}$ ? Il triangolo ACD è isoscele, gli angoli in A e in D sono uguali e l'angolo in C è retto, quindi  $AC = DC$ ,  $AC = b + a$ ,  $DC = b + a$

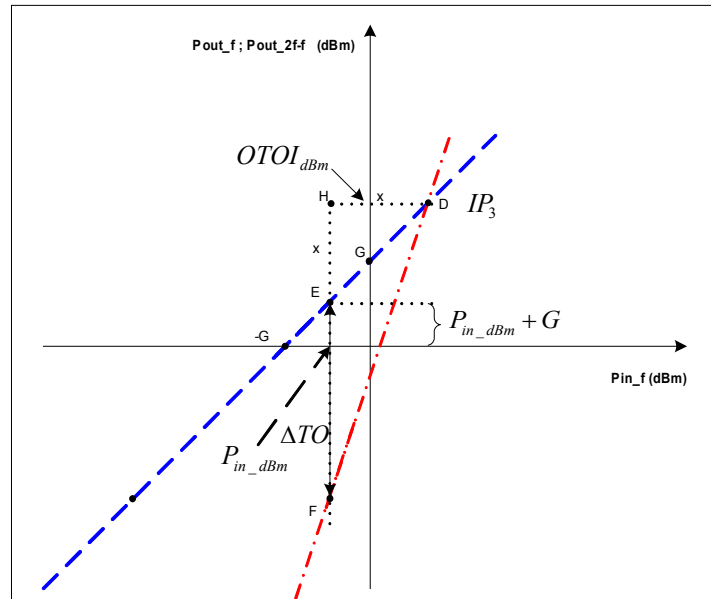
La pendenza della retta che passa per B e D è uguale a 3, quindi  $DC = 3BC$  cioè  $DC = 3a$ , si avrà che  $3a = b + a$   $b = 3a - a$   $b = 2a$

Questa relazione è valida per qualsiasi potenza di ingresso.



## Appunti sulla linearità

Vediamo un altro modo per individuare graficamente OTOI essendo noti  $\Delta TO$  e la potenza di ingresso  $P_{in\_dBm}$ .



Si fissa il punto  $H$  in modo che  $HE = HD = |x|$ .

La lunghezza del segmento  $FH$  sarà  $FH = |x| + \Delta IM$

La pendenza della curva (retta  $FD$ ) caratteristica della potenza di TO è 3 per cui

$$\frac{FH}{HD} = \frac{FE + EH}{HD} = \frac{\Delta TO + |x|}{|x|} = 3$$

$$\Delta TO + |x| = 3|x| \quad \Delta TO = 3|x| - |x| \quad \Delta TO = 2|x| \quad |x| = \frac{\Delta TO}{2}$$

Conoscendo  $|x|$ ,  $P_{in\_dBm}$  e  $G_{p\_dB}$  si ricava OTOI che l'ordinata di  $IP_3$

$$OTOI_{dBm} = \frac{\Delta TO}{2} + P_{in\_dBm} + G_p$$

e quindi anche ITOI che è l'ascissa di  $IP_3$

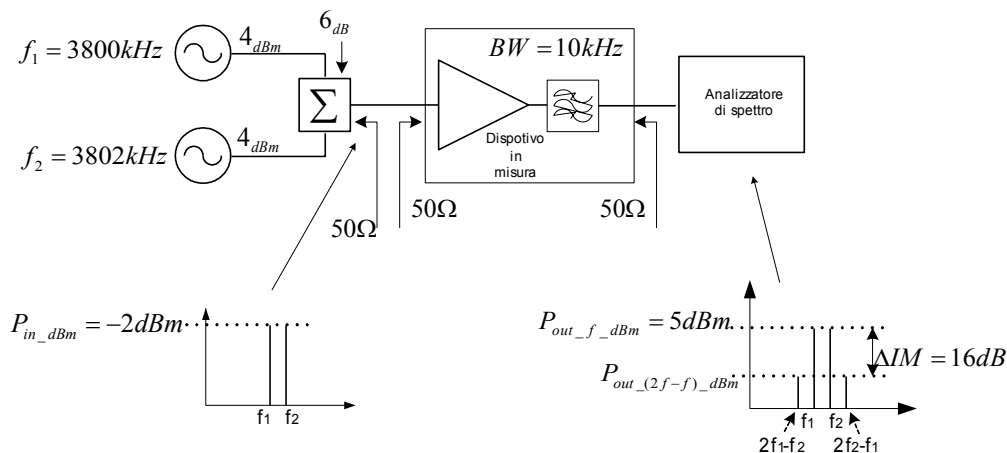
$$ITOI_{dBm} = \frac{\Delta TO}{2} + P_{in\_dBm}$$

## Appunti sulla linearità

### Esercizio 1

Un amplificatore selettivo con una banda passante  $BW = 10 \text{ kHz}$  viene inserito in un sistema di misura come in figura 1. Al suo ingresso sono applicati tramite una rete di somma due segnali rispettivamente a  $f_1 = 3800 \text{ kHz}$  e a  $f_2 = 3802 \text{ kHz}$  con un livello di  $+4 \text{ dBm}$  ciascuno. La rete di somma perde  $6 \text{ dB}$ .

Sull'analizzatore di spettro si misura un livello di potenza di  $P_{out\_f\_dBm} = +5 \text{ dBm}$  per le componenti fondamentali, mentre le componenti di terzo ordine sono attenuate di  $\Delta TO = \Delta IM = 16 \text{ dB}$ . In assenza di segnale è presente all'uscita un rumore a  $-56 \text{ dBm}$ .



### Calcolare

- $P_{in\_dBm}$ ,
- La frequenza dei prodotti di terzo ordine,
- $G_p$  in dB,
- ITOI,
- OTOI,
- MDS,
- SFDR,
- NF.
- $P_{in\_dBm}$

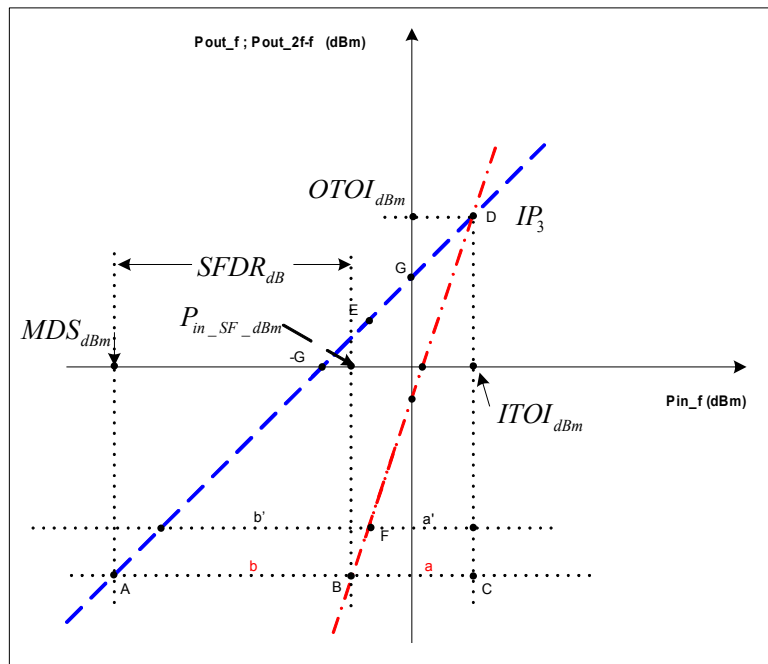
La potenza fornita all'ingresso dell'amplificatore da ciascun generatore sarà

$$P_{in\_dBm} = +4 \text{ dBm} - 6 \text{ dB} = -2 \text{ dBm}.$$

- i prodotti di TO si trovano alle frequenze di  $2f_1 - f_2 = 3798 \text{ kHz}$   $2f_2 - f_1 = 3804 \text{ kHz}$
- $G_{p\_dB}$  Il guadagno è dato da  $G_{p\_dB} = P_{out\_f\_dBm} - P_{in\_dBm} = +5 \text{ dBm} - (-2 \text{ dBm}) = 7 \text{ dB}$
- ITOI  $ITOI_{dBm} = \frac{\Delta IM}{2} + P_{in\_dBm}$   $ITOI_{dBm} = \frac{16}{2} + (-2) = 6 \text{ dBm}$
- OTOI  $OTOI_{dBm} = ITOI + G_{p\_db}$   $OTOI_{dBm} = 6 + 7 = 13 \text{ dBm}$
- MDS

Dal grafico

## Appunti sulla linearità



sappiamo che  $AC = DC$  e quindi dai valori in nostro possesso

$$OTOI_{dBm} = 13dBm$$

$$Noise\_Floore_{dBm} = -56dBm$$

possiamo calcolare MDS

$$DC = AC = OTOI_{dBm} - Noise\_Floor_{dBm} = 13 - (-56) = 69dB$$

$$ITOI_{dBm} - MDS_{dBm} = AC = DC$$

$$MDS_{dBm} = ITOI_{dBm} - AC$$

$$MDS_{dbm} = 6 - 69 = -63\text{ dBm}$$

- SFDR

$$SFDR_{dB} = \frac{2}{3}(ITOI_{dBm} - MDS)$$

$$SFDR_{dB} = \frac{2}{3}[6 - (-63)] = 46dB$$

- Noise Figure

$$MDS_{dBm} = -174 + NF + 10\log BW$$

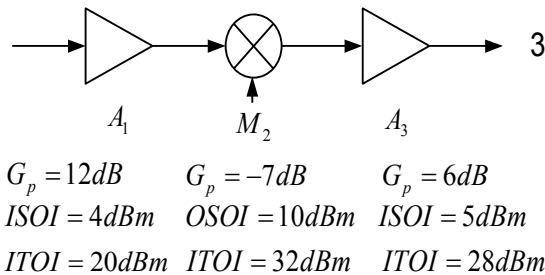
$$NF = MDS_{dBm} + 174 - 10\log BW$$

$$NF = -63 + 174 - 10\log 10 \cdot 10^3 = -63 + 174 - 40 = 71dB$$

## Appunti sulla linearità

### Più stadi in cascata

Nelle considerazioni che seguono considereremo una cascata composta da tre stadi solamente.



#### Alcune definizioni:

$G_{p\_n}$ ,	il guadagno di potenza dell' $n$ elemento della cascata,
$G_{p\_cas}$ ,	il guadagno di potenza della cascata,
$ITOI_n$ ,	<i>Input Third Order Intercept Point</i> dell' $n^o$ elemento della cascata,
$OTOI_n$ ,	<i>Output Third Order Intercept Point</i> dell' $n^o$ elemento della cascata,
$P_f$ ,	potenza della fondamentale,
$P_{2f-f}$ ,	potenza delle componenti di Terzo Ordine $2f_1 - f_2$ e $2f_2 - f_1$ ,
$P_{in\_f\_n}$ ,	potenza di un singolo tono applicata all' $n^o$ elemento della cascata,
$P_{out\_2f-f\_n}$ ,	potenza di TO singolo tono applicata all'uscita dell' $n^o$ elemento della cascata,
$P_{out\_2f-f\_n\_pt3}$ ,	potenza di TO, generata dall'elemento $n^o$ e trasferita all'uscita della cascata (in questo caso costituita da 3 elementi).

### Punto di intercetta di Terzo Ordine

L'equazione che esprime la relazione, di un dispositivo non lineare, fra la potenza del segnale di uscita della fondamentale, la potenza del segnale di uscita generato dalla distorsione di Terzo Ordine ed il punto di intercetta di terzo ordine, OTOI, è:  $P_{out\_2f-f\_dBm} = 3P_{out\_f\_dBm} - 2OTOI_{dBm}$

sappiamo anche che  $P_{out\_f\_dBm} = P_{in\_f\_dBm} + G_{p\_dB}$

che possiamo scrivere anche in forma lineare  $P_{out\_2f-f} = \frac{P_{out\_f}^3}{OTOI^2}$

$$P_{out\_f} = P_{in\_f} \bullet G_p$$

### Amplificatore 1

$P_{in\_n}$  è la potenza di ogni tono (singolo segnale) che si applica all'ingresso dell'Amplificatore 1.

La potenza di uscita della fondamentale (*Nota 1*) e la potenza di uscita del prodotto di Terzo Ordine sono,

$$P_{out\_f\_1} = P_{in\_1} \bullet G_{p\_1} \quad \text{Eq.1}$$

$$P_{out\_2f-f\_1} = \frac{P_{out\_f\_1}^3}{OTOI_1^2} \quad \text{Eq.2}$$

## Appunti sulla linearità

La potenza della componente di Terzo Ordine, dovuta all'Amplificatore 1, alla fine della cascata (punto 3 della figura 1) è data dalla

$$P_{out_{(2f-f)_{n-pt3}}} = P_{out_{(2f-f)_1}} \bullet G_{p-2} \bullet G_{p-3} \quad Eq.3$$

sostituendo la Eq.2 nella Eq.3

$$P_{out_{(2f-f)_{n-pt3}}} = \frac{P_{out_{f-1}}^3}{OTOI_1^2} \bullet G_{p-2} \bullet G_{p-3} \quad Eq.4$$

sostituendo nella Eq.4 la Eq.1  $P_{out_{(2f-f)_{n-pt3}}} = \frac{(P_{in-1} \bullet G_{p-1})^3}{OTOI_1^2} \bullet G_{p-2} \bullet G_{p-3}$

e riscrivendo  $P_{out_{(2f-f)_{n-pt3}}} = P_{in-1}^3 \frac{G_{p-1}^3 \bullet G_{p-2} \bullet G_{p-3}}{OTOI_1^2}$

### Mixer 2

La potenza del segnale fondamentale presente all'ingresso del secondo elemento della cascata, in questo caso un mixer, M2 è  $P_{in_{f-2}} = P_{out_{f-1}} = P_{in-1} \bullet G_{p-1}$

Le potenze di uscite, di M2, della fondamentale e del prodotto di Terzo Ordine sono

$$P_{out_{f-2}} = P_{in_{f-2}} \bullet G_{p-2} \quad \text{e} \quad P_{out_{2f-f-2}} = P_{in_{f-1}} \bullet G_{p-1} \bullet G_{p-2}$$

$$P_{out_{(2f-f)_2}} = \frac{(P_{out_{f-2}})^3}{OTOI_2^2} \quad \text{distorsione provocata dal secondo stadio}$$

$$P_{out_{(2f-f)_2}} = \frac{(P_{in_{f-1}} \bullet G_{p-1} \bullet G_{p-2})^3}{OTOI_2^2}$$

$$P_{out_{(2f-f)_2}} = P_{in_{f-1}}^3 \frac{G_{p-1}^3 \bullet G_{p-2}^3}{OTOI_2^2}$$

La potenza di uscita di Terzo Ordine, provocata dall'amplificatore 2 e trasferita all'uscita della cascata (punto3) sarà  $P_{out_{(2f-f)_2-pt3}} = P_{out_{2f-f-2}} \bullet G_{p-3}$

sostituendo  $P_{out_{(2f-f)_2-pt3}} = P_{in_{f-1}}^3 \frac{G_{p-1}^3 \bullet G_{p-2}^3 \bullet G_{p-3}}{OTOI_2^2}$

### Amplificatore 3

La potenza del segnale fondamentale presente all'ingresso del terzo elemento della cascata, in questo caso un amplificatore, A3 è  $P_{in_{f-3}} = P_{in_{f-1}} \bullet G_{p-1} \bullet G_{p-2}$

La potenza di uscita della fondamentale all'uscita dell'Amplificatore 3, uscita della cascata è

$$P_{out_{f-3}} = P_{in_{f-1}} \bullet G_{p-1} \bullet G_{p-2} \bullet G_{p-3}$$

La potenza di uscita di Terzo Ordine presente all'uscita dell'Amp 3 e quindi all'uscita della cascata è data da

## Appunti sulla linearità

$$P_{out_{(2f-f)}_3} = P_{out_{2f-f}_3}$$

$$P_{out_{(2f-f)}_3} = \frac{(P_{out_{f-3}})^3}{OTOI_3^2}$$

sostituendo  $P_{out_{(2f-f)}_3} = \frac{(P_{in_{f-1}} \cdot G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3})^3}{OTOI_3^2}$  riscrivendo

$$P_{out_{(2f-f)}_3} = P_{in_{f-1}}^3 \frac{G_{p-1}^3 \cdot G_{p-2}^3 \cdot G_{p-3}^3}{OTOI_3^2}$$

Si sono così ottenuti i valori delle potenze di uscita della cascata relativi ai termini di Terzo Ordine e generati da ciascun elemento della cascata stessa.

$$P_{out_{(2f-f)}_1} \text{ , generato da A1,}$$

$$P_{out_{(2f-f)}_2} \text{ , generato da M2,}$$

$$P_{out_{(2f-f)}_3} \text{ , generato da A3.}$$

Tutte queste potenze sono presenti al punto di uscita della cascata, nel nostro caso il punto 3.

### Somma coerente o non coerente

I prodotti della distorsione di terzo ordine presenti all'uscita della cascata, punto 3, hanno tutti la stessa frequenza. Per sommare le potenze dei tre segnali con precisione è necessario conoscere la relazione di fase fra i singoli segnali. Se i segnali sono in fase la loro somma vettoriale avrà un valore, mentre avrà un valore diverso se la loro relazione di fase sarà diversa.

Ci sono due metodi per calcolare la distorsione totale:

- La **somma coerente**, cioè si considera che i prodotti di Terzo Ordine sono in fase,
- La **somma non coerente**, si sommano semplicemente le potenze dei singoli segnali.

### Somma coerente

Le componenti della potenza sono convertite in tensioni, quindi sommate e successivamente convertite di nuovo in potenza  $P_{totale\_coerente} = [\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} + \dots + \sqrt{P_n}]^2$

La potenza totale disponibile di Terzo Ordine all'uscita della cascata sarà

$$P_{out_{(2f-f)}\_cascata} = P_{in_{f-1}}^3 \left[ \sqrt{\frac{G_{p-1}^3 \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3}}{OTOI_1^2}} + \sqrt{\frac{G_{p-1}^3 \cdot G_{p-2}^3 \cdot G_{p-3}}{OTOI_2^2}} + \sqrt{\frac{G_{p-1}^3 \cdot G_{p-2}^3 \cdot G_{p-3}^3}{OTOI_3^2}} \right]^2$$

Il guadagno in cascata è  $G_{p\_cascata} = G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3}$

combinando le due relazioni si ottiene

$$P_{out_{(2f-f)}\_cascata} = P_{in_{f-1}}^3 \cdot G_{p\_cascata}^3 \left[ \sqrt{\frac{1}{G_{p-2}^2 \cdot G_{p-3}^2 \cdot OTOI_1^2}} + \sqrt{\frac{1}{G_{p-3}^2 \cdot OTOI_2^2}} + \sqrt{\frac{1}{OTOI_3^2}} \right]^2$$

tenendo conto che  $P_{out_{f-3}} = P_{in_{f-1}} \cdot G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3}$  equivale a  $P_{out_{f-3}} = P_{in_{f-1}} \cdot G_{p\_cascata}$

## Appunti sulla linearità

per cui  $P_{out_{(2f-f)}_{cascata}} = P_{out_{f-3}}^3 \left[ \frac{1}{G_{p-2} \cdot G_{p-3} \cdot OTOI_1} + \frac{1}{G_{p-3} \cdot OTOI_2} + \frac{1}{OTOI_3} \right]^2$

la potenza di Terzo Ordine della cascata è data anche dalla  $P_{out_{(2f-f)}_{-3}} = \frac{(P_{out_{f-3}})^3}{OTOI_3^2}$

in forma più generale  $P_{out_{(2f-f)}_{cascata}} = \frac{(P_{out_{f-3}})^3}{OTOI_{cascata}^2}$

sostituendo  $\frac{(P_{out_{f-3}})^3}{OTOI_{cascata}^2} = P_{out_{f-3}}^3 \left[ \frac{1}{G_{p-2} \cdot G_{p-3} \cdot OTOI_1} + \frac{1}{G_{p-3} \cdot OTOI_2} + \frac{1}{OTOI_3} \right]^2$

e semplificando  $\frac{1}{OTOI_{cascata}} = \frac{1}{G_{p-2} \cdot G_{p-3} \cdot OTOI_1} + \frac{1}{G_{p-3} \cdot OTOI_2} + \frac{1}{OTOI_3}$

Il punto di Intercetta di Terzo Ordine di Ingresso, ITOI si ricava tenendo da conto che

$$OTOI_{cascata} = ITOI_{cascata} \cdot G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3}$$

da cui  $\frac{1}{ITOI_{cascata}} = \frac{G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3}}{G_{p-2} \cdot G_{p-3} \cdot ITOI_1 \cdot G_{p-1}} + \frac{G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3}}{G_{p-3} \cdot ITOI_2 \cdot G_{p-2}} + \frac{G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot G_{p-3}}{ITOI_3 \cdot G_{p-3}}$

semplificando  $\frac{1}{ITOI_{cascata}} = \frac{1}{ITOI_1} + \frac{1}{\frac{ITOI_2}{G_{p-1}}} + \frac{1}{\frac{ITOI_3}{G_{p-1} \cdot G_{p-2}}}$

Riassumendo per una cascata di  $n$  stadi si avrà

$$\begin{aligned} \frac{1}{OTOI_{cascata}} &= \frac{1}{G_{p-2} \cdot G_{p-3} \cdot G_{p-4} \cdot \dots \cdot G_{p(n-1)} \cdot OTOI_1} + \\ &+ \frac{1}{G_{p-3} \cdot G_{p-4} \cdot \dots \cdot G_{p(n-1)} \cdot OTOI_2} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{OTOI_n} \end{aligned}$$

per ITOI

$$\begin{aligned} \frac{1}{ITOI_{cascata}} &= \frac{1}{ITOI_1} + \\ &+ \frac{1}{\frac{ITOI_2}{G_{p-1}}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{\frac{ITOI_n}{G_{p-1} \cdot G_{p-2} \cdot \dots \cdot G_{p(n-1)}}} \end{aligned}$$

**La somma non coerente**

## Appunti sulla linearità

La somma non coerente si ottiene sommando le potenze, la potenza totale sarà data da

$$P_{totale\_coerente} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

$$\text{si avrà } P_{out\_ (2f-f)\_cascata} = P_{in\_f\_1}^3 \left[ \frac{G_{p\_1}^3 \bullet G_{p\_2} \bullet G_{p\_3}}{OTOI_1^2} + \frac{G_{p\_1}^3 \bullet G_{p\_2}^3 \bullet G_{p\_3}}{OTOI_2^2} + \frac{G_{p\_1}^3 \bullet G_{p\_2}^3 \bullet G_{p\_3}^3}{OTOI_3^2} \right]$$

considerando che  $G_{p\_cascata} = G_{p\_1} \bullet G_{p\_2} \bullet G_{p\_3}$

$$P_{out\_ (2f-f)\_cascata} = P_{in\_f\_1}^3 \bullet G_{p\_cascata}^3 \left[ \frac{1}{G_{p\_2}^2 \bullet G_{p\_3}^2 \bullet OTOI_1^2} + \frac{1}{G_{p\_3}^2 \bullet OTOI_2^2} + \frac{1}{OTOI_3^2} \right]$$

ma  $P_{out\_f\_3} = P_{in\_f\_1} \bullet G_{p\_cascata}$

$$P_{out\_ (2f-f)\_cascata} = P_{out\_f\_3}^3 \left[ \frac{1}{G_{p\_2}^2 \bullet G_{p\_3}^2 \bullet OTOI_1^2} + \frac{1}{G_{p\_3}^2 \bullet OTOI_2^2} + \frac{1}{OTOI_3^2} \right]$$

considerando  $P_{out\_ (2f-f)} = \frac{(P_{out\_f})^3}{OTOI^2}$  specificatamente  $P_{out\_ (2f-f)\_3} = P_{out\_ (2f-f)\_cascata} = \frac{(P_{out\_f\_3})^3}{OTOI^2}$

$$\text{e combinando } \frac{(P_{out\_f\_3})^3}{OTOI^2} = P_{out\_f\_3}^3 \left[ \frac{1}{G_{p\_2}^2 \bullet G_{p\_3}^2 \bullet OTOI_1^2} + \frac{1}{G_{p\_3}^2 \bullet OTOI_2^2} + \frac{1}{OTOI_3^2} \right]$$

$$\text{semplificando } \frac{1}{OTOI_{cascata}^2} = \frac{1}{(G_{p\_2} \bullet G_{p\_3} \bullet OTOI_1)^2} + \frac{1}{(G_{p\_3} \bullet OTOI_2)^2} + \frac{1}{(OTOI_3)^2}$$

$$\text{e ITOI } \frac{1}{ITOI_{cascata}^2} = \frac{1}{(ITOI_1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{ITOI_2}{G_{p\_1}}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{ITOI_3}{G_{p\_1} \bullet G_{p\_2}}\right)^2}$$

Nel caso di  $n$  elementi in cascata si avrà

$$\begin{aligned} \frac{1}{(OTOI_{cascata})^2} &= \frac{1}{(G_{p\_2} \bullet G_{p\_3} \bullet G_{p\_4} \bullet \dots \bullet G_{p(n-1)} \bullet OTOI_1)^2} + \\ &+ \frac{1}{(G_{p\_3} \bullet G_{p\_4} \bullet \dots \bullet G_{p(n-1)} \bullet OTOI_2)^2} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{(OTOI_n)^2} \end{aligned}$$



## Appunti sulla linearità

per ITOI

$$\frac{1}{(ITOI_{cascata})^2} = \frac{1}{(ITOI_1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{ITOI_2}{G_{p-1}}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{ITOI_n}{G_{p-1} \bullet G_{p-2} \bullet \dots \bullet G_{p(n-1)}}\right)^2}$$

### Alcune considerazioni sulle equazioni

Nelle considerazioni che seguono verranno prese in considerazione, per semplicità, solamente le equazioni relativi alla somma coerente.

#### Contributo degli elementi che formano la cascata

Il contributo di ciascun elemento della cascata (o sistema) è legato al singolo termine della equazione che rappresenta tutta la cascata. Per esempio in una cascata composta da 3 elementi il

contributo alla linearità del 3° elemento è dato solamente dal termine  $\frac{1}{\frac{ITOI_3}{G_{p-1} \bullet G_{p-2}}}$

Questo è il solo termine di tutta l'equazione che contiene l'ITOI del terzo elemento ed è quindi il solo termine da analizzare dal punto di vista del contributo del 3° elemento.

Se si pensa a  $ITOI_3$  come ad una potenza, espressa in Watts, si può immaginare che il termine

$\frac{ITOI_3}{G_{p-1} \bullet G_{p-2}}$  rappresenti questa potenza matematicamente spostata all'ingresso della cascata.

Ogni termine della cascata può essere pensato in questo modo.

Quando si esegue l'analisi di tutta la cascata, si sposta il TOI di ogni dispositivo alla porta comune in modo da realizzare una comparazione e quindi capire quale sarà l'elemento debole della cascata per quanto riguarda il TOI.

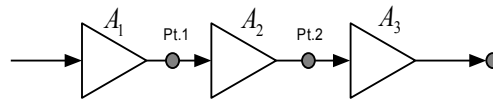
La linearità di una cascata dipende dalla **linearità** e dal **guadagno** di ogni singolo elemento.

Un elemento preceduto da altri con un guadagno elevato avrà al suo ingresso un segnale elevato e quindi potrà più facilmente generare distorsione.

## Appunti sulla linearità

### Esempio 1

Tre amplificatori uguali connessi in cascata



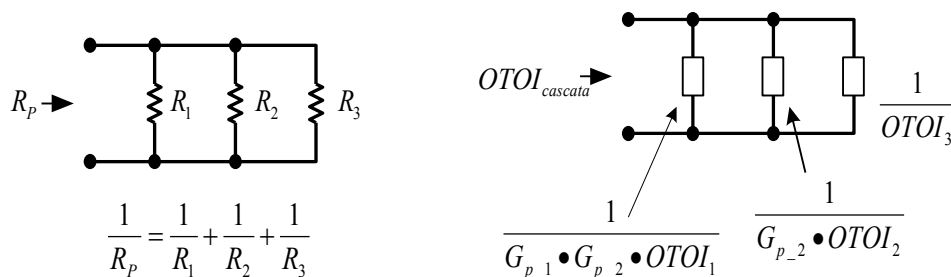
$$\begin{array}{lll}
 G_{p\_dB} = 20dB & 20dB & 20dB \\
 ITOI_{dBm} = -10dBm & -10dBm & -10dBm \\
 OTOI_{dBm} = 10dBm & 10dBm & 10dBm
 \end{array}$$

Se si applica un segnale di con un livello di  $-80\text{ dBm}$  all'ingresso di  $A1$ , si avrà all'ingresso di  $A2$  un livello di  $-60\text{ dBm}$  e all'ingresso di  $A3$  un segnale con un livello di  $-40\text{ dBm}$ . Questa è la ragione per cui l'amplificatore  $A3$  è quello con l'effetto dominante sulla TOI.

In un sistema ben progettato i valori di distorsione di Terzo Ordine, TOI, (di ingresso e di uscita) traslati alla porta comune (ingresso o uscita) devono essere grosso modo uguali. In questo modo ciascun elemento della cascata influisce sulla distorsione complessiva con la stessa quantità.

### Le resistenze in parallelo

Le equazioni per il calcolo di ITOI e OTOI in cascata ricordano la più familiare equazione per il calcolo delle resistenze in parallelo. Questa rassomiglianza può essere di aiuto per ricordarle.



La figura mostra la somiglianza fra l'equazione per il calcolo delle resistenze in parallelo e l'equazione per il calcolo di OTOI. Quando si aggiunge un nuovo elemento alla catena e come se si aggiungesse una nuova resistenza in parallelo, questo fa sì che il TOI si abbassa (la resistenza totale si abbassa).

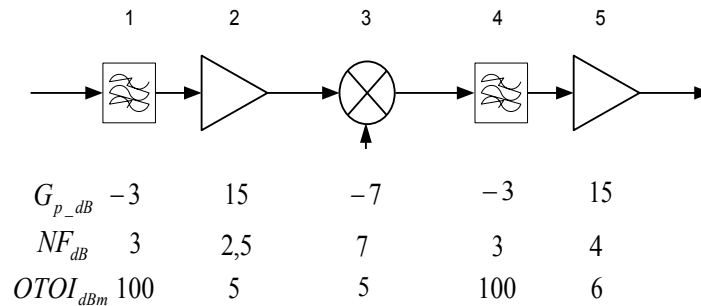
$$\frac{1}{OTOI_{cascata}} = \frac{1}{G_{p-2} \cdot G_{p-3} \cdot OTOI_1} + \frac{1}{G_{p-3} \cdot OTOI_2} + \frac{1}{OTOI_3}$$

In breve l'aggiunta di un nuovo elemento abbassa il punto di intercetta di terzo ordine.

## Appunti sulla linearità

### Esempio 2

(si userà la somma coerente)



Dato il sistema di stadi in cascata rappresentato nella figura e noti per ogni stadio i valori di,  $OTOI_{dBm}$ ,  $NF_{dB}$ ,  $G_{p\_dB}$  e la banda passante  $BW = 30$  kHz.

Calcolare:  $NF_{cascata\_dB}$ ,  $ITOI_{cascata\_dBm}$ ,  $G_{p\_cascata\_dB}$ ,  $MDS_{dBm}$ ,  $SFDR_{dB}$ .

### Soluzione

Per prima cosa conviene convertire le grandezze espresse in dB e dBm in grandezze lineari.

$$OTOI_{dBm} = 10 \log \frac{OTOI}{10^{-3}} \quad \text{per cui} \quad OTOI = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{OTOI_{dBm}}{10}}$$

$$OTOI_1 = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{OTOI_{1\_dBm}}{10}} = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{100}{10}} = 10^7 W$$

$$OTOI_2 = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{OTOI_{2\_dBm}}{10}} = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{5}{10}} = 3,162 \cdot 10^{-3} W$$

$$OTOI_3 = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{OTOI_{3\_dBm}}{10}} = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{5}{10}} = 3,162 \cdot 10^{-3} W$$

$$OTOI_4 = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{OTOI_{4\_dBm}}{10}} = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{100}{10}} = 10^7 W$$

$$OTOI_5 = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{OTOI_{5\_dBm}}{10}} = 10^{-3} \cdot 10^{\frac{6}{10}} = 3,98 \cdot 10^{-3} W$$

Si calcolano i guadagni

$$G_{p\_cascata\_dB} = G_{p\_1\_dB} + G_{p\_2\_dB} + G_{p\_3\_dB} + G_{p\_4\_dB} + G_{p\_5\_dB}$$

$$G_{p\_cascata\_dB} = -3 + 15 + -7 + -3 + 15 = 17 dB$$

$$G_{p\_dB} = 10 \log G_p \quad \text{per cui} \quad G_p = 10^{\frac{G_{p\_dBm}}{10}}$$

$$G_{p\_1} = 10^{\frac{-3}{10}} = 0,5$$

$$G_{p\_2} = 10^{\frac{15}{10}} = 31,62$$

$$G_{p\_3} = 10^{\frac{-7}{10}} = 0,2$$

$$G_{p\_4} = 10^{\frac{-3}{10}} = 0,5$$

$$G_{p\_5} = 10^{\frac{15}{10}} = 31,62$$

Con i valori di OTOI e G in lineare si può procedere al calcolo di OTOI e ITOI in cascata.

## Appunti sulla linearità

$$\frac{1}{OTOI_{cascata}} = \frac{1}{G_{p_{-2}} \bullet G_{p_{-3}} \bullet G_{p_{-4}} \bullet G_{p_{-5}} \bullet OTOI_1} + \frac{1}{G_{p_{-3}} \bullet G_{p_{-4}} \bullet G_{p_{-5}} \bullet OTOI_2} +$$

$$+ \frac{1}{G_{p_{-4}} \bullet G_{p_{-5}} \bullet OTOI_3} + \frac{1}{G_{p_{-5}} \bullet OTOI_4} + \frac{1}{OTOI_5}$$

$$\frac{1}{OTOI_{cascata}} = \frac{1}{0,5 \bullet 31,62 \bullet 0,2 \bullet 31,62 \bullet 10^7} + \frac{1}{31,62 \bullet 0,2 \bullet 0,5 \bullet 3,162 \bullet 10^{-3}} +$$

$$+ \frac{1}{0,5 \bullet 31,62 \bullet 3,162 \bullet 10^{-3}} + \frac{1}{0,5 \bullet 10^7} + \frac{1}{3,98 \bullet 10^{-3}}$$

il primo ed il quarto termine si possono trascurare

$$\frac{1}{OTOI_{cascata}} = (0,1001 + 0,02 + 0,2513) 10^3$$

$$OTOI_{cascata} = \frac{10^{-3}}{(0,1001 + 0,02 + 0,2513)} = \frac{10^{-3}}{0,3714} = 2,6929 \bullet 10^{-3} W$$

in dBm

$$OTOI_{cascata\_dBm} = 10 \log \frac{OTOI_{cascata}}{10_{-3}} = 10 \log 2,6929 \bullet 10^{-3} = 4,362 dBm$$

$$ITOI_{cascata\_dBm} = OTOI_{cascata\_dBm} - G_{p\_dB} = 4,362 dBm - 17 dB = -12,63 dBm$$

Si calcolano i valori della figura di rumore di sistema,  $NF_{cascata}$ , per farlo si devono trasformare i valori logaritmici di NF, di ciascun stadio, in valori lineari

$$NF_1 = 3 dB \quad \text{da cui} \quad F_1 = 10^{\frac{3}{10}} = 2$$

$$NF_2 = 2,5 dB \quad \text{da cui} \quad F_2 = 10^{\frac{2,5}{10}} = 1,77$$

$$NF_3 = 7 dB \quad \text{da cui} \quad F_3 = 10^{\frac{7}{10}} = 5,0119$$

$$NF_4 = 3 dB \quad \text{da cui} \quad F_4 = 10^{\frac{3}{10}} = 2$$

$$NF_5 = 4 dB \quad \text{da cui} \quad F_5 = 10^{\frac{4}{10}} = 2,5$$

$$F_{cascata} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{p_{-1}}} + \frac{F_3 - 1}{G_{p_{-1}} \bullet G_{p_{-2}}} + \frac{F_4 - 1}{G_{p_{-1}} \bullet G_{p_{-2}} \bullet G_{p_{-3}}} + \frac{F_5 - 1}{G_{p_{-1}} \bullet G_{p_{-2}} \bullet G_{p_{-3}} \bullet G_{p_{-4}}}$$

$$F_{cascata} = 2 + \frac{0,77}{0,5} + \frac{4,0119}{0,5 \bullet 31,62} + \frac{1}{0,5 \bullet 31,62 \bullet 0,2} + \frac{1,5}{0,5 \bullet 31,62 \bullet 0,2 \bullet 0,5}$$

$$F_{cascata} = 2 + 1,54 + 0,2538 + 0,3163 + 0,9488 = 5,0589 \quad \text{in dB}$$

$$NF_{cascata} = 10 \log F_{cascata} = 10 \log 5,0589 = 7,04 dB$$

## Appunti sulla linearità

$$MDS_{dBm} = NF_{cascata} - 174 + 10 \log BW$$

$$MDS_{dBm} = 7,04 - 174 + 10 \log 30 \cdot 10^3 = -122,188 dBm$$

$$SFDR_{dB} = \frac{2}{3} (ITOI_{dBm} - MDS_{dBm})$$

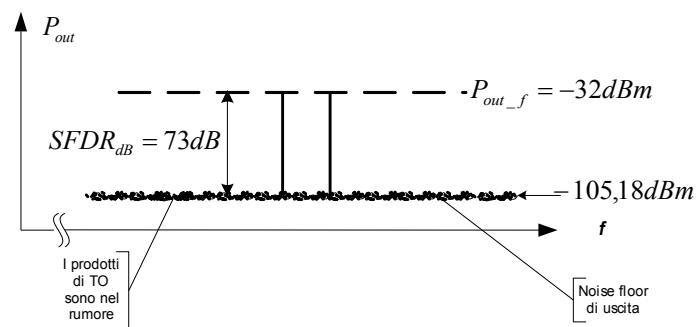
$$SFDR_{dB} = \frac{2}{3} (-12,63_{dBm} - (-122,188_{dBm})) = 73_{dB}$$

Il Noise Floor sarà

$$NoiseFloor_{dBm} = G_{p\_cascata\_dB} + NF_{cascata} - 174 + 10 \log BW$$

$$NoiseFloor_{dBm} = 17 + 7,04 - 174 + 10 \log 30 \cdot 10^{-3} = -105,18 dBm$$

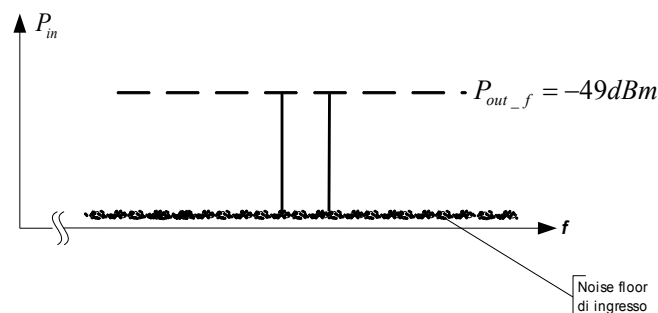
La situazione nel dominio delle frequenza potrà essere rappresentata come in figura



Il corrispondente livello di ingresso sarà

$$P_{in\_f\_dBm} = P_{out\_f\_dBm} - G_{p\_dB}$$

$$P_{in\_f\_dBm} = -32 dBm - 17 dB = -49 dBm$$



Nota 1

$P_{in\_f\_1}$  coincide con  $P_{in\_1}$  in quanto all'ingresso del primo stadio non esistono prodotti di Terzo Ordine, esiste solamente la componente fondamentale.

## Appunti sulla linearità

---

### ***Riferimenti***

- Ralph S. Carson, ***Radio Concept Analog***, John Wiley & Sons.
- Kevin Mc Claning, Tom Vito, ***Radio Receiver Design***, Noble Publishing.