

Elettronica per le telecomunicazioni

AA 2014 - 2015

Linearità

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il **rumore termico** fissa il limite inferiore del più piccolo segnale che può essere processato.

La **linearità** fissa invece il **limite superiore**, quello del più grande segnale che può essere processato.

Si possono fare dei modelli lineari di quasi tutti i sistemi non lineari se si prende in considerazione una regione limitata della loro gamma di funzionamento.

Un amplificatore RF è un dispositivo non lineare, ma se il segnale di ingresso è sufficientemente piccolo, l'amplificatore può essere rappresentato da un modello lineare.

Anche un semplice filtro LC è un dispositivo non lineare. Se sottoposto a segnali molto ampi si possono manifestare fenomeni di saturazione nell'induttanza e comportamenti non lineari nel dielettrico del condensatore.

La rappresentazione matematica di un sistema lineare è semplice e facilmente comprensibile. Non è così per un sistema non lineare, il quale viene descritto come una **deviazione da un sistema lineare**.

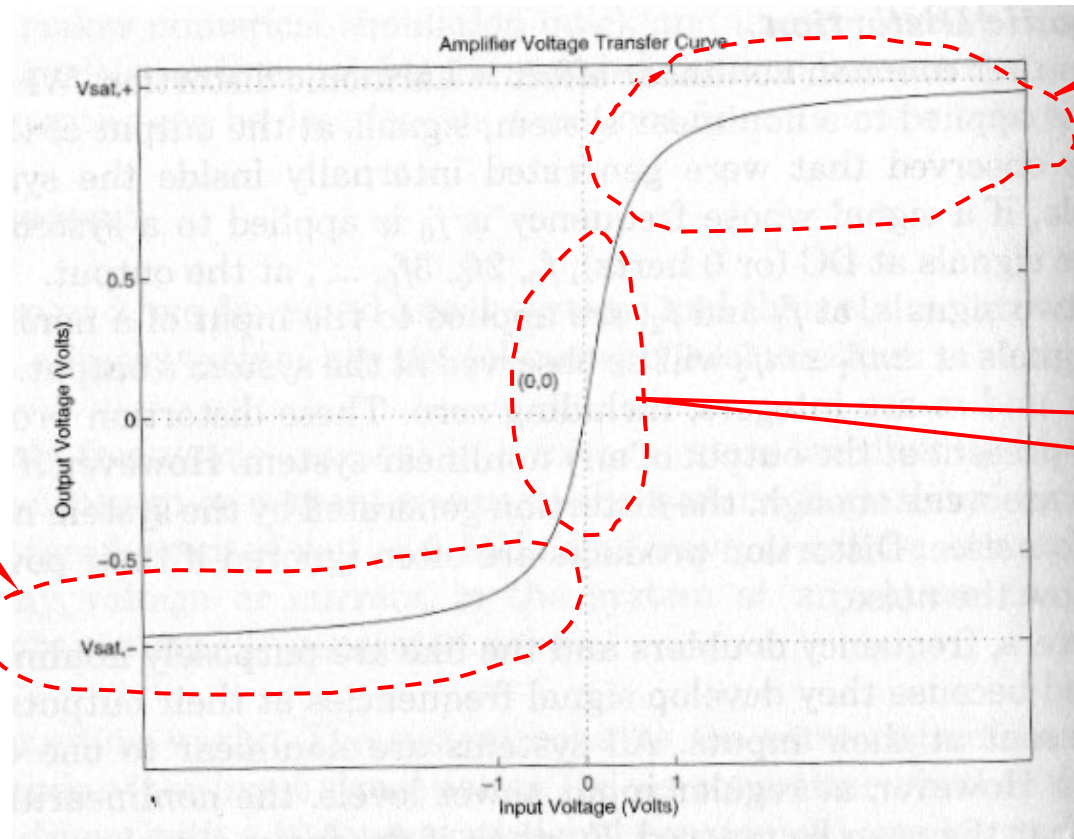
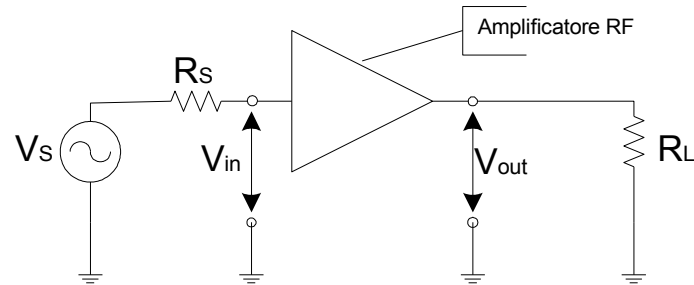
I sistemi lineari hanno le seguenti caratteristiche:

- I segnali di corrente e di tensione mantengono una sola frequenza, quella del segnale di ingresso.
- E' valido il principio della sovrapposizione degli effetti.
- Le caratteristiche del sistema non variano se al suo ingresso sono applicati più segnali contemporaneamente.

I sistemi che prenderemo in considerazione sono debolmente non lineari, sono dei sistemi che si possono considerare „quasi“ lineari, in quanto si comportano come non lineari solamente in certe condizioni e comunque non cambiano drasticamente le loro caratteristiche.

Uno degli effetti più comuni è il **modificarsi della caratteristica di trasferimento** di tensione in funzione del cambiamento del livello di potenza del segnale di ingresso. Per esempio un amplificatore presenta un guadagno di potenza **G_p ad un livello di ingresso** basso, ma questo guadagno di potenza si riduce quando il livello di potenza del segnale di ingresso sale oltre un certo limite. Questo fenomeno è conosciuto come ***compressione del guadagno***

Un effetto abbastanza comune dovuto alla non linearità è la ***distorsione armonica***. Quando un segnale viene applicato all'ingresso di sistema non lineare, esso genererà all'uscita dei segnali con frequenze diverse da quella applicata all'ingresso.

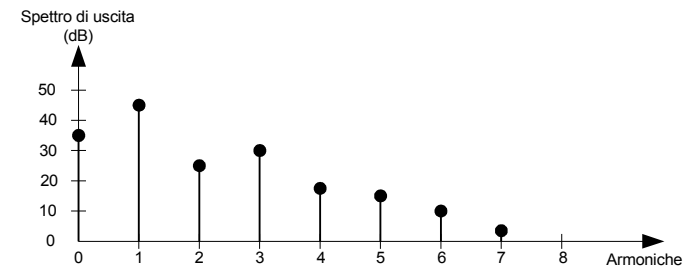
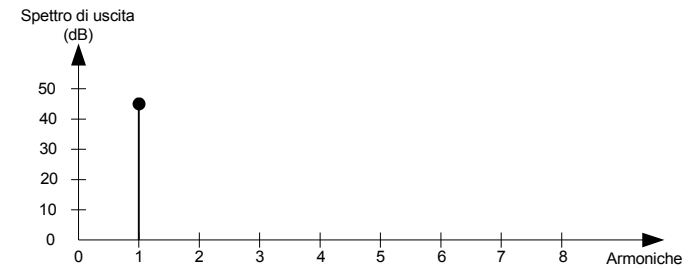
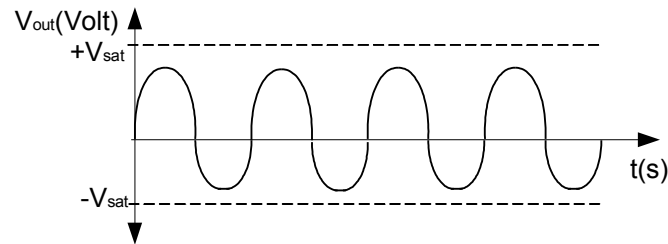
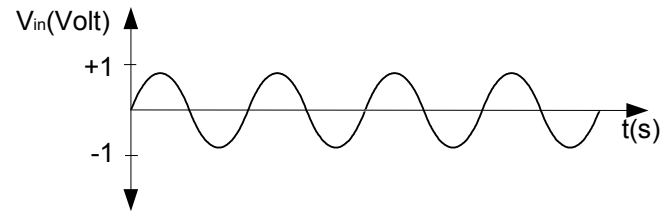


Saturazione

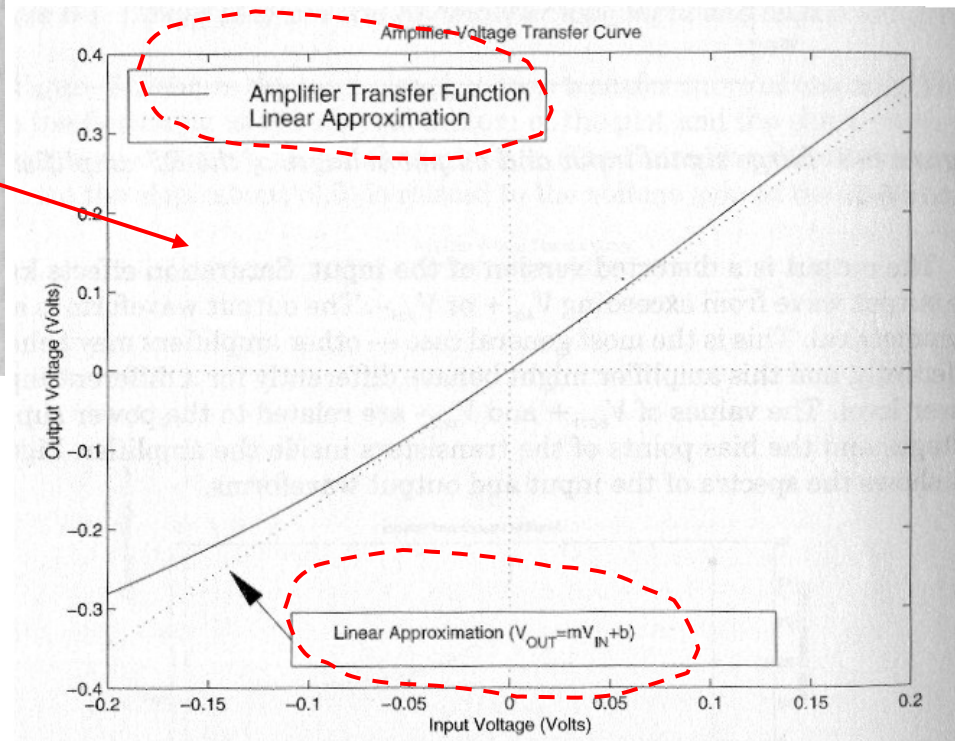
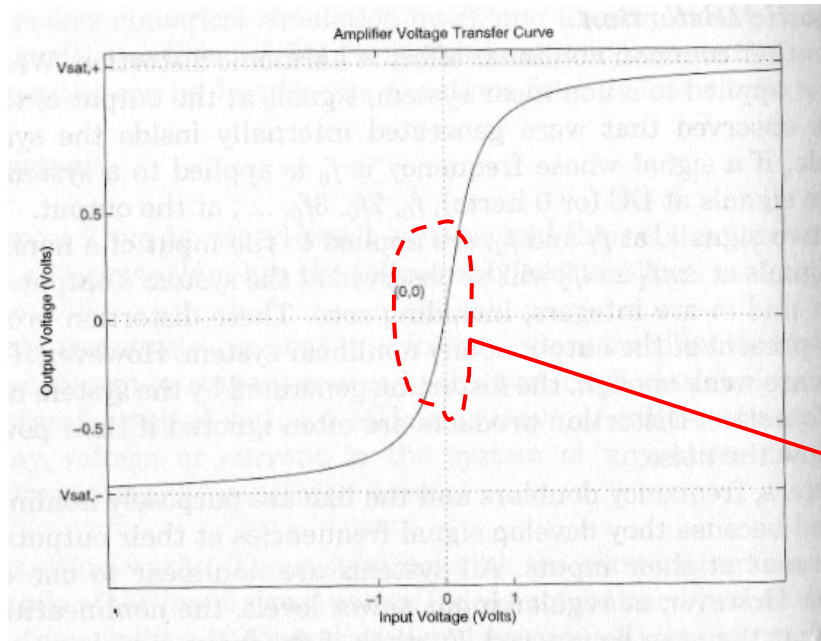
Saturazione

Zona di
funzionamento
lineare

Amplificatore pilotato con segnali ampi



Amplificatore pilotato con segnali deboli

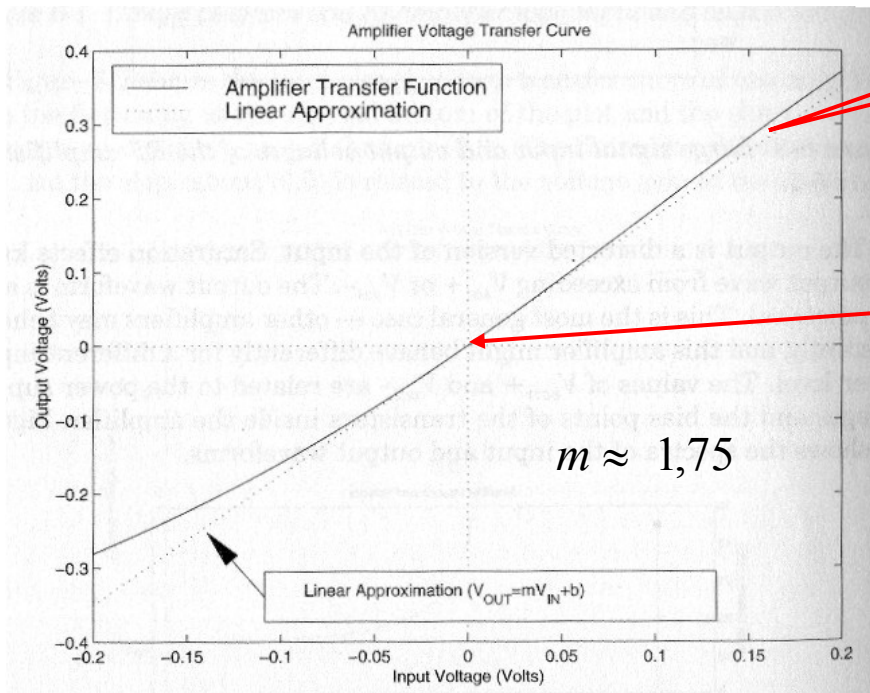


Caratteristica di trasferimento di un amplificatore

Esempio

Mettere in evidenza che la pendenza della funzione di trasferimento di un amplificatore è direttamente correlata al guadagno di potenza dell'amplificatore. Assumere che l'amplificatore lavora in un sistema con Z_0 .

La caratteristica di trasferimento è



Retta di pendenza m

$$V_{out}(t) = mV_{in}(t) + b$$

Dove b è il punto di intersezione sull'asse y della retta, nel nostro caso $b = 0$

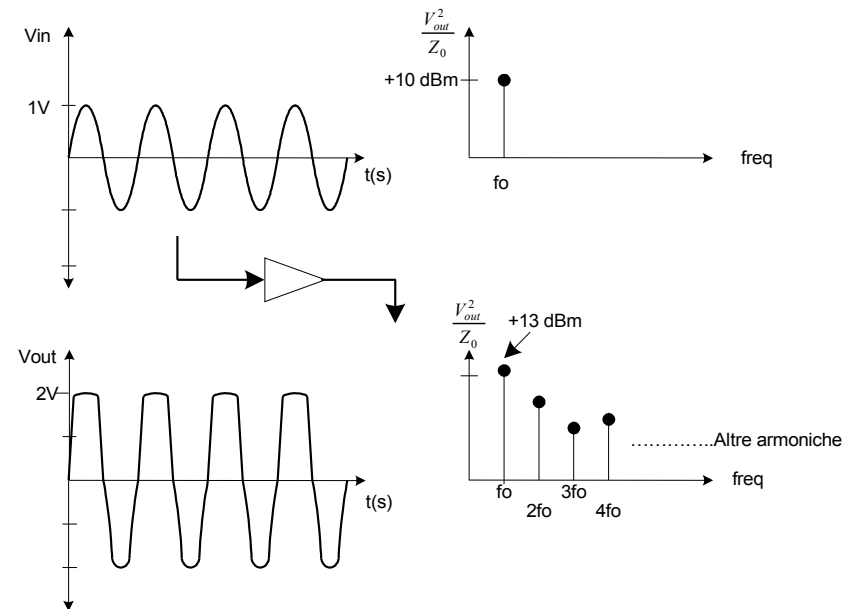
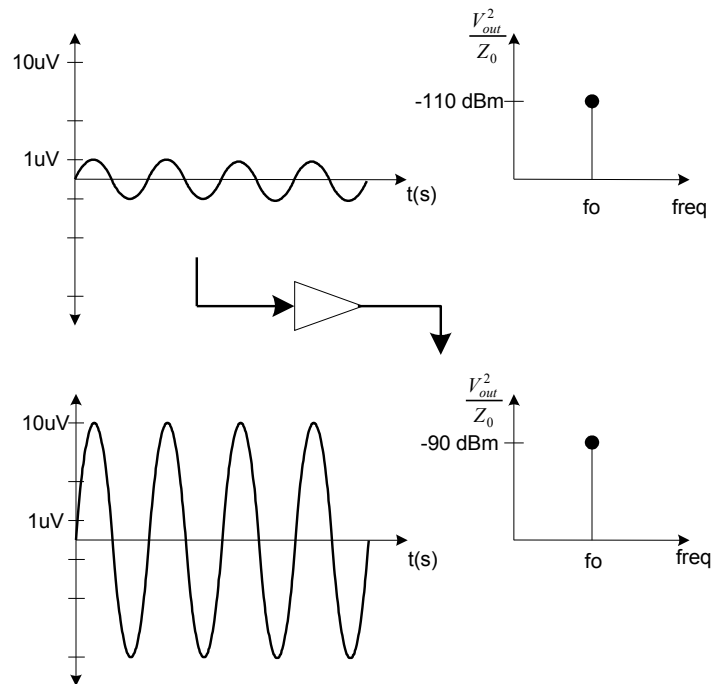
$$V_{out}(t) = mV_{in}(t) \Rightarrow \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} = m$$

$$G_P = \frac{\frac{V_{out}^2(t)}{R_L}}{\frac{V_{in}^2(t)}{R_{amp_in}}}$$

$$R_L = R_{amp_in} = Z_0$$

$$G_P = \frac{V_{out}^2(t)}{V_{in}^2(t)} = m^2$$

$$G_P = 1,75^2 = 3,06 \Rightarrow 4,9dB$$



Una qualsiasi funzione di trasferimento di un dispositivo non lineare può essere espressa tramite un polinomio.

L'errore di approssimazione la curva caratteristica di trasferimento, sarà tanto più piccolo quanto più grande è il numero dei termini del polinomio.

$$y = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots + k_nx^n$$

Nel caso di un amplificatore RF l'equazione può essere riscritta come segue

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1V_{in}(t) + k_2V_{in}^2(t) + k_3V_{in}^3(t) + \dots + k_nV_{in}^n(t)$$

L'approssimazione lineare è valida se i segnali sono piccoli e vicini al punto 0 della caratteristica di trasferimento.

Al crescere del livello dei segnali si deve descrivere la caratteristica di trasferimento con un polinomio di secondo o di terzo ordine.

In genere i polinomi di terzo ordine descrivono con sufficiente approssimazione lo studio degli amplificatori in regime quasi lineare.

Considerando che è possibile approssimare la funzione di trasferimento di tensione di un amplificatore con l'equazione.

$$V_{out}(t) = \underbrace{k_0}_{\text{red dashed circle}} + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

si può studiare il segnale di uscita quando all'ingresso viene applicato un segnale sinusoidale

$$V_{in} = \cos(\omega t)$$

Il termine k_0

Il termine di ordine 0 è indipendente dal segnale di ingresso. Questo termine rappresenta una tensione continua presente all'uscita dell'amplificatore.

In questo contesto l'interesse è orientato ai termini di ordine superiore e quindi lo si trascura.

Generalmente lo si può trascurare in pratica se il trasferimento del segnale da uno stadio ad un altro avviene in AC, ma non sempre è così, ad esempio nei circuiti integrati.

Approssimazione dei polinomi

Analisi con un singolo segnale

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine $k_1 V_{in}^1$

Rappresenta il guadagno dell'amplificatore.

Con un segnale di ingresso $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$ $\Rightarrow V_{out_1}(t) = k_1 A \cos(\omega t)$

Questo termine lineare o di primo ordine non è responsabile di alcuna distorsione sul segnale di uscita.

Il termine $k_2 V_{in}^2$

E' responsabile per generare all'uscita dell'amplificatore alcuni segnali indesiderati.

Per un segnale sinusoidale di ingresso $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$

$$k_2 V_{in}^2 \Rightarrow V_{out_2}(t) = k_2 A^2 \cos^2(\omega t) \Rightarrow V_{out_2}(t) = \frac{k_2 A^2}{2} [1 + \cos(2\omega t)]$$

Corrente continua

$$V_{out_2}(t) = \frac{k_2 A^2}{2} + \frac{k_2 A^2}{2} \cos(2\omega t)$$

Frequenza doppia

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine $k_3 V_{in}^3$

Con un segnale di ingresso $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$

$$k_3 V_{in}^3 \rightarrow V_{out_3}(t) = k_3 A^3 \cos^3(\omega t) \rightarrow V_{out_3}(t) = \frac{k_3 A^3}{4} [3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)]$$

$$V_{out_3}(t) = \frac{3k_3 A^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{k_3 A^3}{4} \cos(3\omega t)$$

Segnale alla
frequenza del
segnale di
ingresso

Segnale a
frequenza
tripla

Approssimazione dei polinomi

Analisi con un singolo segnale

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + \boxed{k_4 V_{in}^4(t)} + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine $k_4 V_{in}^4$

Con un segnale di ingresso $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$

$$k_4 V_{in}^4 \rightarrow V_{out_4}(t) = k_4 A^4 \cos^4(\omega t) \rightarrow V_{out_4}(t) = \frac{k_4 A^4}{8} [3 + 4 \cos(2\omega t) + \cos(4\omega t)]$$

$$V_{out_4}(t) = \boxed{\frac{3k_4 A^4}{8}} + \boxed{\frac{k_4 A^4}{2} \cos(2\omega t)} + \boxed{\frac{k_4 A^4}{8} \cos(4\omega t)}$$

Componente in
corrente continua


Segnale alla
frequenza
doppia


Segnale a
frequenza
quadrupla

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + k_4 V_{in}^4(t) + k_5 V_{in}^5(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine $k_5 V_{in}^5$

Con un segnale di ingresso $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$

$k_5 V_{in}^5$  $V_{out_5}(t) = k_5 A^5 \cos^5(\omega t)$

 $V_{out_5}(t) = \frac{k_5 A^5}{16} [10 \cos(\omega t) + 5 \cos(3\omega t) + \cos(5\omega t)]$

Componente alla
frequenza della
fondamentale

Componente
alla frequenza
trippla

Componente
alla
frequenza
quintupla

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + k_4 V_{in}^4(t) + k_5 V_{in}^5(t) + k_6 V_{in}^6(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine $k_6 V_{in}^6$

Con un segnale di ingresso $V_{in}(t) = A \cos(\omega t)$

$$k_6 V_{in}^6 \rightarrow V_{out_6}(t) = k_6 A^6 \cos^6(\omega t)$$

$$V_{out_6}(t) = \frac{k_6 A^6}{32} [10 + 15 \cos(2\omega t) + 6 \cos(4\omega t) + \cos(6\omega t)]$$

Componente in
corrente continua

Componente
alla frequenza
doppia

Componente
alla
frequenza
quadrupla

Componente
alla
frequenza
sestupla

Approssimazione dei polinomi

Analisi con un singolo segnale, osservazioni



Alcune osservazioni

Per i termini di **ordine pari**, con n pari, il termine $\cos^n(\omega t)$ provoca solamente **armoniche pari**, ... ma anche una **componente continua**.

Per i termini di **ordine dispari**, con n dispari, il termine $\cos^n(\omega t)$ provoca solamente **armoniche dispari**. Non viene generata una componente continua.

Per un dato valore di n , il termine $\cos^n(\omega t)$ produce armoniche fino alla armonica n , **ma non superiori**.

La potenza delle componenti decresce all'aumentare dell'ordine del termine.

La **f** fondamentale e lo strumento a disposizione pongono un limite all'analisi che può essere fatta studiando le armoniche.

Approssimazione dei polinomi

Analisi con due segnali

Si è visto il comportamento di un dispositivo con un solo segnale applicato al suo ingresso, in pratica questa è una condizione rara, di solito all'ingresso di un dispositivo sono applicati più segnali.

Per capire come si comporta un dispositivo non lineare in presenza di più segnali simultaneamente presenti al suo ingresso (segnali con frequenze differenti e con differenti livelli di potenza) si analizzerà il sistema con solamente due segnali all'ingresso, quindi in condizioni più semplici di quelle reali.

I segnali all'ingresso si ipotizzano sinusoidali

$$V_{in}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

La tensione di uscita sarà sempre espressa dalla

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

$$V_{out}(t) = \underbrace{k_0}_{\text{red dashed}} + \underbrace{k_1 V_{in}(t)}_{\text{pink dashed}} + \underbrace{k_2 V_{in}^2(t)}_{\text{cyan dashed}} + k_3 V_{in}^3(t) + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine k_0

E' il termine che rappresenta la componente continua , valgono le considerazioni fatte per l'analisi con un singolo segnale.

Il termine $k_1 V_{in}^1$

Con all'ingresso due segnali $V_{in}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$ Guadagno

$k_1 V_{in}^1$ $V_{out_1}(t) = k_1 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)]$

Il termine $k_2 V_{in}^2$

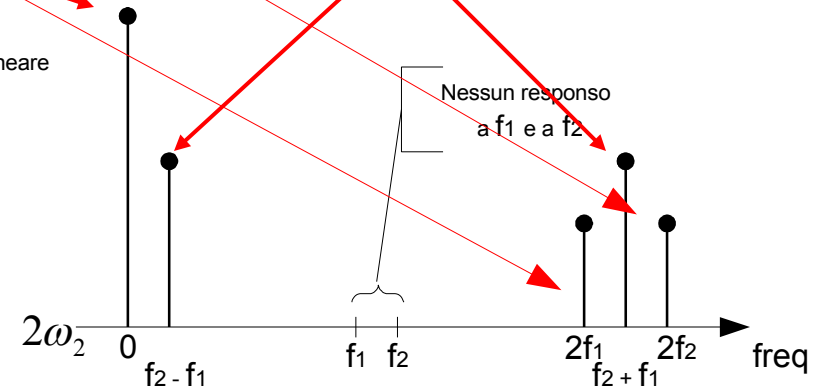
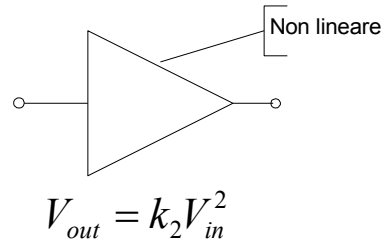
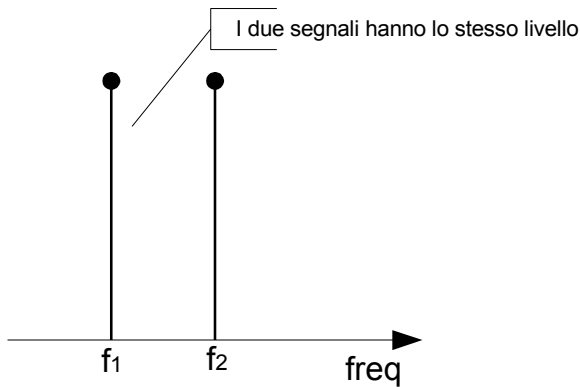
Con all'ingresso due segnali $V_{in}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$ $k_2 V_{in}^2$

$$V_{out_2}(t) = k_2 \left[\frac{A_1^2 A_2^2}{2} + \frac{A_1^2 \cos(2\omega_1 t)}{2} + \frac{A_2^2 \cos(2\omega_2 t)}{2} + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \right]$$

Approssimazione dei polinomi

Analisi con due segnali

$$V_{out_2}(t) = k_2 \left[\frac{A_1^2 A_2^2}{2} + \frac{A_1^2 \cos(2\omega_1 t)}{2} + \frac{A_2^2 \cos(2\omega_2 t)}{2} + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \right]$$



Approssimazione dei polinomi

Analisi con due segnali

$$V_{out}(t) = k_0 + k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + \boxed{k_3 V_{in}^3(t)} + \dots + k_n V_{in}^n(t)$$

Il termine $k_3 V_{in}^3$

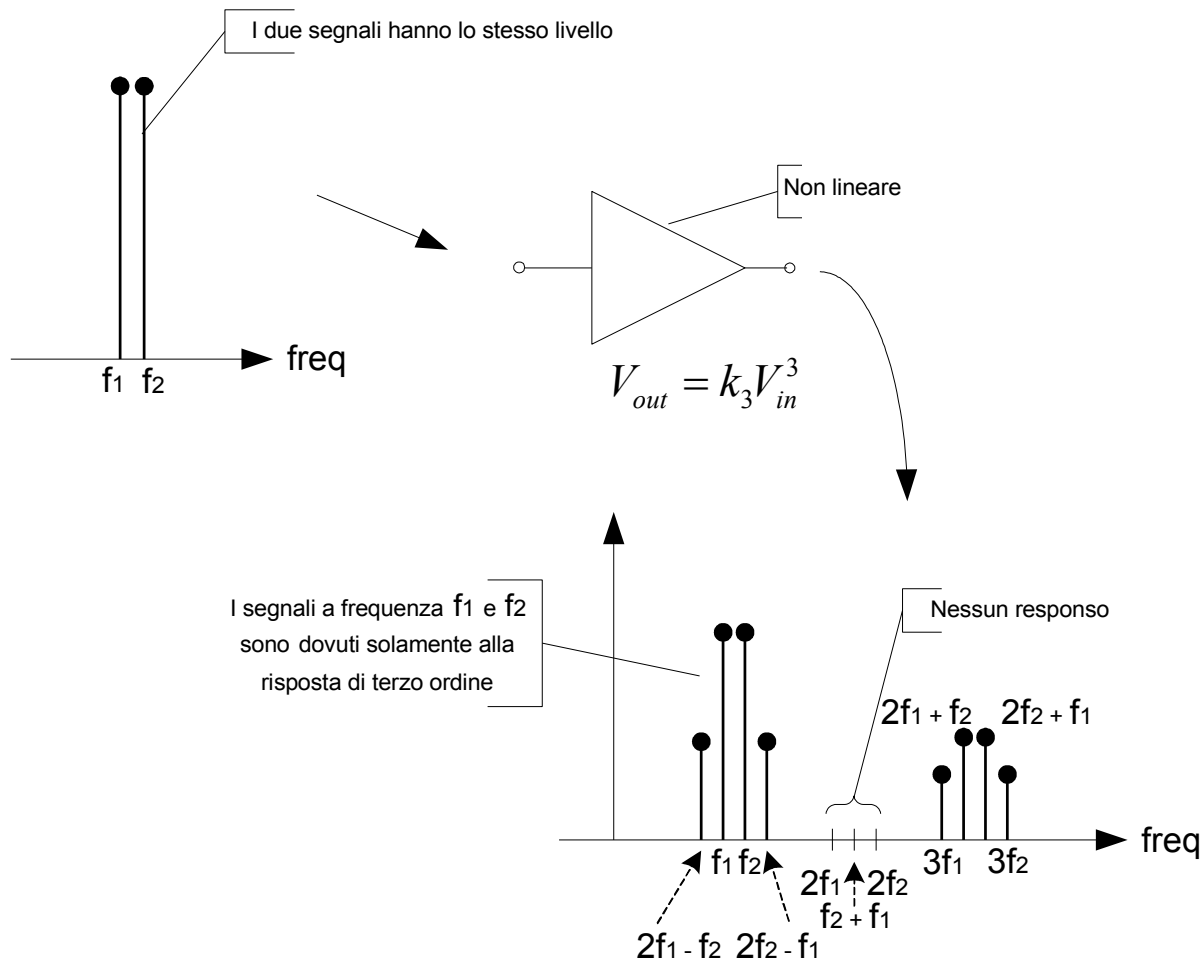
Con all'ingresso due segnali $V_{in}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$ $k_3 V_{in}^3$

$$V_{out_3}(t) = k_3 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)]^3$$

$$\begin{aligned} V_{out_3}(t) = k_3 & \left\{ \left(\frac{3A_1^3}{4} + \frac{3A_1 A_2^2}{4} \right) \cos(\omega_1 t) + \left(\frac{3A_2^3}{4} + \frac{3A_1^2 A_2}{4} \right) \cos(\omega_2 t) + \right. \\ & + \frac{A_1^3}{4} \cos(3\omega_1 t) + \frac{A_2^3}{4} \cos(3\omega_2 t) + \\ & + \left(\frac{3A_1^2 A_2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t] + \left(\frac{3A_1^2 A_2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t] + \\ & + \left(\frac{3A_1 A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 + \omega_1)t] + \left. \left(\frac{3A_1 A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t] \right\} \end{aligned}$$

Approssimazione dei polinomi

Analisi con due segnali



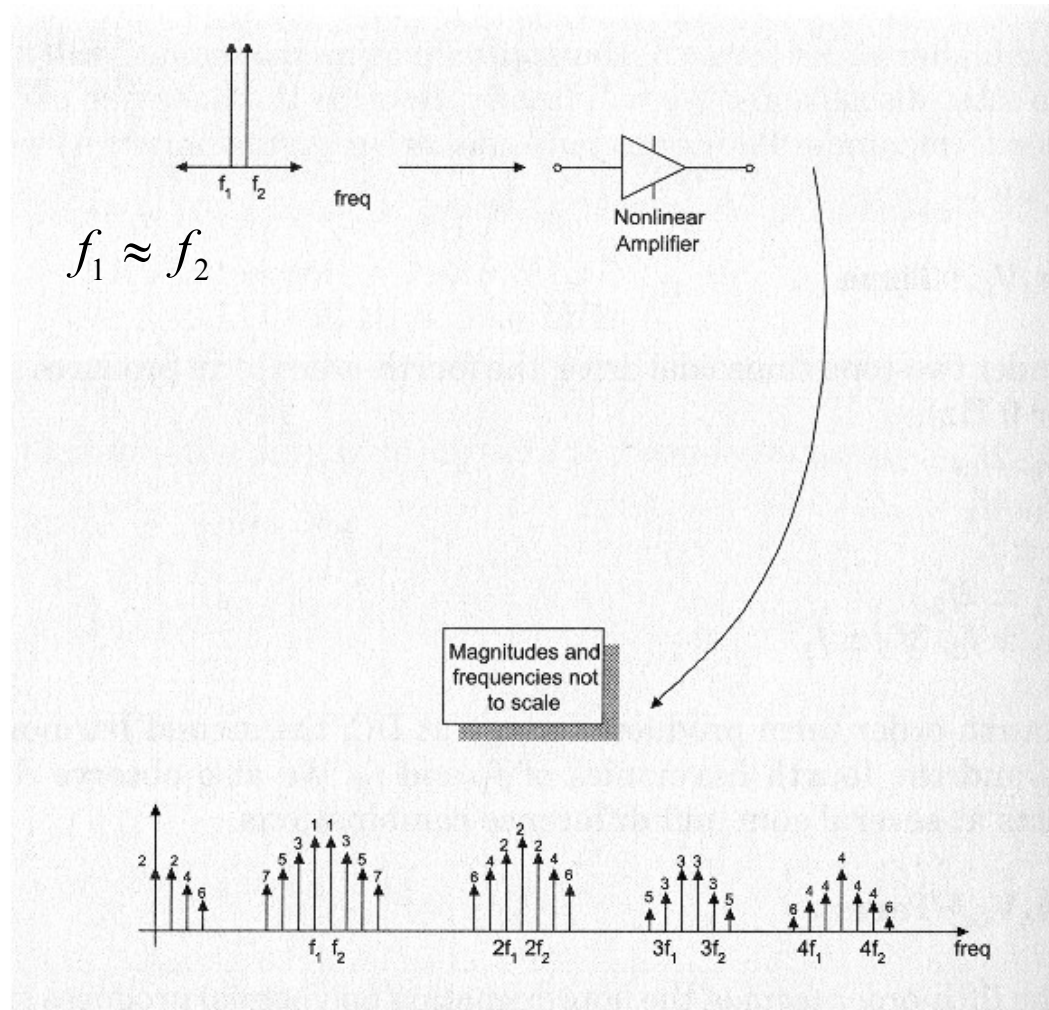
Il termine $k_4 V_{in}^4$

Quando un dispositivo non lineare, con sola distorsione di quarto ordine, è pilotato con due segnali sinusoidali di ampiezza uguale all'uscita si ha:

- una componente in corrente continua,
- due componenti di seconda armonica una per ciascuna delle frequenze di ingresso, $2f_1$ $2f_2$
- due componenti di quarta armonica una per ciascuna delle frequenze di ingresso, $4f_1$ $4f_2$
- $f_1 \pm f_2$
- $2f_1 \pm 2f_2$
- $3f_2 \pm f_1$ $3f_1 \pm f_2$

Approssimazione dei polinomi

Analisi con due segnali



I segnali generati dal processo non lineare tendono a **concentrarsi nelle vicinanze delle armoniche dei due segnali di ingresso**

- Le approssimazioni fatte fin qui vanno bene per dispositivi moderatamente non lineari pilotati con segnali sinusoidali di livello moderato,
cioè che non vanno ad interessare le zone di saturazione.
- Per segnali veramente **molto piccoli** (ignorando la componente DC) si possono ignorare tutti i termini superiori al primo ordine ed il dispositivo può essere **considerato lineare**

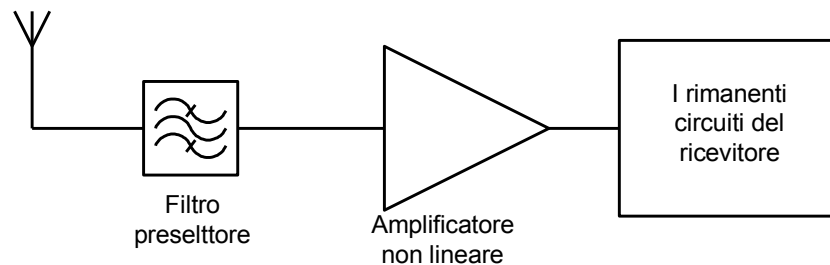
$$V_{out}(t) = k_1 V_{in}(t) \text{ per } \Rightarrow V_{in}(t) \approx 0$$

- Quando il segnale è piccolo, ma di ampiezza sufficiente a generare una **distorsione misurabile** si può considerare il polinomio fino al terzo ordine

$$V_{out}(t) = k_1 V_{in}(t) + k_2 V_{in}^2(t) + k_3 V_{in}^3(t)$$

Ogni sistema di ricezione è progettato per ricevere dei segnali in una determinata banda .

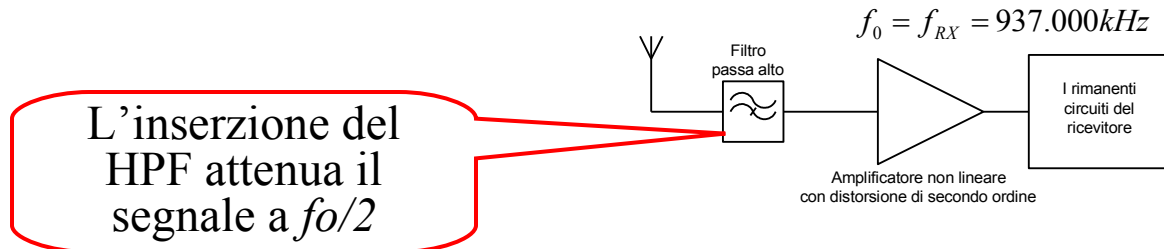
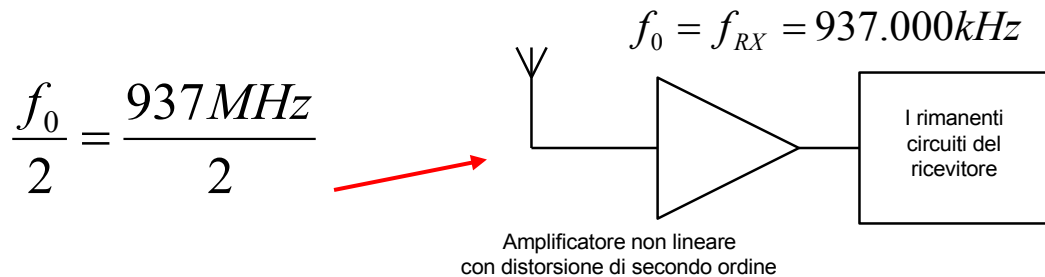
Per delimitare la capacità di ricezione del ricevitore alla sola banda interessata si inserisce fra l'antenna ed il primo stadio amplificatore un filtro (generalmente passa banda) che viene chiamato filtro preselettore.



Un solo segnale di ingresso

Tenendo conto della relazione
$$V_{out_2}(t) = \frac{k_2 A^2}{2} + \frac{k_2 A^2}{2} \cos(2\omega t)$$

si vede che, se viene preso in considerazione un ricevitore sintonizzato alla frequenza ***f*₀** privo di filtro preselettore, se al suo ingresso è presente un segnale alla frequenza ***f*₀/2 forte** (*tale cioè da provocare la distorsione di secondo ordine*), questo segnale sarà ricevuto come un segnale utile.



Due segnali di ingresso

Tenendo conto della relazione che descrive le uscite di secondo ordine per due segnali di ingresso

$$V_{out_2}(t) = k_2 \left[\frac{A_1^2 A_2^2}{2} + \frac{A_1^2 \cos(2\omega_1 t)}{2} + \frac{A_2^2 \cos(2\omega_2 t)}{2} + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \right]$$

si vede qualsiasi copia di segnali che soddisfa la relazione $f_{tuned} = |f_1 \pm f_2|$ può provocare una interferenza di secondo ordine.

Il rimedio per ridurre gli effetti della distorsione di secondo ordine è un filtro preselettore passa banda con banda passante inferiore a una ottava, si deve far sì che

$$f_{HIGH} < 2f_{LOW}$$

di conseguenza anche la banda di ricezione sarà contenuta entro questi limiti.

Si è visto che, in un dispositivo non lineare gli effetti della distorsione di secondo ordine si possono attenuare tramite l'impiego di un appropriato filtro preselettore. Non è così per la distorsione da intermodulazione di **terzo ordine** i cui effetti sono limitati solamente dalla **linearità del sistema**.

Un solo segnale di ingresso

L'equazione descrive il segnale di uscita dovuto alla distorsione di terzo ordine quando all'ingresso dell'amplificatore è presente un solo segnale sinusoidale

$$V_{out_3}(t) = \frac{3k_3 A^3}{4} \cos(\omega t) + \frac{k_3 A^3}{4} \cos(3\omega t)$$

Se il segnale di ingresso ha la frequenza f_1 le uscite di terzo ordine all'uscita saranno f_1 e $3f_1$.

La componente a frequenza f_1 si combina (da considerare la fase) con la componente fondamentale o utile.

La componente a frequenza $3f_1$ cade al di fuori del filtro preselettore se questo è stato dimensionato secondo i criteri dettati dalla distorsione di secondo ordine ($f_{HIGH} < 2f_{LOW}$).

Due segnali di ingresso

L'equazione dovuta al termine di terzo ordine è

$$\begin{aligned}
 V_{out_3}(t) = k_3 & \left\{ \left(\frac{3A_1^3}{4} + \frac{3A_1A_2^2}{4} \right) \cos(\omega_1 t) + \left(\frac{3A_2^3}{4} + \frac{3A_1^2A_2}{4} \right) \cos(\omega_2 t) + \right. \\
 & + \frac{A_1^3}{4} \cos(3\omega_1 t) + \frac{A_2^3}{4} \cos(3\omega_2 t) + \\
 & + \left(\frac{3A_1^2A_2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t] + \left(\frac{3A_1^2A_2}{4} \right) \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t] + \\
 & + \left(\frac{3A_1A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 + \omega_1)t] + \left(\frac{3A_1A_2^2}{4} \right) \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t] \Big\}
 \end{aligned}$$

E' interessante e conveniente osservare i segnali generati dalla distorsione di TO quando si verifica che le frequenze di ingresso sono vicine e sono contenute nella banda del filtro preselettore.

$$f_1 \approx f_2$$

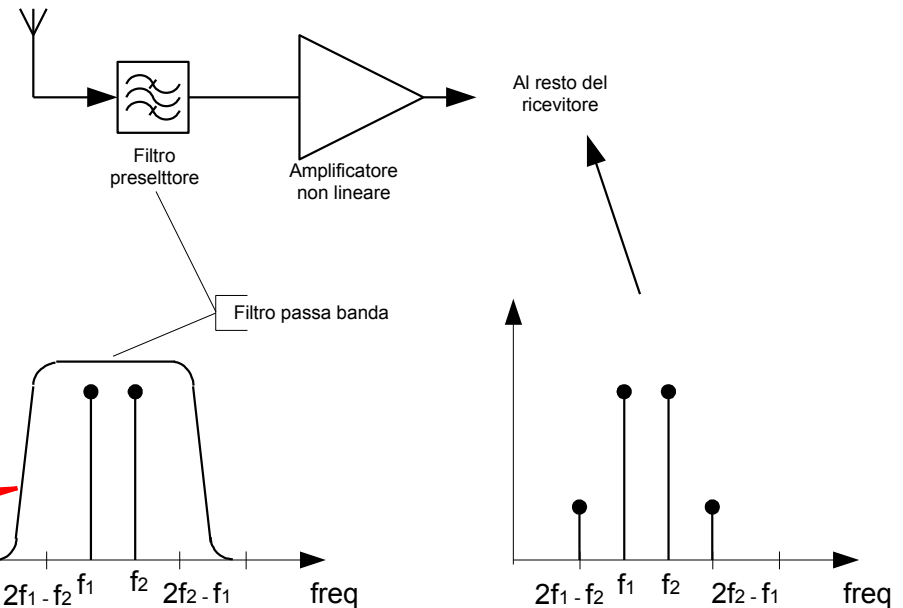
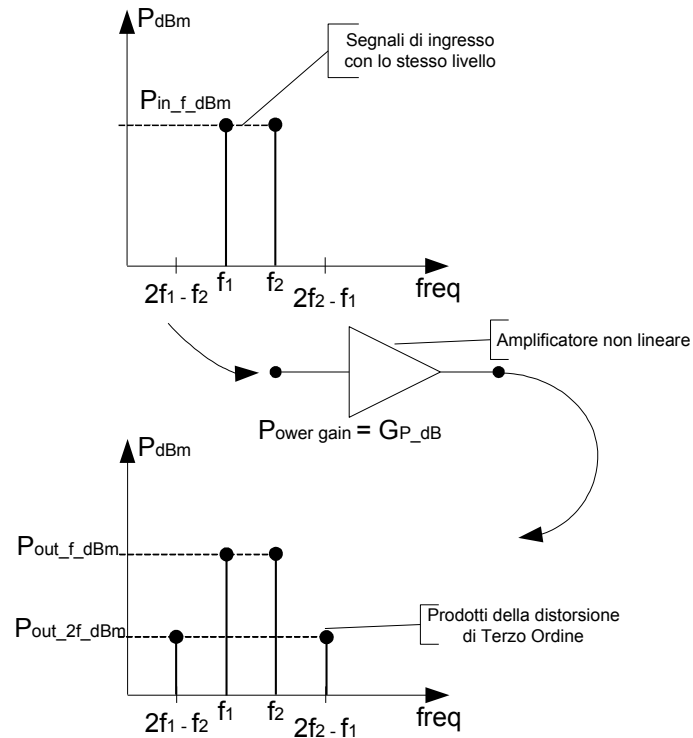
Le componenti di terzo ordine sono:

$$\text{a) } \underbrace{2f_1 + f_2 \text{ e } 2f_2 + f_1}_{f_1 \approx f_2} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 2f_1 + f_2 &\approx 3f_1 \approx 3f_2 \\ 2f_2 + f_1 &\approx 3f_1 \approx 3f_2 \end{aligned}$$

Queste componenti cadono vicino alla terza armonica della frequenza di ingresso e quindi possono essere **filtrate dal filtro preselettore** se ha una banda inferiore all'ottava.

$$\text{b) } \underbrace{2f_1 - f_2 \text{ e } 2f_2 - f_1}_{f_1 \approx f_2} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 2f_1 - f_2 &\approx f_1 \approx f_2 \\ 2f_2 - f_1 &\approx f_1 \approx f_2 \end{aligned}$$

Queste componenti della distorsione cadono vicino alle frequenze di ingresso e **non vengono filtrate** dal filtro preselettore. La sola via per ridurle è avere una caratteristica di trasferimento più lineare possibile.



Il filtro preselettore ha una larghezza di banda tale da contenere 4 canali

Sono state prese in considerazioni in dettaglio le distorsioni di **secondo ordine e di terzo ordine** perché **sono quelle di maggiore interesse pratico**, bisogna però ricordare che un dispositivo reale presenta anche distorsioni di ordine superiore.

Se un segnale di ingresso di frequenza f_0 viene applicato ad un dispositivo non lineare il dispositivo genererà armoniche a

$$nf_0 \Rightarrow \text{dove} \Rightarrow n = 2, 3, 4, \dots$$

Se guardiamo al problema dal punto di vista del ricevitore, significa che se esso è sintonizzato su f_0 , **tutti i segnali di ingresso** con frequenza

$$\frac{f_0}{n} \Rightarrow \text{dove} \Rightarrow n = 2, 3, 4, \dots$$

potranno generare interferenze con il segnale utile.