

Linee di trasmissione e parametri S

Indice

Appunti di richiamo sulle linee di trasmissione.....	1
SWR.....	15
Appunti sui Parametri S	27
Il calcolo dei parametri S.....	39
Esercizi sui parametri S.....	44

Appunti di richiamo sulle linee di trasmissione

Tipi di linee di trasmissione

Ci sono diversi tipi di linee di trasmissione. Tre tipi abbastanza comuni sono rappresentati nella figura 1,

- la linea di trasmissione bifilare,
- la linea di trasmissione coassiale,
- la linea di trasmissione a microstriscia.

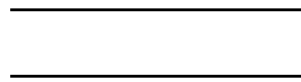


Figura 1 a

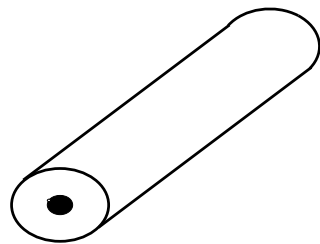


Figura 1 b

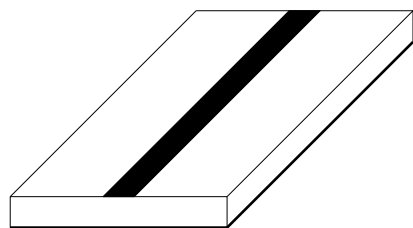


Figura 1 c

Modello della linea di trasmissione con parametri distribuiti.

La teoria delle linee di trasmissione si può spiegare usando un modello di circuito con i parametri distribuiti. Un modello elettrico di linea di trasmissione è rappresentato nella figura 2 a. La linea viene vista come una rete a due porte, la linea riceve la potenza dalla sorgente (fine della linea dal lato della sorgente) alla porta di ingresso e la spedisce al carico connesso alla porta di uscita (fine della linea dal lato del carico).

Linee di trasmissione e parametri S

La lunghezza della linea è divisa in molte sezioni uguali Δx . Il modello di ciascuna di queste sezioni è costruito con ,

- una resistenza per unità di lunghezza ognuna R (R in $\frac{\Omega}{m}$),
- una induttanza per unità di lunghezza ognuna L (L in $\frac{H}{m}$),
- una capacità per unità di lunghezza ognuna C (C in $\frac{F}{m}$).
- una conduttanza per unità di lunghezza ognuna G (G in $\frac{S}{m}$),

Questi parametri si considerano costanti per tutta la lunghezza della linea (linea di trasmissione uniforme).

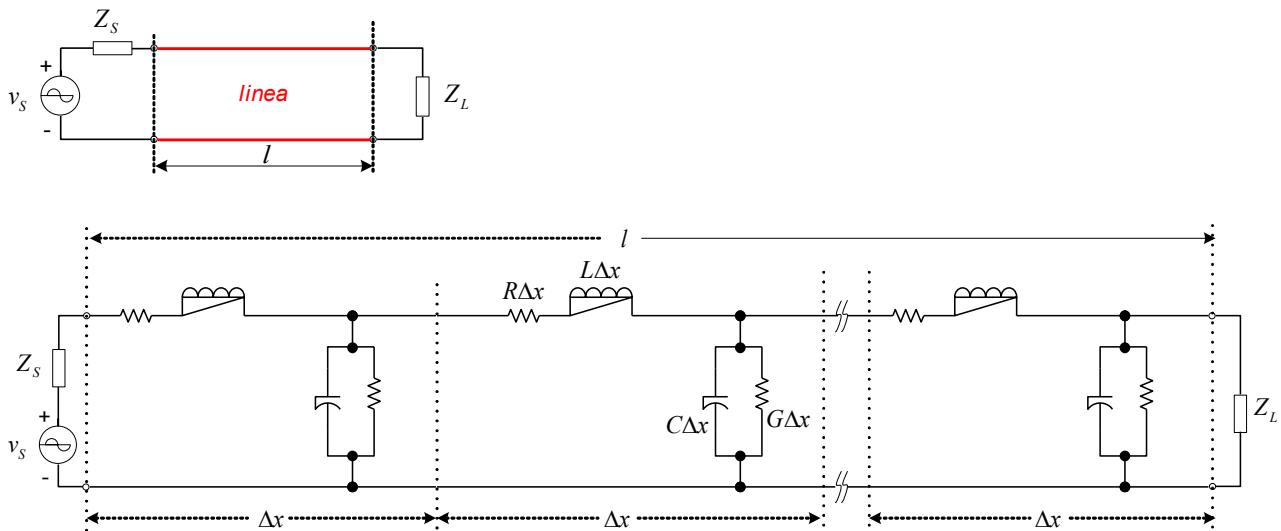


Figura 2 a

La figura 2 b mostra una sezione Δx della linea di trasmissione con le tensioni e le correnti alle porte di ingresso e di uscita. Si può osservare che le tensioni e le correnti lungo la linea di trasmissione sono funzioni della posizione e del tempo. All'ingresso della sezione Δx la tensione e la corrente sono $v(x,t)$ e $i(x,t)$ mentre all'uscita sono $v(x+\Delta x,t)$ e $i(x+\Delta x,t)$

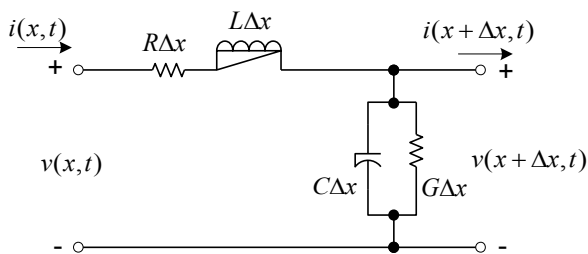


Figura 2 b

Applicando le leggi di Kirchhoff sulle tensioni al modello della figura 2 b si ha,

$$v(x,t) - v(x+\Delta x,t) = R\Delta x i(x,t) + L\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

dividendo per Δx

Linee di trasmissione e parametri S

$$\frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} = -Ri(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

Considerano che $\Delta x \Rightarrow 0$, la parte destra dell'equazione si considera come la derivata parziale di $v(x, t)$ rispetto ad x .

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -Ri(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

Similmente applicando le leggi di Kirchoff sulle correnti al modello di figura 2 b si ha,

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = G\Delta x v(x + \Delta x, t) + C\Delta x \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

dividendo per Δx

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -Gv(x + \Delta x, t) - C \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

Ponendo $\Delta x \Rightarrow 0$ il risultato che si ottiene è,

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -Gv(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

Le equazioni differenziali parziali 1 e 2 descrivono l'andamento della tensione e della corrente lungo la linea di trasmissione.

Linea di trasmissione senza perdite

Nel modo delle alte frequenze e delle microonde è di particolare interesse la linea di trasmissione **senza perdite**, dove **R** e **G** sono trascurabili e in pratica si possono considerare $R = G = 0$

Una sezione di linea senza perdite è riportata in figura 2 c

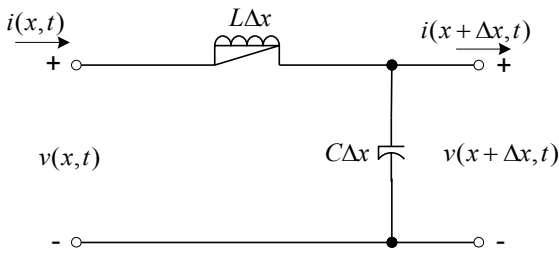


Figura 2 c

Per una linea di trasmissione senza perdite, con $R = G = 0$, le equazioni 1 e 2 diventano,

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (3)$$

e

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (4)$$

Linee di trasmissione e parametri S

La linea pilotata con un segnale sinusoidale

E' utile considerare le soluzioni delle equazioni 3 e 4 nel caso che la linea venga pilotata con un segnale sinusoidale. (Si useranno i fasori per ricavare le condizioni stazionarie di $v(x,t)$ e $i(x,t)$).

Per un pilotaggio sinusoidale (da esempio $v_s(t) = V_s \cos \omega t$) le tensioni e le correnti lungo la linea di trasmissione saranno anche delle funzioni sinusoidali; la loro dipendenza dal tempo e dalla posizione sulla linea può essere espressa in forma generale come segue,

$$v(x,t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi(x)) \quad (5)$$

e

$$i(x,t) = g(x) \cos(\omega t + \eta(x)) \quad (6)$$

dove ,

- $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni reali della posizione,
- $\varphi(x)$ e $\eta(x)$ tengono conto della dipendenza della fase dalla posizione.

Usando la formula di Eulero,

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

dove ,

- $\cos \theta$ è la parte reale di $e^{j\theta}$ ($\operatorname{Re}[e^{j\theta}] = \cos \theta$),
- $\sin \theta$ è la parte immaginaria di $e^{j\theta}$ ($\operatorname{Im}[e^{j\theta}] = \sin \theta$),

possiamo esprimere le equazioni 5 e 6 nella seguente forma,

$$v(x,t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$$

$$v(x,t) = f(x) \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \varphi(x))}] = \operatorname{Re}[f(x) e^{j\varphi(x)} e^{j\omega t}] \quad (7)$$

e

$$i(x,t) = g(x) \cos(\omega t + \eta(x))$$

$$i(x,t) = g(x) \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \eta(x))}] = \operatorname{Re}[g(x) e^{j\eta(x)} e^{j\omega t}] \quad (8)$$

Definendo come fasori, nella 7 e nella 8, le quantità

$$V(x) = f(x) e^{j\varphi(x)}$$

e

$$I(x) = g(x) e^{j\eta(x)}$$

è possibile riscrivere le equazioni 7 e 8 come segue

$$v(x,t) = \operatorname{Re}[V(x) e^{j\omega t}] \quad (9)$$

e

$$i(x,t) = \operatorname{Re}[I(x) e^{j\omega t}] \quad (10)$$

I fasori $V(x)$ e $I(x)$ sono delle funzioni complesse della posizione e esprimono la variazione della tensione e della corrente in funzione della posizione lungo la linea di trasmissione. *(Nota 1)*

Linee di trasmissione e parametri S

Sostituendo la 9 e la 10 nella 3
$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (3)$$

si ha
$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}[V(x)e^{j\omega t}] = -L \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}[I(x)e^{j\omega t}] \quad (11)$$

che si può riscrivere

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x} V(x)e^{j\omega t}\right] = -L \operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t} I(x)e^{j\omega t}\right] = -L \operatorname{Re}\left[I(x) \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t}\right] = -L \operatorname{Re}[I(x)j\omega e^{j\omega t}] \quad (12)$$

Siccome $V(x)$ dipende solamente dalla posizione si ha
$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{dV(x)}{dx}$$

e si può riscrivere la 12 in questo modo
$$\operatorname{Re}\left[\left(\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x)\right)e^{j\omega t}\right] = 0 \quad (13)$$

L'equazione 13 deve essere soddisfatta per qualsiasi valore del tempo t e quindi il termine in parentesi tonda deve essere uguale a zero, cioè

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x) &= 0 \\ \frac{dV(x)}{dx} &= -j\omega LI(x) \end{aligned} \quad (14)$$

Possiamo verificare quanto detto ponendo $\omega t = 0$ si ha $e^{j0} = 1$ e la 13 diventa

$$\operatorname{Re}\left[\left(\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x)\right)\right] = 0 \quad (15)$$

e per $\omega t = \frac{\pi}{2}$ si ha che $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ e la 13 diventa
$$\operatorname{Re}\left[\left(\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x)\right)j\right] = 0$$

che equivale a
$$\operatorname{Im}\left[\left(\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x)\right)\right] = 0 \quad (16)$$

Le equazioni 15 e 16 mostrano che sia la parte reale che la parte immaginaria della

$$\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x) = 0$$

devono essere uguale a zero.

Comparando l'equazione 3 e la corrispondente equazione 14 (fasori) si vede che la 14 è simile alla

3 con la sostituzione degli operatori, $\frac{\partial}{\partial x}$ con $j\omega$, e $v(x,t)$ e $i(x,t)$ con i fasori $V(x)$ e $I(x)$

rispettivamente.

L'uso dei fasori consente di passare dalle equazioni con derivate parziali (3) alle equazioni differenziali ordinarie (14).

Linee di trasmissione e parametri S

Similmente, sostituendo la 9 e la 10 nella 4 si ottiene l'equazione dei fasori per la corrente,

$$\frac{dI(x)}{dx} = -j\omega CV(x) \quad (17)$$

Le equazioni 14 e 17 sono equazioni differenziali soddisfatte dai fasori $V(x)$ e $I(x)$ lungo la linea di trasmissione. Queste equazioni possono essere risolte per $V(x)$ e $I(x)$ differenziando la 14 rispetto ad x ,

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -j\omega L \frac{dI(x)}{dx} \quad (18)$$

Sostituendo in essa (18) la 17 si ottiene $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -j\omega L(-j\omega CV(x)) = -\omega^2 LCV(x)$

che si può riscrivere $\frac{d^2V(x)}{dx^2} + \beta^2 V(x) = 0 \quad (19)$

dove $\beta^2 = \omega^2 LC \Rightarrow \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (20)$

Il parametro β si misura in radianti per metro ed è conosciuto come costante di propagazione.

La soluzione generale dell'equazione differenziale

La soluzione generale della equazione differenziale di secondo ordine 19 è

$$V(x) = Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x} \quad (21)$$

dove le costanti A e B sono, delle costanti generalmente complesse, che possono essere calcolate fissando le condizioni all'ingresso e all'uscita della linea di trasmissione.

La soluzione generale per la corrente $I(x)$ si ottiene dalla 14 e dalla 21

$$\frac{dV(x)}{dx} = -j\omega LI(x) \Rightarrow I(x) = \frac{1}{-j\omega L} \frac{dV(x)}{dx} \Rightarrow I(x) = \frac{1}{-j\omega L} \frac{d(Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x})}{dx}$$

cioè

$$I(x) = \frac{\beta}{\omega L} (Ae^{-j\beta x} - Be^{j\beta x}) \quad (22)$$

(Nota 2)

Linee di trasmissione e parametri S

Impedenza caratteristica

Si definisce come impedenza caratteristica di una linea di trasmissione il termine

$$Z_0 = \frac{\omega L}{\beta} = \frac{\omega L}{\omega \sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (23)$$

come si vede Z_0 è un numero reale .

Tenendo conto della 23 la 22 può anche essere espressa nella forma $I(x) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{-j\beta x} - Be^{j\beta x})$

$$\text{oppure } I(x) = \frac{A}{Z_0} e^{-j\beta x} - \frac{B}{Z_0} e^{j\beta x} \quad (24)$$

Le relazioni che esprimono l'andamento della tensione e della corrente nel dominio del tempo sono le equazioni la 9 e la 10 rispettivamente.

$$v(x, t) = \text{Re}[V(x)e^{j\omega t}] \quad (9)$$

e

$$i(x, t) = \text{Re}[I(x)e^{j\omega t}] \quad (10)$$

che usando la 21 e la 24 diventano

$$v(x, t) = \text{Re}[Ae^{-j(\beta x - \omega t)} + Be^{j(\beta x + \omega t)}] \quad (25)$$

$$i(x, t) = \text{Re}\left[\frac{A}{Z_0} e^{-j(\beta x - \omega t)} - \frac{B}{Z_0} e^{j(\beta x + \omega t)}\right] \quad (26)$$

Funzioni d'onda

Nel caso in cui A e B siano reali sia la 25 che la 26 si possono esprimere nella forma *(Nota 3)*

$$v(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x) + B \cos(\omega t + \beta x) \quad (27)$$

$$i(x, t) = \frac{A}{Z_0} \cos(\omega t - \beta x) - \frac{B}{Z_0} \cos(\omega t + \beta x) \quad (28)$$

Le funzioni $A \cos(\omega t - \beta x)$ e $B \cos(\omega t + \beta x)$ vengono chiamate **funzioni d'onda** . Vediamo di esaminare le caratteristiche di queste funzioni .

Andamento in funzione del tempo

Fissato $v_1(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x)$ la funzione $v_1(x, t)$ si può analizzare fissando da prima la posizione x e poi osservare il suo andamento come funzione del tempo.

Fissato $x = 0$ e disegnando l'andamento di $v_1(0, t) = A \cos \omega t$ (vedi figura 3 a) si ottiene una funzione che varia in modo sinusoidale all'aumentare del tempo.

Linee di trasmissione e parametri S

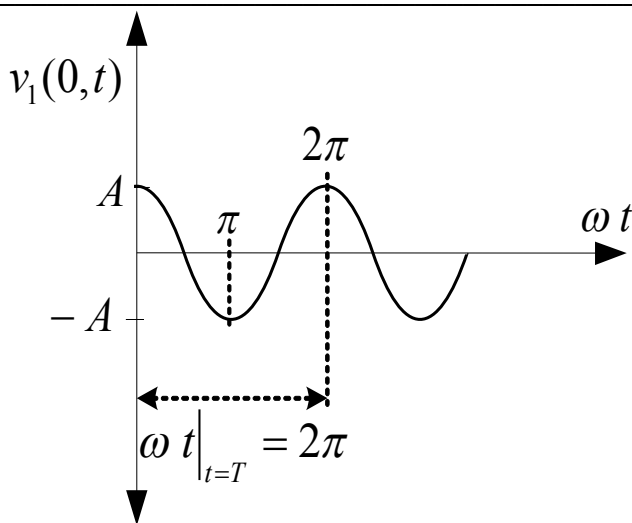


Figura 3 a

L'intervallo di tempo fra due valori consecutivi di eguale ampiezza è definito come **periodo T**. Il

periodo T è dato dalla $\omega t|_{t=T} = 2\pi$ o $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

Andamento in funzione della posizione

Vediamo l'andamento di $v_1(x, t)$ in funzione della posizione, cioè fissiamo $t = 0$ e si disegna l'andamento della relazione $v_1(x, 0) = A \cos \beta x$ (vedere la figura 3 b), anche in questo caso l'andamento sarà sinusoidale.

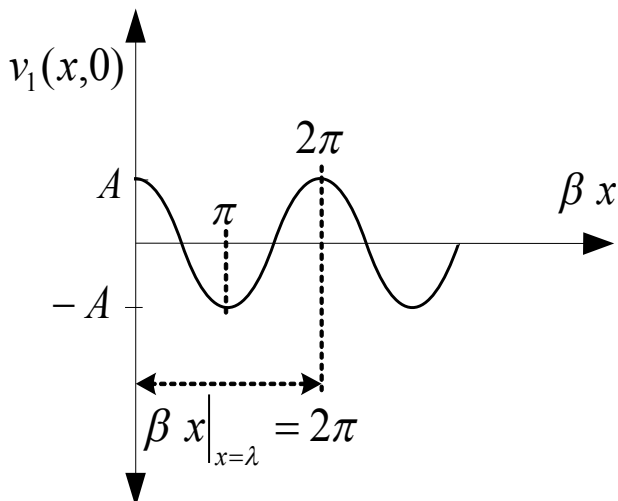


Figura 3 b

La distanza fra due valori consecutivi di uguale ampiezza viene definita come **lunghezza d'onda**,

$$\beta x|_{x=\lambda} = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (29)$$

Linee di trasmissione e parametri S

Velocità di fase

Osservando due valori di $v_1(x, t)$ misurati in due istanti diversi è possibile calcolare la velocità di propagazione dell'onda. Per esempio negli istanti t_1 e t_2 (dove $t_2 > t_1$) si ha

$$v_1(x, t_1) = A \cos(\beta x - \omega t_1)$$

$$v_1(x, t_2) = A \cos(\beta x - \omega t_2)$$

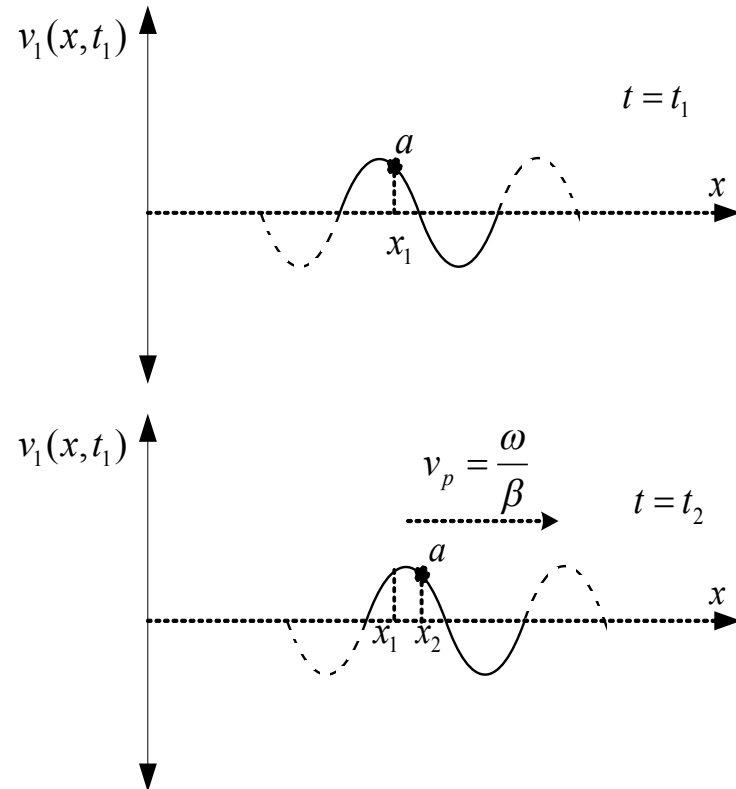


Figura 3c

In figura 3 c sono tracciati gli andamenti di $v_1(x, t_1)$ e $v_1(x, t_2)$; il punto a è un punto con fase costante a $t = t_1$ e a $t = t_2$.

Poiché al punto a la fase di $v_1(x, t_1)$ è uguale alla fase di $v_1(x, t_2)$, possiamo scrivere

$$v_1(x, t_1) = v_1(x, t_2)$$

$$\cos(\beta x_1 - \omega t_1) = \cos(\beta x_2 - \omega t_2)$$

quindi

$$\beta x_1 - \omega t_1 = \beta x_2 - \omega t_2$$

oppure

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta} \quad (30)$$

La quantità $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ che ha le dimensioni di una velocità è la velocità con cui si propaga il punto a

e viene chiamata velocità di fase v_p .

Linee di trasmissione e parametri S

$$v_p = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (31)$$

Sostituendo la 20 nella 29 e usando la 31 si ha

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{v_p}{f} = v_p T$$

la quale esprime il concetto che la lunghezza d'onda è la distanza percorsa dall'onda in un intervallo di tempo della durata del periodo.

Onda incidente, onda riflessa, lunghezza elettrica

Dalla equazione 30

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta} \quad (30)$$

si vede che, essendo $t_2 > t_1$ e $\frac{\omega}{\beta}$ positivo ne consegue che la quantità $x_2 - x_1$ è positiva, cioè

$x_2 > x_1$. Questo dimostra che il punto di fase costante si sposta verso destra nella figura 3 c, in una linea di trasmissione si sposterà verso il carico.

In altre parole l'espressione $A \cos(\omega t - \beta x)$ rappresenta un'onda che si muove in direzione del carico con velocità v_p . Questa onda viene chiamata onda uscente se è vista dal punto di vista del generatore oppure **onda incidente** se è vista dal punto di vista del carico.

L'analisi della $B \cos(\omega t + \beta x)$ dimostrerà che anche questa funzione rappresenta un'onda in movimento, ma che si sposta verso sinistra con velocità v_p , nella linea di trasmissione lo spostamento dell'onda sarà nella direzione del generatore. Questa onda viene chiamata onda incidente se viene vista dal punto di vista del generatore oppure **onda riflessa** quando viene osservata dal punto di vista del carico.

Poiché all'onda $A \cos(\omega t - \beta x)$ viene associato il fasore $A e^{-j\beta x}$ e all'onda $B \cos(\omega t + \beta x)$ viene associato il fasore $B e^{j\beta x}$ si può anche dire che,

- $A e^{-j\beta x}$ è l'onda incidente (in forma di fasore),
- $B e^{j\beta x}$ è l'onda riflessa (in forma di fasore).

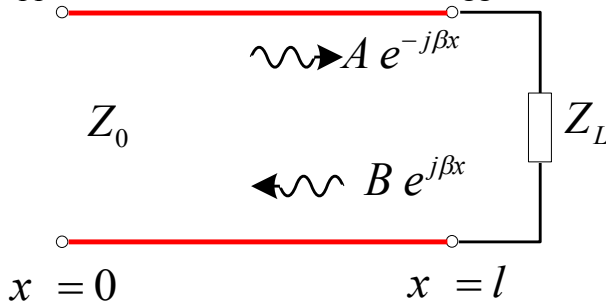
La quantità βx viene chiamata **lunghezza elettrica** della linea.

In generale, in una linea di trasmissione, la tensione e la corrente sono composte da onde incidenti e da onde riflesse.

Linee di trasmissione e parametri S

Lunghezza e distanza

La figura 4 a mostra una linea di trasmissione con impedenza caratteristica Z_0 , di lunghezza l che è chiusa su di una impedenza di carico Z_L . Il generatore è posizionato alla distanza $x = 0$ ed il carico alla fine della linea a $x = l$. Le onde incidenti e riflesse sono rappresentate con delle frecce ondegianti.



$$V(x) = A e^{-j\beta x} + B e^{j\beta x}$$

$$I(x) = \frac{A}{Z_0} e^{-j\beta x} - \frac{B}{Z_0} e^{j\beta x}$$

Figura 4 a

Nello studio delle linee di trasmissione si preferisce rappresentare il carico alla distanza **zero** e il generatore alla distanza l dal carico. Si fissa $x = l - d$ nella 21 e nella 24 (ripetute in figura 4 a) e si riscrivono nella forma

$$V(d) = A_1 e^{j\beta d} + B_1 e^{-j\beta d} \quad (32)$$

e

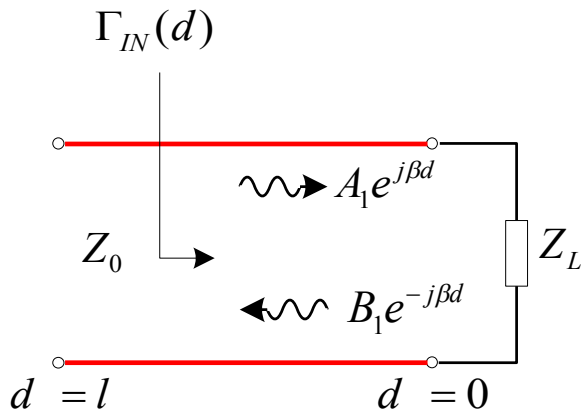
$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0} e^{j\beta d} - \frac{B_1}{Z_0} e^{-j\beta d} \quad (33)$$

dove $A_1 = A e^{-j\beta l}$ e $B_1 = B e^{j\beta l}$.

La modifica per cui $x = l - d$ (tale che $d = l - x$) viene applicata su alcuni problemi delle linee di trasmissione in modo da misurare valori positivi della distanza quando il punto di osservazione si sposta dal carico (a $d = 0$) verso il generatore (a $d = l$).

I fasori $A_1 e^{j\beta d}$ e $B_1 e^{-j\beta d}$ sono funzione della variabile d e rappresentano rispettivamente l'onda **incidente sul carico** e l'onda **riflessa dal carico** (Figura 4 b).

Linee di trasmissione e parametri S



$$V(d) = A_1 e^{j\beta d} + B_1 e^{-j\beta d}$$

$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0} e^{j\beta d} - \frac{B_1}{Z_0} e^{-j\beta d}$$

$$A_1 = A e^{-j\beta l} \quad B_1 = B e^{j\beta l}$$

Figura 4 b

Coefficiente di riflessione e l'impedenza di ingresso

In una linea di trasmissione si definisce come **coefficiente di riflessione** il rapporto fra l'onda riflessa e l'onda incidente. Nella figura 4 b viene rappresentato il coefficiente di riflessione, $\Gamma_{IN}(d)$, in una qualsiasi posizione d ,

$$\Gamma_{IN}(d) = \frac{B_1 e^{-j\beta d}}{A_1 e^{j\beta d}} = \frac{B_1}{A_1} e^{-2j\beta d} \quad (34)$$

Il coefficiente di riflessione al carico, Γ_0 , è il valore di $\Gamma_{IN}(d)$ quando $d = 0$, esso è

$$\Gamma_0 = \Gamma_{IN}(0) = \frac{B_1}{A_1}$$

Ne consegue che la 34 si può riscrivere come segue

$$\Gamma_{IN}(d) = \Gamma_0 e^{-2j\beta d} \quad (35)$$

Anche la 32 e la 33 si possono esprimere nella stessa forma (usando la 34)

$$V(d) = A_1 (e^{j\beta d} + \Gamma_0 e^{-j\beta d}) = A_1 e^{j\beta d} (1 + \Gamma_0 e^{-j2\beta d}) \quad (36)$$

e

$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0} (e^{j\beta d} - \Gamma_0 e^{-j\beta d}) = \frac{A_1}{Z_0} e^{j\beta d} (1 - \Gamma_0 e^{-j2\beta d}) \quad (37)$$

Linee di trasmissione e parametri S

Il valore della costante complessa A_1 si può ricavare usando un valore conosciuto di $V(d)$ (ad esempio alla condizioni al contorno, di solito il valore di $V(d)$ alla fine della linea dal lato del generatore ($d = l$). E' ovvio che il valore di $V(d)$ alla distanza $d = l$ dipenderà dalla ampiezza, dalla fase e dall'impedenza della sorgente connessa alla linea al punto $d = l$.

Il modulo del coefficiente di riflessione, $|\Gamma_0|$, può assumere valori compresi fra 0 e 1. Sarà:

- $|\Gamma_0| = 0$ quando non c'è presenza di onda riflessa ($B_1 = 0$ nella 34)
- $|\Gamma_0| = 1$ quando si ha la totale riflessione ($B_1 = A_1$ nella 34)

Mentre, tenendo conto della fase, il valore di $\Gamma_{IN}(d) = \Gamma_0 e^{-2j\beta d}$ (35) potrà variare fra +1 e -1.

Il valore di Γ_0 si può ricavare conoscendo le impedenze Z_0 e Z_L , vediamo come.

L'impedenza di ingresso di una linea di trasmissione in una qualsiasi posizione (Figura 5) viene definita dal rapporto fra tensione e corrente ad una data distanza d , cioè dal rapporto fra la 36 e la 37 che sarà

$$Z_{IN}(d) = \frac{V(d)}{I(d)} = Z_0 \frac{e^{j\beta d} + \Gamma_0 e^{-j\beta d}}{e^{j\beta d} - \Gamma_0 e^{-j\beta d}} \quad (38)$$

Nella 38 il valore di Γ_0 si può ricavare fissando le condizioni al contorno dalla parte del carico, cioè a $d = 0$ nella condizione in cui l'impedenza di ingresso a $d = 0$ è uguale a Z_L . Così si ha $Z_{IN}(0) = Z_L$

quindi dalla 38 si ha

$$Z_{IN}(0) = Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0} \quad Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0}$$

da cui

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (39)$$

Linee di trasmissione e parametri S

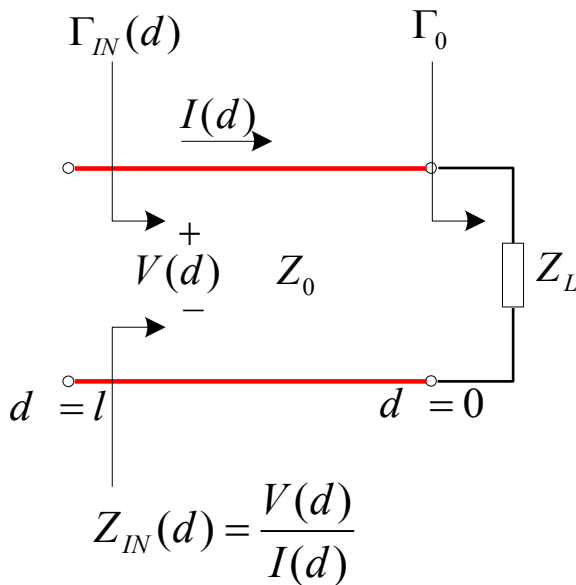


Figura 5

L'equazione 39 mette in evidenza che il valore del coefficiente di riflessione Γ_0 è $\Gamma_0 = 0$ quando $Z_L = Z_0$, questo significa che con $Z_L = Z_0$ non si ha la riflessione dal carico. Una linea nelle condizioni $Z_L = Z_0$ viene definita come una linea **termina correttamente** oppure una **linea adattata**.

Sostituendo la 39 nella 38 si ha

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{e^{j\beta d} + \Gamma_0 e^{-j\beta d}}{e^{j\beta d} - \Gamma_0 e^{-j\beta d}} = Z_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{j\beta d} + (Z_L - Z_0)e^{-j\beta d}}{(Z_L + Z_0)e^{j\beta d} - (Z_L - Z_0)e^{-j\beta d}}$$

applicando le formule di Eulero (Nota 4)

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta d + jZ_0 \sin \beta d}{Z_0 \cos \beta d + jZ_L \sin \beta d}$$

dividendo sopra e sotto per il termine coseno, $\cos \beta d$, si ottiene

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} \quad (40)$$

questa equazione ci dà il valore della impedenza di ingresso in una qualsiasi posizione d lungo la linea di trasmissione. Nella 40 si può notare che alla distanza $d = 0$ si ha $Z_{IN}(0) = Z_L$.

L'impedenza di ingresso della linea si calcolerà ponendo $d = l$.

Osservando la 40 si evince che questa equazione ci permette di predire come il valore dell'impedenza di carico Z_L si trasforma lungo una linea di trasmissione avente una impedenza caratteristica Z_0 e lunghezza d .

Linee di trasmissione e parametri S

Si tiene conto della frequenza di lavoro attraverso il coefficiente di propagazione β .

A seconda delle applicazioni si esprime β come :

- termine di frequenza e fase $\beta = \frac{2\pi f}{v_p}$,
- termine di lunghezza d'onda $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

Questa proprietà della linea di trasmissione di trasformare l'impedenza di carico Z_L in un altro valore di impedenza all'ingresso della linea stessa (dipendente dalla sua lunghezza) è usata nel mondo RF e delle microonde per gli adattamenti di impedenza.

SWR

Lungo la linea viaggiano le onde incidenti e riflesse di tensione e le onde incidenti e riflesse di corrente. Le onde incidenti e le onde riflesse possono non essere in fase. La combinazione delle onde incidenti con le onde riflesse dà luogo ad una condizione di onde stazionarie che sono una funzione sinusoidale del tempo e la cui ampiezza è funzione della posizione.

Questa condizione viene quantificata definendo il rapporto fra massimo e minimo di tensione oppure fra massimo e minimo di corrente.

$$SWR = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{|I_{\max}|}{|I_{\min}|}$$

Solitamente si usa il rapporto fra il minimo ed il massimo delle tensioni, che viene definito come Rapporto Onde Stazionarie di tensione (in inglese: **Voltage Standing Wave Ratio = VSWR**).

$$VSWR = \frac{|V(d)|_{\max}}{|V(d)|_{\min}}$$

Dalla 36 si vede che l'ampiezza della tensione lungo la linea è data dalla

$$|V(d)| = |A_1| \left| 1 + \Gamma_0 e^{-2j\beta d} \right| \quad (41)$$

Tenendo conto che il valore di $\Gamma_{IN}(d) = \Gamma_0 e^{-2j\beta d}$ è compreso fra il valore massimo di +1 e il valore minimo di -1 si potrà stabilire che i valori massimi e minimi che $|V(d)|$ assume lungo la linea sono

$$|V(d)|_{\max} = |A_1| (1 + |\Gamma_0|) \quad (42)$$

$$|V(d)|_{\min} = |A_1| (1 - |\Gamma_0|) \quad (43)$$

Questi valori vengono usati per definire il rapporto onde stazionarie di tensione (VSWR)

Linee di trasmissione e parametri S

$$VSWR = \frac{|V(d)|_{\max}}{|V(d)|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} \quad (44)$$

Si analizzeranno alcuni casi importanti delle linee di trasmissione:

- la linea adattata o terminata correttamente,
- la linea in corto circuito,
- la linea aperta,
- la linea in quarto d'onda.

La linea adattata o terminata correttamente

Una linea si definisce adattata quando è chiusa su di un carico, Z_L , avente la stessa impedenza della sua impedenza caratteristica, Z_0 , cioè $Z_0 = Z_L$, una condizione di questo tipo è raffigurata nella figura 6 a.

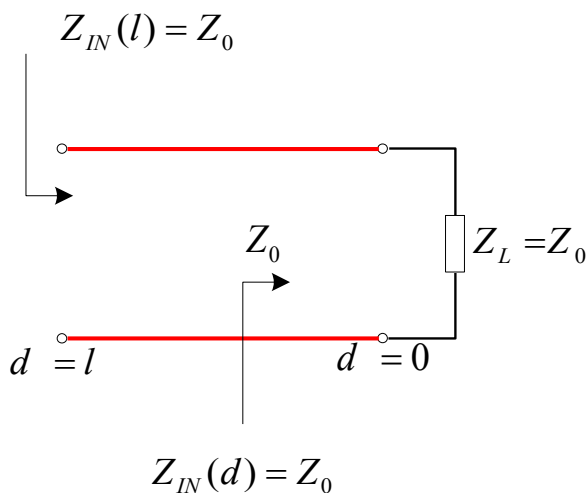


Figura 6 a

IL coefficiente di riflessione in condizioni di linea adattata sarà ricavato dalla 39

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (39)$$

dalla quale si evince che essendo $Z_0 = Z_L$ si avrà $\Gamma_0 = 0$, cioè non ci sarà riflessione.

L'impedenza di ingresso in condizioni di linea adattata si ricaverà dalla 40 ponendo $Z_0 = Z_L$

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} \quad (40)$$

risulterà che $Z_{IN}(d) = Z_L = Z_0$ cioè l'impedenza di ingresso della linea misurata in una qualsiasi posizione d sarà uguale all'impedenza caratteristica della linea e sarà reale.

Il rapporto onde stazionarie in condizioni linea adatta si ricava dalla 44

Linee di trasmissione e parametri S

$$VSWR = \frac{|V(d)|_{\max}}{|V(d)|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} \quad (44)$$

non c'è riflessione, quindi $\Gamma_0 = 0$, la tensione sulla linea è costante, non esiste un valore massimo ed un valore minimo di conseguenza il rapporto onde stazionarie diventa $VSWR = 1$, è il minimo valore che questo parametro può assumere.

La linea in corto circuito

Una linea è chiusa in corto circuito quando viene terminata con un carico che costituito da un corto circuito, $Z_L = 0$, un esempio di questa particolare configurazione è riportato nella figura 6 b.

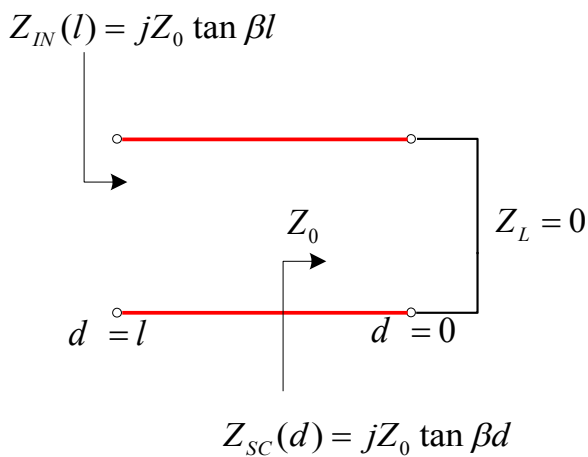


Figura 6 b

IL coefficiente di riflessione in condizioni di linea in corto circuito si potrà ricavare dalla 39 ponendo $Z_L = 0$,

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (39)$$

si avrà che $\Gamma_0 = -1$, si avrà una riflessione totale dal carico, l'onda incidente avrà al stessa ampiezza dell'onda riflessa.

L'impedenza di ingresso in condizioni di linea in corto circuito si ricaverà dalla 40 ponendo $Z_L = 0$

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} \quad (40)$$

risulterà che l'impedenza di ingresso della linea misurata in una qualsiasi distanza d dal carico sarà data dalla

$$Z_{SC}(d) = jZ_0 \tan \beta d \quad (45)$$

Il rapporto onde stazionarie in condizioni linea

Dalla 44 si ricava il rapporto onde stazionarie di tensione ponendo il coefficiente di riflessione al carico $|\Gamma_0| = 1$

Linee di trasmissione e parametri S

$$VSWR = \frac{|V(d)|_{\max}}{|V(d)|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} \quad (44)$$

di conseguenza il rapporto onde stazionarie diventa $VSWR = \infty$, è il massimo valore che questo rapporto può assumere.

Usando la 36 per la tensione e la 37 per la corrente

$$V(d) = A_1(e^{j\beta d} + \Gamma_0 e^{-j\beta d}) \quad (36)$$

$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0}(e^{j\beta d} - \Gamma_0 e^{-j\beta d}) \quad (37)$$

si potrà calcolare le ampiezze della tensione e della corrente, ponendo $\Gamma_0 = -1$ e usando le formule di Eulero si avrà

$$V(d) = A_1(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}) = j2A_1 \sin \beta d$$

$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0}(e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}) = \frac{2A_1}{Z_0} \cos \beta d$$

La tensione sulla linea varia con andamento sinusoidale da un valore massimo a zero.

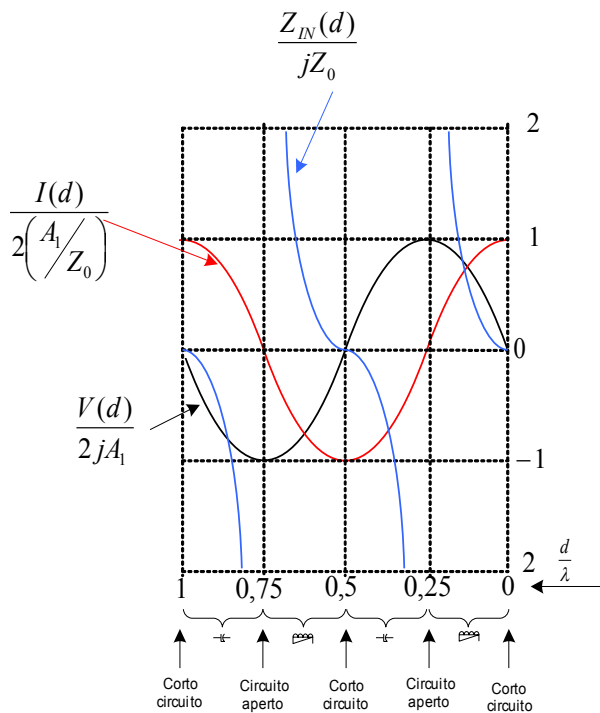


Figura 6 b 1

Linee di trasmissione e parametri S

La linea aperta

Una linea viene definita aperta quando viene terminata con un carico di impedenza infinita, $Z_L = \infty$. Questa configurazione è riportata nella figura 6 c.

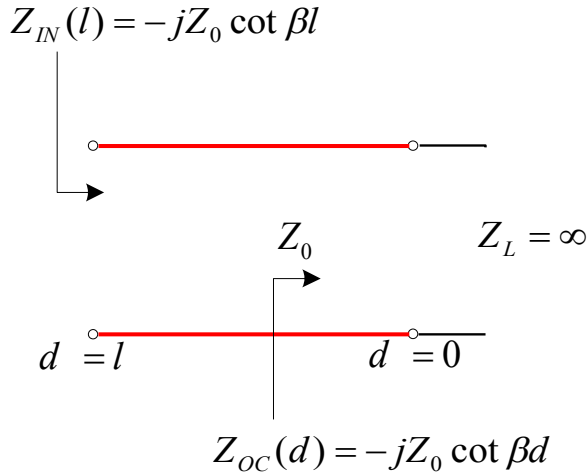


Figura 6 c

IL coefficiente di riflessione in condizioni di linea aperta si potrà ricavare dalla 39 ponendo $Z_L = \infty$

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_L \left(1 - \frac{Z_0}{Z_L}\right)}{Z_L \left(1 + \frac{Z_0}{Z_L}\right)} \quad (39)$$

si avrà che $\Gamma_0 = 1$, come per la linea in corto circuito si avrà una riflessione totale dal carico, l'onda incidente avrà al stessa ampiezza dell'onda riflessa.

L'impedenza di ingresso in condizioni di linea aperta si ricaverà dalla 40

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} \quad (40)$$

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L \left(1 + j \frac{Z_0}{Z_L} \tan \beta d\right)}{Z_L \left(\frac{Z_0}{Z_L} + j \tan \beta d\right)}$$

ponendo $Z_L = \infty$

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{1}{j \tan \beta d} = -jZ_0 \cot \beta d$$

risulterà che l'impedenza di ingresso della linea aperta misurata in una qualsiasi distanza d dalla terminazione del carico sarà data dalla

Linee di trasmissione e parametri S

$$Z_{sc}(d) = -jZ_0 \cot \beta d$$

Dalla 44 si ricava il rapporto onde stazionarie di tensione ponendo il coefficiente di riflessione al carico $|\Gamma_0| = 1$

$$VSWR = \frac{|V(d)|_{\max}}{|V(d)|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma_0|}{1-|\Gamma_0|} \quad (44)$$

di conseguenza il rapporto onde stazionarie diventa $VSWR = \infty$, anche in questo caso è il massimo valore che questo rapporto può assumere.

Usando la 36 per la tensione e la 37 per la corrente

$$V(d) = A_1(e^{j\beta d} + \Gamma_0 e^{-j\beta d}) \quad (36)$$

$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0}(e^{j\beta d} - \Gamma_0 e^{-j\beta d}) \quad (37)$$

si potrà calcolare le ampiezze della tensione e della corrente, ponendo $\Gamma_0 = 1$ e usando le formule di Eulero si avrà

$$V(d) = A_1(e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}) = 2A_1 \cos \beta d$$

$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0}(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}) = \frac{2jA_1}{Z_0} \sin \beta d$$

La tensione e la corrente sulla linea variano con andamento sinusoidale da un valore massimo ad un valore minimo che è zero.

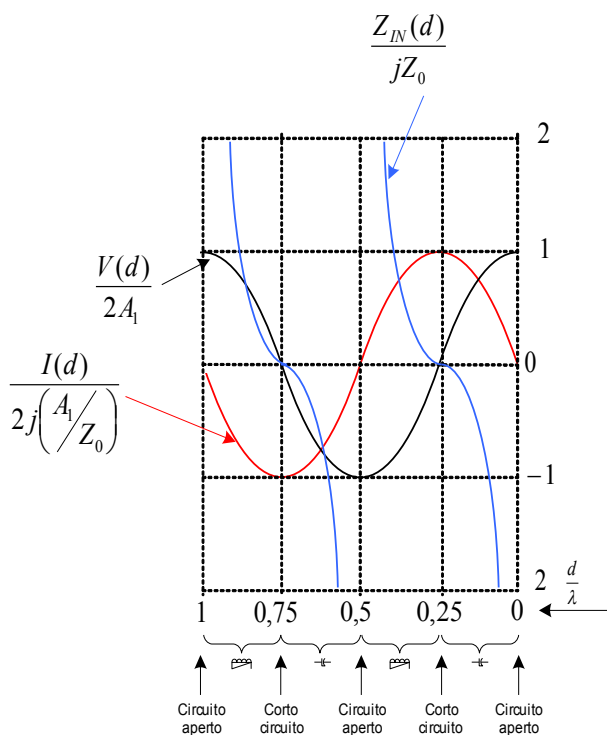


Figura 6 c1

Linee di trasmissione e parametri S

La linea di lunghezza $d = \lambda/2$ **e** $d = \lambda/4$

Si è visto che se una linea di trasmissione viene correttamente terminata, cioè se $Z_L = Z_0$, si avrà che l'impedenza di ingresso della linea sarà $Z_{IN}(d) = Z_0$ indipendentemente dalla lunghezza della linea stessa.

Si verifica un caso particolare in cui l'impedenza di ingresso della linea di trasmissione è uguale alla impedenza di carico $Z_{IN}(d) = Z_L$ per un qualsiasi valore di impedenza caratteristica Z_0 , ma per un particolare valore della lunghezza $d = \lambda/2$ (o più in generale per $d = \lambda/2 + m(\lambda/2)$ dove $m = 1, 2, 3, 4, \dots$).

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} \quad (40) \text{ essendo } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}\right)}{Z_0 + jZ_L \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}\right)} = Z_L \quad (\tan \pi = 0)$$

Un altro caso importante è la linea di lunghezza lambda quarti, conosciuta anche come trasformatore quarto d'onda. Figura 6 d.

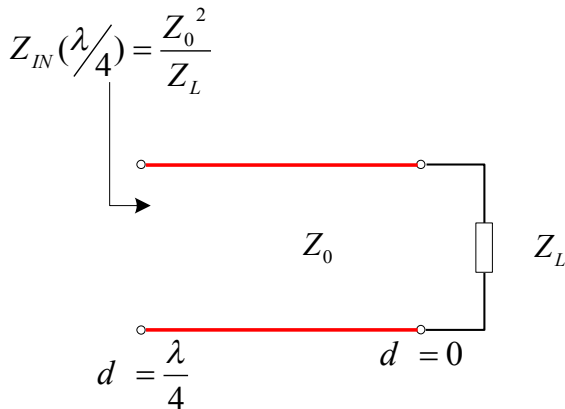


Figura 6 d

Con una distanza dal carico $d = \lambda/4$ la

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} \quad (40)$$

diventa

$$Z_{IN}(\lambda/4) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}\right)}{Z_0 + jZ_L \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}\right)} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{Z_0 + jZ_L \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

Linee di trasmissione e parametri S

$$Z_{IN}(\lambda/4) = Z_0 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{Z_L}{\tan\pi/2} + jZ_0 \right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{Z_0}{\tan\pi/2} + jZ_L \right)} \quad \text{dove} \quad \tan\frac{\pi}{2} = \infty$$

$$Z_{IN}(\lambda/4) = Z_0 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{Z_L}{\infty} + jZ_0 \right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{Z_0}{\infty} + jZ_L \right)} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

$$Z_{IN}(\lambda/4) = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (46)$$

L'equazione 46 mette in evidenza che è possibile trasformare una impedenza reale Z_L in un'altra impedenza reale, $Z_{IN}(\lambda/4)$, di qualsiasi valore tramite una linea di lunghezza $\lambda/4$ avente una impedenza caratteristica

$$Z_0 = \sqrt{Z_{IN}(\lambda/4) \cdot Z_L}$$

cioè una impedenza che sia la media geometrica fra l'impedenza di ingresso, Z_{IN} , e quella di carico Z_L .

Ancora sull'andamento della tensione sulla linea chiusa in corto circuito

Si calcola l'andamento della tensione in una linea in corto circuito come quella rappresentata in figura 6 b. Essendo $\Gamma_0 = -1$ dalla 36

$$V(d) = A_1(e^{j\beta d} + \Gamma_0 e^{-j\beta d}) \quad (36)$$

si ha (Eulero)

$$V(d) = A_1(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}) = j2A_1 \sin\beta d$$

Quindi

$$v(d, t) = \text{Re}[V(d) e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[2A_1 \sin\beta d e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}\right]$$

Per semplicità si considera che A_1 sia reale e si ha

$$v(d, t) = 2A_1 \sin\beta d \cos\beta(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (47)$$

La figura 7 a rappresenta la 47 in forma grafica, mentre $|V(d)|$ è rappresentato nella figura 7 b.

Linee di trasmissione e parametri S

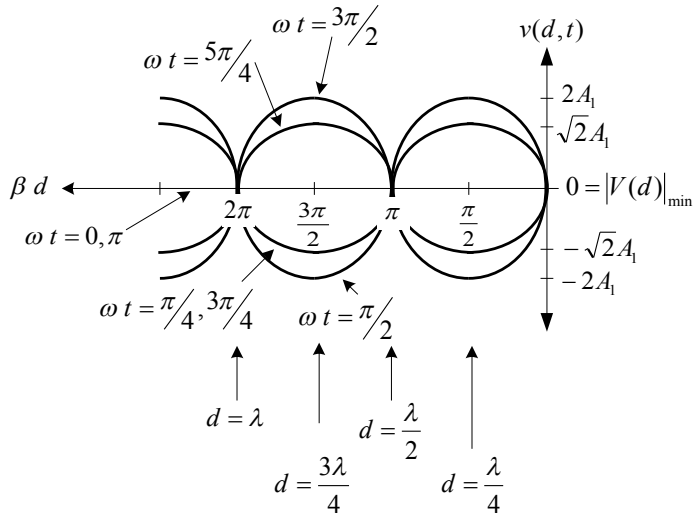


Figura 7 a

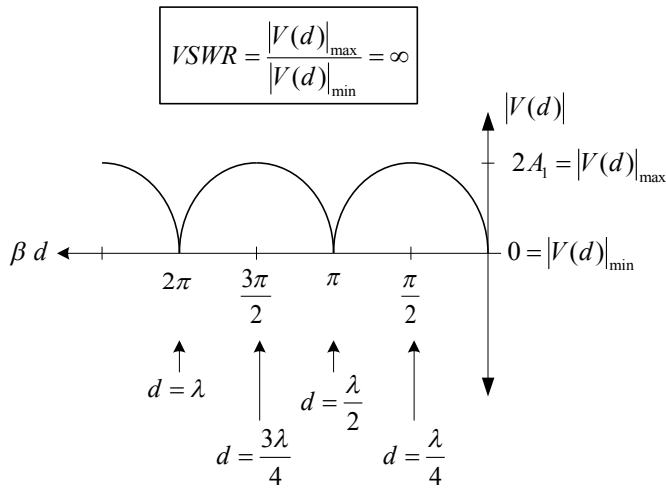


Figura 7 b

La linea di trasmissione con perdite

Per una linea di trasmissione con perdite come quella rappresentata in figura 2 b , le relative equazioni di Kirchoff sono la 1 e la 2

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -Ri(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -Gv(x,t) - C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (2)$$

In forma di fasori diventano

$$\frac{dV(x)}{dx} = -(R + j\omega L)I(x) \quad (48)$$

e

$$\frac{dI(x)}{dx} = -(G + j\omega C)V(x) \quad (49)$$

Linee di trasmissione e parametri S

Risolvendo la 48 e la 49 si ottiene

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \quad (50)$$

dove il termine γ viene definito come costante di propagazione

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (51)$$

dove

- α è la costante di attenuazione, misurata in *neper per metro*,
- β è la costante di propagazione, misurata in *radianti per metro*,

La soluzione della 50 è

$$V(x) = A_1 e^{-\gamma x} + B_1 e^{\gamma x} \quad (52)$$

e dalla 48 si ricava che $I(x)$ può essere espresso nella forma

$$I(x) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{B_1}{Z_0} e^{\gamma x} \quad (53)$$

dove

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Z_0 viene definita come l'impedenza caratteristica complessa della linea di trasmissione.

Le equazioni 52 e 53 rappresentano l'andamento della tensione e della corrente lungo la linea di trasmissione come un paio di onde viaggianti in direzioni opposte con velocità di fase

$$V_p = \frac{\omega}{\beta}$$

e con ampiezza decrescente secondo

$$e^{-\alpha x} \text{ oppure } e^{\alpha x}.$$

L'onda $e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$ viene chiamata **onda incidente**,

L'onda $e^{\gamma x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x}$ viene chiamata **onda riflessa**.

Le espressioni della tensione $v(x, t)$ e della corrente $i(x, t)$ nel dominio del tempo sono

$$v(x, t) = \text{Re}[V(x)e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[Ae^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \omega t)} + Be^{j\alpha x} e^{j(\beta x + \omega t)}\right] \quad (54)$$

e

$$i(x, t) = \text{Re}[I(x)e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[\frac{A}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \omega t)} - \frac{B}{Z_0} e^{j\alpha x} e^{j(\beta x + \omega t)}\right] \quad (55)$$

Per valori reali di A e B e esprimendo Z_0 come $Z_0 = |Z_0| \angle \theta$ si possono riscrivere la 54 e la 55 nelle forma seguente

Linee di trasmissione e parametri S

$$v(x,t) = Ae^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) + Be^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x)$$

e

$$i(x,t) = \frac{A}{|Z_0|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \theta) - \frac{B}{|Z_0|} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x - \theta)$$

Con $x = l - d$ la 52 e la 53 diventano

$$V(d) = A_1 e^{\gamma d} + B_1 e^{-\gamma d}$$

e

$$I(d) = \frac{A_1}{Z_0} e^{\gamma d} - \frac{B_1}{Z_0} e^{-\gamma d}$$

dove $A_1 = Ae^{-\gamma l}$ e $B_1 = Be^{\gamma l}$.

Ne consegue che il coefficiente di riflessione sarà dato dalla

$$\Gamma_{IN}(d) = \frac{B_1 e^{-\gamma l}}{A_1 e^{\gamma d}} = \Gamma_0 e^{-2\gamma d}$$

dove

$$\Gamma_0 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

e l'impedenza di ingresso sarà

$$Z_{IN}(d) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tan \gamma d}{Z_0 + Z_L \tan \gamma d}.$$

Linee di trasmissione e parametri S

Nota 1

Per fasore si intende un vettore che può essere rappresentato sul piano di Gauss.

Nota2

Dalla 22.....

$$y = x^n \text{ la derivata è } y' = nx$$

$$y = e^x \text{ la derivata è } y' = e^x$$

Nota 3

$$v(x, t) = \operatorname{Re} [Ae^{-j(\beta x - \omega t)} + Be^{j(\beta x + \omega t)}] \quad (25)$$

applicando la formula di Eulero

$$e^{-j(\beta x - \omega t)} = e^{j(\omega t - \beta x)} = \cos(\omega t - \beta x) + j\sin(\omega t - \beta x)$$

$$Ae^{-j(\beta x - \omega t)} = Ae^{j(\omega t - \beta x)} = A \cos(\omega t - \beta x) + jA \sin(\omega t - \beta x)$$

prendendo solamente la parte reale (si elimina la parte immaginaria)

$$Ae^{-j(\beta x - \omega t)} = A \cos(\omega t - \beta x)$$

Lo stesso procedimento si applica al secondo termine

$$Be^{j(\beta x + \omega t)} = B \cos(\omega t + \beta x) + jB \sin(\omega t + \beta x)$$

si ha

$$Be^{j(\beta x + \omega t)} = B \cos(\omega t + \beta x)$$

e si ottiene la 27.

Nota 4

Formule di Eulero

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j\sin \varphi$$

$$e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j\sin \varphi$$

$$e^{x+jy} = e^x (\cos y + j\sin y)$$

\$\$

Linee di trasmissione e parametri S

Appunti sui Parametri S

Notazioni e definizioni

Introducendo la notazione

$$V^+(x) = A e^{-j\beta x}$$

$$V^-(x) = B e^{j\beta x}$$

si possono riscrivere le equazioni studiate nelle linee

$$V(x) = A e^{-j\beta x} + B e^{j\beta x} \quad \text{e} \quad I(x) = \frac{A}{Z_0} e^{-j\beta x} - \frac{B}{Z_0} e^{j\beta x}$$

nella forma

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x) \quad (1)$$

$$I(x) = I^+(x) - I^-(x) = \frac{V^+}{Z_0}(x) - \frac{V^-}{Z_0}(x) \quad (2)$$

Anche il coefficiente di riflessione, definito da rapporto fra onda riflessa e onda incidente, definito dalla forma

$$\Gamma(x) = \frac{B e^{-j\beta x}}{A e^{j\beta x}}$$

può essere riscritto nella forma

$$\Gamma(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} \quad (3)$$

Le notazioni normalizzate

Se si introducono le seguenti notazioni normalizzate

$$v(x) = \frac{V(x)}{\sqrt{Z_0}} \quad (\text{onda normalizzata di tensione})$$

$$i(x) = I(x) \sqrt{Z_0} \quad (\text{onda normalizzata di corrente})$$

$$a(x) = \frac{V^+(x)}{\sqrt{Z_0}} \quad (\text{intensità d'onda incidente normalizzata})$$

$$b(x) = \frac{V^-(x)}{\sqrt{Z_0}} \quad (\text{intensità d'onda riflessa normalizzata})$$

la 1, la 2 e la 3 si possono riscrivere nella forma che segue

$$v(x) = a(x) + b(x) \quad (4)$$

$$i(x) = a(x) - b(x) \quad (5)$$

e

$$b(x) = \Gamma(x) \bullet a(x) \quad (6)$$

Linee di trasmissione e parametri S

Dalle 4 e 5 si ricavano l'intensità d'onda incidente normalizzata $a(x)$ e l'intensità d'onda riflessa normalizzata $b(x)$, in funzione di $V(x)$ e $I(x)$,

$$v(x) = a(x) + b(x) \quad (4) \quad i(x) = a(x) - b(x) \quad (5)$$

$$a(x) = v(x) - b(x) \quad b(x) = a(x) - i(x)$$

$$a(x) = v(x) - a(x) + i(x) \quad 2a(x) = v(x) + i(x) \quad a(x) = \frac{1}{2}[v(x) + i(x)]$$

inserendo i valori normalizzati

$$a(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{V(x)}{\sqrt{Z_0}} + I(x)\sqrt{Z_0} \right]$$

$$a(x) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} [V(x) + I(x)Z_0] \quad (7)$$

applicando lo stesso procedimento per $b(x)$ si ottiene

$$b(x) = \frac{1}{2} [v(x) - i(x)]$$

$$b(x) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} [V(x) - I(x)Z_0] \quad (8)$$

La rete a due porte e la matrice di diffusione, definizione di Parametri S

Si prende in considerazione una rete a 2 porte che collega due linee di trasmissione, come in Figura 1. Il valore l_1 è la distanza dall'origine della linea1 (Z_{01}), l_2 dall'origine della linea2 (Z_{02}).

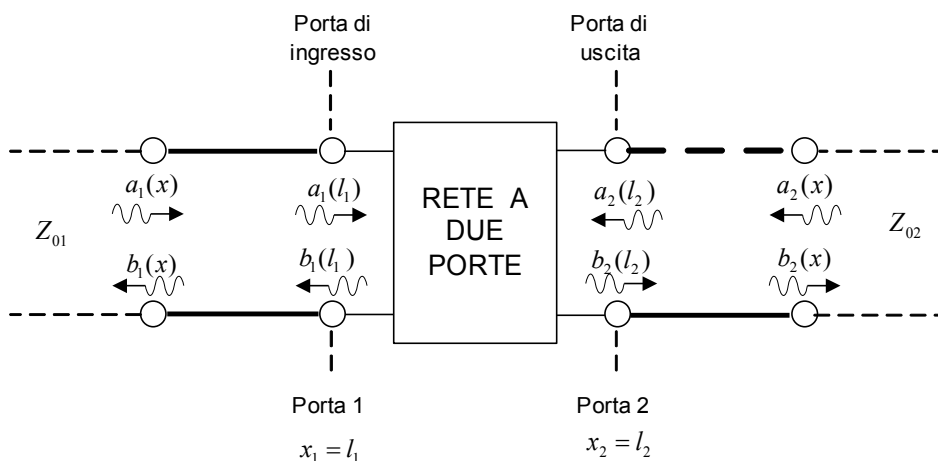


Figura 1

La rete a 2 porte si trova in una regime di onde incidenti e riflesse ,

- $a_1(l_1)$, intensità d'onda incidente sulla porta 1 alla posizione $x_1 = l_1$,
- $b_1(l_1)$, intensità d'onda riflessa sulla porta 1 alla posizione $x_1 = l_1$,
- $a_2(l_2)$, intensità d'onda incidente sulla porta 2 alla posizione $x_2 = l_2$,
- $b_2(l_2)$, intensità d'onda riflessa sulla porta 2 alla posizione $x_2 = l_2$,

Linee di trasmissione e parametri S

questa situazione consente di riscrivere l'equazione a 6 in una forma più generale

$$b_1(l_1) = S_{11}a_1(l_1) + S_{12}a_2(l_2)$$

e

$$b_2(l_2) = S_{21}a_1(l_1) + S_{22}a_2(l_2)$$

che riscritte in forma di matrice diventano

$$\begin{bmatrix} b_1(l_1) \\ b_2(l_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(l_1) \\ a_2(l_2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dove $a_1(l_1)$, $a_2(l_2)$, $b_1(l_1)$, e $b_2(l_2)$ sono i valori delle onde incidenti e riflesse relativi alle specifiche posizioni sulla linea di trasmissione dal lato della porta 1 e dal lato della porta 2 (Figura 1).

I parametri S_{11} , S_{12} , S_{21} e S_{22} , che rappresentano i coefficienti di riflessione e di trasmissione, vengono chiamati **parametri di diffusione** (in inglese: Scattering parameters = S parameters) della rete a due porte e misurati alle porte 1 e 2 della rete stessa.

La matrice $[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ viene chiamata **matrice di diffusione** (Scattering matrix).

Il termine $S_{11}a_1(l_1)$ rappresenta il contributo all'onda riflessa $b_1(l_1)$ provocata dall'onda incidente $a_1(l_1)$ sulla porta 1.

Il termine $S_{12}a_2(l_2)$ rappresenta il contributo all'onda riflessa $b_1(l_1)$ dovuto all'onda incidente $a_2(l_2)$ sulla porta 2.

Il termine $S_{22}a_2(l_2)$ rappresenta il contributo all'onda riflessa $b_2(l_2)$ provocata dall'onda incidente $a_2(l_2)$ sulla porta 2.

Il termine $S_{21}a_1(l_1)$ rappresenta il contributo all'onda riflessa $b_2(l_2)$ dovuto all'onda incidente $a_1(l_1)$ sulla porta 1.

I parametri S rappresentano sia i coefficienti di riflessione che i coefficienti di trasmissione.

Se diamo un "verso" o direzione al sistema linee + rete a due porte, ha senso differenziare i parametri in ingresso / uscita e avanti / indietro come segue.

Dalla 9 si possono definire i parametri S nel seguente modo

$S_{11} = \left. \frac{b_1(l_1)}{a_1(l_1)} \right|_{a_2(l_2)=0}$ è il coefficiente di riflessione di ingresso con la porta 2 terminata correttamente,

$S_{21} = \left. \frac{b_2(l_2)}{a_1(l_1)} \right|_{a_2(l_2)=0}$ è il coefficiente di trasmissione in avanti con la porta 2 terminata correttamente,

Linee di trasmissione e parametri S

$S_{22} = \left. \frac{b_2(l_2)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0}$ è il coefficiente di riflessione di uscita con la porta 1 terminata correttamente,

$S_{12} = \left. \frac{b_1(l_1)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0}$ è il coefficiente di trasmissione inverso con la porta 1 terminata correttamente.

Se il dispositivo a due porte è costituito da un transistor, questo deve essere polarizzato in modo corretto ed i parametri S dovranno essere specificati per un dato punto di lavoro e nella condizione di piccoli segnali.

Inoltre i parametri S dipendono dalla frequenza ed è quindi necessario definire la frequenza a cui essi sono stati misurati.

Il vantaggio nell'uso dei parametri S appare abbastanza chiaro dalla loro definizione, cioè dal fatto che essi sono misurati in condizioni di adattamento di impedenza (viene cioè realizzata la condizione $a_1(l_1) = 0$ oppure $a_2(l_2) = 0$).

Un cenno sulla misura dei parametri S

Ad esempio per misurare, alla porta di ingresso, S_{11} , che è dato dal rapporto $\frac{b_1(l_1)}{a_1(l_1)}$ la porta di uscita dovrà essere terminata in modo che ci sia l'adattamento cioè che $a_2(l_2) = 0$.

Per fare questo sarà necessario terminare la porta di uscita con una impedenza uguale alla impedenza caratteristica della linea, in modo che la potenza dell'onda incidente sul carico venga totalmente assorbita dal carico stesso e non si verifichi alcuna riflessione, $a_2(l_2) = 0$.

Questa situazione è illustrata nella figura 2 dove $a_2(l_2) = 0$ per $Z_L = Z_{02}$

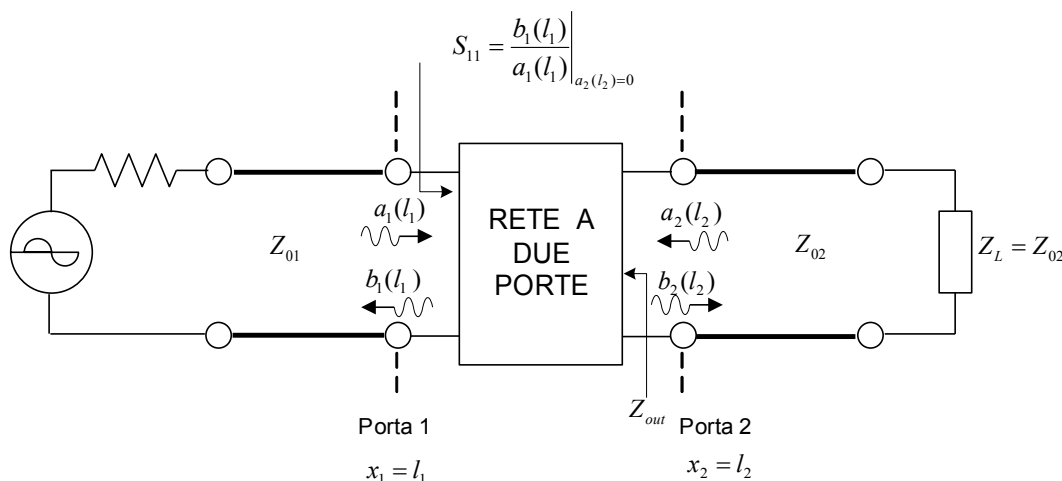


Figura 2

Affinché sia verificata la condizione $a_2(l_2) = 0$ non è necessario che esista la condizione $Z_{out} = Z_{02}$, ma è sufficiente che $Z_L = Z_{02}$.

Considerazioni simili si possono applicare anche alla porta di ingresso. Normalmente le impedenze di ingresso e di uscita delle linee sono uguali, si ha $Z_{01} = Z_{02}$, il valore tipico è 50Ω .

Linee di trasmissione e parametri S

Nella misura dei parametri S di un transistor, l'uso di una terminazione adattata, offre il vantaggio di porre il transistor in una condizione stabile (non tende ad oscillare), condizione che non è possibile ottenere nella misura degli altri parametri (h , Y , ...) dove è necessario realizzare dei corti circuiti oppure dei circuiti aperti.

Il piano di riferimento

Per fare la misura dei parametri S di un dispositivo (una rete a due porte) è necessario collegare una linea di trasmissione alla rete a due porte. Siccome i parametri S si basano sulla misura di onde che si spostano lungo la linea bisogna definire in che punto della linea viene fatta la misura. Questa posizione viene chiamata **piano di riferimento**.

Per esempio osservando la figura 3 è possibile si vede che è possibile fare la misura dei parametri S sul piano di riferimento posizionato sulla porta 1' e sulla porta 2' (*secondario*) oppure sul piano di riferimento posizionato sulla porta 1 e sulla porta 2 (*principale*).

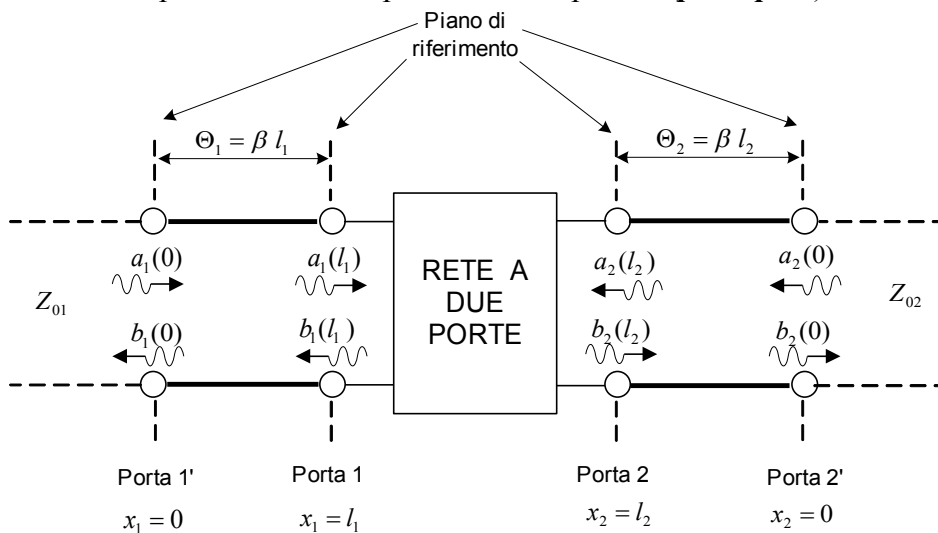


Figura 3

Al piano di riferimento corrispondente alle porte 1 e 2 la matrice S sarà

$$\begin{bmatrix} b_1(l_1) \\ b_2(l_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(l_1) \\ a_2(l_2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Mentre al piano di riferimento corrispondente alle porte 1' e 2' la matrice sarà

$$\begin{bmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}' & S_{12}' \\ S_{21}' & S_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Se vista dalle porte 1' e 2' l'insieme formato dalle linee di trasmissione e dalla rete a 2 porte, può essere considerato come una nuova rete a 2 porte avente come matrice S quella espressa nella 11

Gli angoli Θ_1 e Θ_2 sono le **lunghezze elettriche** della linea di trasmissione misurate fra i due piani di riferimento.

Linee di trasmissione e parametri S

Per delle linee di trasmissioni prive di perdite si avrà

$$b_1(l_1) = b_1(0) e^{j\Theta_1}$$

$$a_1(l_1) = a_1(0) e^{-j\Theta_1}$$

$$b_2(l_2) = b_2(0) e^{j\Theta_2}$$

$$a_2(l_2) = a_2(0) e^{-j\Theta_2}$$

dove il fattore $e^{\pm j\Theta}$ tiene conto della differenza di fase fra i due piani di riferimento. Ad esempio l'onda $a_1(l_1) = a_1(0) e^{-j\Theta_1}$ sarà in ritardo rispetto all'onda, questo ritardo è evidenziato dal termine $e^{-j\Theta}$ (ritardo = segno meno dell'esponente).

Sostituendo queste relazioni nella 10 si ottiene

$$\begin{bmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}e^{-j2\Theta_1} & S_{12}e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} \\ S_{21}e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} & S_{22}e^{-j2\Theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Comparando la 12 con la 11 si ottiene

$$\begin{bmatrix} S_{11}' & S_{12}' \\ S_{21}' & S_{22}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}e^{-j2\Theta_1} & S_{12}e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} \\ S_{21}e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} & S_{22}e^{-j2\Theta_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

e

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}'e^{j2\Theta_1} & S_{12}'e^{j(\Theta_1+\Theta_2)} \\ S_{21}'e^{j(\Theta_1+\Theta_2)} & S_{22}'e^{j2\Theta_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Queste due equazioni forniscono le relazioni fra i due piani di riferimento. Il loro significato fisico è che è possibile ricavare i parametri S di una rete a 2 porte misurandoli ad una certa distanza dalla rete stessa se si conosce la lunghezza elettrica delle linee a cui sono connessi.

Le equazioni delle tensioni e delle correnti lungo la linee

Si prende in esame la Figura 4 in cui le linee di trasmissione sono considerate senza perdite e con impedenza caratteristica reale. Questa è una situazione abbastanza tipica nel campo delle microonde dove solitamente si ha $Z_{01} = Z_{02} = 50 \Omega$ e anche la terminazione è di 50Ω .

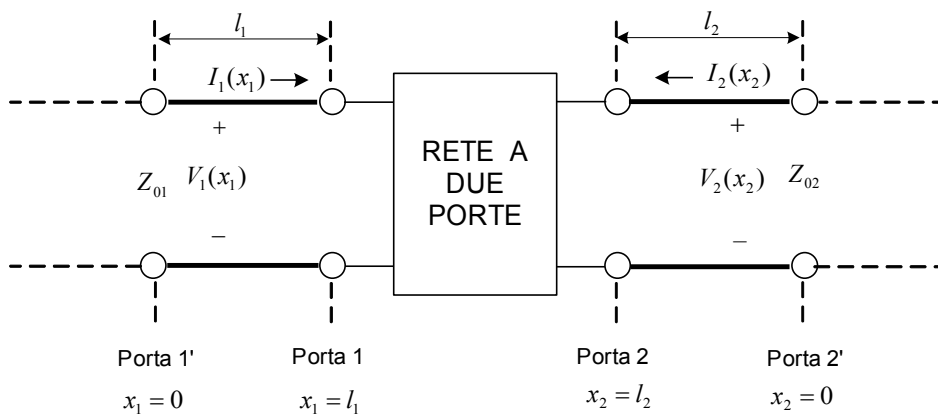


Figura 4

Linee di trasmissione e parametri S

Partendo dalla 1

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x)$$

e dalla 2

$$I(x) = \frac{V^+}{Z_0}(x) - \frac{V^-}{Z_0}(x)$$

si possono riscrivere le equazioni che descrivono le equazioni della tensione e della corrente lungo la linea in un modo più generale.

$$V_i(x_i) = V_i^+(x_i) + V_i^-(x_i) \quad (15)$$

$$I_i(x_i) = I_i^+(x_i) - I_i^-(x_i) = \frac{V_i^+}{Z_{0_i}}(x_i) - \frac{V_i^-}{Z_{0_i}}(x_i) \quad (16)$$

Dove $i = 1$ oppure 2 , cioè il numero della porta (per la rete a due porte).

Valori di picco e efficaci

In queste espressioni i valori, nella forma di fasori, di V_i^+ e V_i^- e di I_i^+ e I_i^- rappresentano i valori massimi o di picco della tensione e della corrente, valori che possono essere scalati nella forma di valori efficaci (*rms = root mean square*)

$$V_{i_rms}(x_i) = V_{i_rms}^+(x_i) + V_{i_rms}^-(x_i)$$

$$I_{i_rms}(x_i) = I_{i_rms}^+(x_i) - I_{i_rms}^-(x_i) = \frac{V_{i_rms}^+}{Z_{0i}}(x_i) - \frac{V_{i_rms}^-}{Z_{0i}}(x_i)$$

che per tensioni e correnti sinusoidali sono

$$V_{i_rms}(x_i) = \frac{V_i(x_i)}{\sqrt{2}}$$

$$V_{i_rms}^+(x_i) = \frac{V_i^+(x_i)}{\sqrt{2}}$$

.....

e così via.

Usando le notazioni normalizzate (vedi paragrafo *Le notazioni normalizzate* di pagina 27)

$$v_i(x_i) = \frac{V_i(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}}$$

$$i_i(x_i) = I_i(x_i)\sqrt{Z_{0i}}$$

$$a_i(x_i) = \frac{V_i^+(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} = I_i^+(x_i)\sqrt{Z_{0i}}$$

Linee di trasmissione e parametri S

$$b_i(x_i) = \frac{V_i^-(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} = I_i^-(x_i)\sqrt{Z_{0i}}$$

La 15 e la 16 possono essere riscritte

$$v_i(x_i) = a_i(x_i) + b_i(x_i)$$

e

$$i_i(x_i) = a_i(x_i) - b_i(x_i)$$

Ne consegue che le tensione incidente e riflessa alla porta *i* esima espressa in termini di $V_i(x_i)$ e $I_i(x_i)$ sono

$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i}I_i(x_i)] \quad (17)$$

e

$$b_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) - Z_{0i}I_i(x_i)] \quad (18)$$

Da notare che l'impedenza di normalizzazione è l'impedenza caratteristica delle linee di trasmissione Z_{01} e Z_{02} .

La potenza delle onde incidente e riflesse

La potenza media associata all'onda incidente sulla porta *i* esima (ad esempio, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$) può essere espressa da

$$\begin{aligned} P_i^+(0) &= \operatorname{Re}[V_{i_rms}^+(0)(I_{i_rms}^+(0))^*] \\ P_i^+(0) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_i^+(0)(I_i^+(0))^*] \\ P_i^+(0) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[V_i^+(0)\left(\frac{V_i^+(0)}{Z_{0i}}\right)^*\right] = \frac{1}{2} \frac{|V_i^+(0)|^2}{Z_{0i}} = \\ &= \frac{1}{2} |a_i(0)|^2 = |a_{i_rms}(0)|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Similmente la potenza media riflessa è

$$\begin{aligned} P_i^-(0) &= \operatorname{Re}[V_{i_rms}^-(0)(I_{i_rms}^-(0))^*] \\ P_i^-(0) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_i^-(0)(I_i^-(0))^*] \end{aligned}$$

Linee di trasmissione e parametri S

$$P_i^-(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V_i^-(0) \left(\frac{V_i^-(0)}{Z_{0i}} \right)^* \right] = \frac{1}{2} \frac{|V_i^-(0)|^2}{Z_{0i}} = \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} |b_i(0)|^2 = |b_{i_rms}(0)|^2$$

Dato che la linea si considera priva di perdite

$$P_i^+(0) = P_i^+(l_i)$$

$$P_i^-(0) = P_i^-(l_i)$$

quindi la potenza espressa dalle 19 e 20 corrisponderà a

$$\frac{1}{2} |a_i(0)|^2 = \frac{1}{2} |a_i(x_i)|^2$$

$$\frac{1}{2} |b_i(0)|^2 = \frac{1}{2} |b_i(x_i)|^2$$

che sono rispettivamente le potenze associate all'onda incidente e all'onda riflessa.

La porta di ingresso pilotata con una sorgente sinusoidale

Si consideri la figura 5 nella quale la porta 1' è pilotata da una sorgente sinusoidale di tensione rappresentata dal fasore E_1 con una impedenza della sorgente $Z_1 = Z_{01}$.

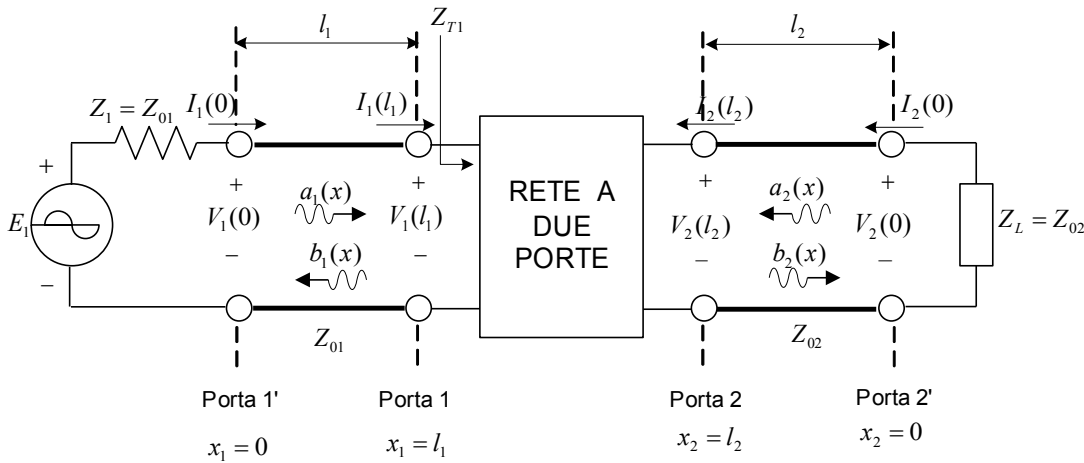


Figura 5

La porta 2' è adattata, $Z_2 = Z_{02}$, significa che è chiusa sulla sua impedenza normalizzata. Nella pratica Z_{01} e Z_{02} sono reali (tipicamente 50Ω), anche Z_1 e Z_2 sono reali e del valore di 50Ω .

Nella figura 5 viene denominata con Z_{T1} l'impedenza di ingresso della rete a due porte alla posizione $x_1 = l_1$.

Dato che la linea di trasmissione connessa alla porta 2 è terminata con la sua impedenza normalizzata alla posizione $x_2 = 0$ si può scrivere

$$V_2(0) = -Z_{02} I_2(0) \quad (21)$$

Linee di trasmissione e parametri S

sostituendo questa nella 17 dopo averla riscritta per la porta di uscita e per la posizione $x_2 = 0$

$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i}I_i(x_i)] \quad (17)$$

$$a_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}} [V_2(0) + Z_{02}I_2(0)]$$

si ha

$$a_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}} [-Z_{02}I_2(0) + Z_{02}I_2(0)] = 0$$

$$a_2(0) = 0$$

Questo dimostra che non esiste un'onda riflessa sulla porta di uscita se si verifica la condizione $Z_2 = Z_{02}$.

Alla posizione $x_1 = 0$ si avrà

$$V_1(0) = E_1 - Z_{01}I_1(0) \quad (22)$$

dopo aver riscritta la 17 per la porta di ingresso e per la posizione $x_1 = 0$ si ha

$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i}I_i(x_i)] \quad (17)$$

$$a_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [V_1(0) + Z_{01}I_1(0)]$$

e dopo aver inserito la 22, si ottiene

$$a_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [(E_1 - Z_{01}I_1(0)) + Z_{01}I_1(0)]$$

$$a_1(0) = \frac{E_1}{2\sqrt{Z_{01}}}$$

oppure

$$|a_1(0)|^2 = \frac{|E_1|^2}{4Z_{01}}$$

Quindi dalla 19

$$P_i^+(0) = \frac{1}{2} |a_i(0)|^2 = |a_{i_rms}(0)|^2 \quad (19)$$

$$P_1^+(0) = \frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{01}} \quad (23)$$

Linee di trasmissione e parametri S

Il significato di questa espressione è che la potenza dell'onda incidente $\frac{1}{2}|a_1(0)|^2$ rappresenta la potenza disponibile dalla sorgente E_1 con resistenza interna $Z_1 = Z_{01}$, cioè il generatore è adattato alla linea di trasmissione.

Questa quantità viene definita come P_{AVS} cioè come potenza disponibile dalla sorgente (AVS = *AVailable from the Source*).

Essendo la linea senza perdite si ha $P_{AVS} = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 = \frac{1}{2}|a_1(l_1)|^2$

dove la quantità $\frac{1}{2}|a_1(l_1)|^2$ rappresenta la potenza disponibile dalla sorgente alla porta 1.

Come si vede la potenza disponibile dalla sorgente è indipendente dalla impedenza Z_{T1} di ingresso della porta 1.

Z_1 è diversa da Z_{01}

Se Z_1 è diversa da Z_{01} l'espressione 23 deve essere modificata e di conseguenza la potenza incidente, $\frac{1}{2}|a_1(0)|^2$, non sarà più uguale alla potenza disponibile dalla sorgente.

Riscrivendo la 23

$$P_1^+(0) = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{01}} = \frac{E_1 E_1^*}{8Z_{01}}$$

e sostituendo in essa la 22

$$E_1 = V_1(0) + Z_{01}I_1(0) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 &= \frac{E_1 E_1^*}{8Z_{01}} = \frac{[V_1(0) + Z_{01}I_1(0)][V_1^*(0) + Z_{01}I_1^*(0)]}{8Z_{01}} \\ \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 &= \frac{1}{8Z_{01}} \left[|V_1(0)|^2 + Z_{01}I_1(0)V_1^*(0) + Z_{01}I_1^*(0)V_1(0) + Z_{01}^2|I_1(0)|^2 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Similmente dalla 18, riscritta per la porta 1 alla distanza $x_1 = 0$

$$b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [V_1(0) - Z_{01}I_1(0)] \quad \text{da cui} \quad |b_1(0)|^2 = \left| \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} \right|^2 |V_1(0) - Z_{01}I_1(0)|^2$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{8Z_{01}} \left[|V_1(0)|^2 - Z_{01}I_1(0)V_1^*(0) - Z_{01}I_1^*(0)V_1(0) + Z_{01}^2|I_1(0)|^2 \right] \quad (25)$$

Linee di trasmissione e parametri S

Sottraendo la 25 dalla 24 si ha

$$\frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{4}[I_1(0)V_1^*(0) + I_1^*(0)V_1(0)] = \frac{1}{2}\text{Re}[I_1(0)V_1^*(0)]$$

$$\frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{2}\text{Re}[I_1(0)V_1^*(0)]$$

che rappresenta la potenza fornita alla porta 1' e dato che la linea è senza perdite, anche alla porta 1.

Questa quantità si definisce con

$$P_1(0)$$

$$P_1(0) = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2$$

ne consegue

$$\frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = P_{AVS} - P_1(0) \quad (26)$$

La quantità $\frac{1}{2}|b_1(0)|^2$ rappresenta la potenza riflessa dalla porta 1 alla porta 1'. L'equazione 26 può essere riscritta (la linea è priva di perdite)

$$\frac{1}{2}|b_1(l_1)|^2 = P_{AVS} - P_1(l_1)$$

Il significato dell'equazione 26 è che il generatore manda la potenza disponibile dalla sorgente

$P_{AVS} = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2$ direttamente alla porta 1. Questa potenza non dipende dal valore dell'impedenza di ingresso Z_{T1} della rete a due porte.

Se l'impedenza di ingresso della rete a due porte Z_{T1} è adattata all'impedenza della linea ,

$Z_{T1} = Z_{01}$, si avrà che la potenza riflessa sarà nulla. Mentre se $Z_{T1} \neq Z_{01}$ una parte della potenza

incidente $\frac{1}{2}|a_1(0)|^2$ sarà riflessa verso il generatore. La potenza riflessa sarà $\frac{1}{2}|b_1(0)|^2$ e quindi la

potenza netta fornita alla porta 1 sarà

$$P_1(0) = P_1(l_1) = P_{AVS} - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2$$

La potenza fornita al carico

Dalla 21

$$V_2(0) = -Z_{02}I_2(0)$$

e dalla 18

$$b_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}}[V_i(x_i) - Z_{0i}I_i(x_i)]$$

riscritta per la porta 2 alla distanza 0 si ottiene

$$b_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}}[V_2(0) - Z_{02}I_2(0)]$$

Linee di trasmissione e parametri S

$$b_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}} [-Z_{02}I_2(0) - Z_{02}I_2(0)]$$

$$b_2(0) = -\sqrt{Z_{02}}I_2(0)$$

Perciò si avrà

$$\frac{1}{2}|b_2(0)|^2 = \frac{1}{2}|I_2(0)|^2 Z_{02}$$

che rappresenta la potenza fornita al carico di impedenza $Z_2 = Z_{02}$.

Si definisce come

$$P_2(0) = \frac{1}{2}|b_2(0)|^2$$

la potenza fornita al carico Z_2 .

Il calcolo dei parametri S

----- S₁₁ -----

Per calcolare i parametri S della rete a due porte di figura 5 sul piano di riferimento primario (porte 1 e 2) si osserva dapprima S_{11} sulla posizione $x_1 = l_1$ che sarà dato da

$$S_{11} = \frac{b_1(l_1)}{a_1(l_1)} \bigg|_{a_2(l_2)=0} = \frac{V_1^-(l_1)}{V_1^+(l_1)} \bigg|_{V_2^+(l_2)=0} \quad (27)$$

che dalla espressione del coefficiente di riflessione per una linea di impedenza Z_0 e chiusa su di un carico Z_L

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

può essere espressa come

$$S_{11} = \frac{Z_{T1} - Z_{01}}{Z_{T1} + Z_{01}} \quad (28)$$

Le equazioni 27 e 28 ci spiegano che S_{11} è il coefficiente di riflessione della porta 1 quando la porta 2 è terminata sulla sua impedenza normalizzata Z_{02} , $a_2 = 0$.

Il calcolo di S_{11} alla posizione $x_1 = 0$ definito come S'_{11} può essere fatto usando la matrice che sposta il piano di riferimento (13)

$$S'_{11} = S_{11} e^{-j2\beta l_1}$$

oppure usando l'impedenza di ingresso alla posizione $x_1 = 0$ ed il suo relativo coefficiente di riflessione che sarà S'_{11}

Se si considera la quantità $|S_{11}|^2$ si ricava dalla 23

$$P_1^+(0) = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{0-1}} \quad (23) \quad \text{e} \quad P_{AVS} = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 = \frac{1}{2}|a_1(l_1)|^2$$

e dalla 26

Linee di trasmissione e parametri S

$$\frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = P_{AVS} - P_1(0) \quad (26)$$

che

$$|S_{11}|^2 = \frac{|b_1(l_1)|^2}{|a_1(l_1)|^2} \bigg|_{a_2(l_2)=0} = \frac{P_{AVS} - P_1(l_1)}{P_{AVS}}$$

o

$$P_1(l_1) = P_1(0) = P_{AVS} (1 - |S_{11}|^2) \quad (29)$$

Questa relazione significa che $|S_{11}|^2$ rappresenta il rapporto fra la potenza riflessa dalla porta 1 con la potenza disponibile alla porta 1. Se $|S_{11}| > 1$ la potenza riflessa è maggiore di quella disponibile alla porta 1, vorrà dire che la porta 1 si comporta come una sorgente, cioè si ha una oscillazione.

----- S21 -----

Il calcolo di S_{21} sul piano di riferimento primario è il seguente

$$S_{21} = \frac{b_2(l_2)}{a_1(l_1)} \bigg|_{a_2(l_2)=0} = \frac{\sqrt{Z_{02}} I_2^-(l_2)}{\sqrt{Z_{01}} I_1^+(l_1)} \bigg|_{I_2^+(l_2)=0} = \frac{-\sqrt{Z_{02}} I_2(l_2)}{\sqrt{Z_{01}} I_1^+(l_1)} \bigg|_{I_2^+(l_2)=0} \quad (30)$$

L'ultimo passaggio nella 30 è dovuto al fatto che

$$I_2(l_2) = I_2^+(l_2) - I_2^-(l_2)$$

ma essendo

$$I_2^+(l_2) = 0$$

si ha che

$$I_2(l_2) = -I_2^-(l_2)$$

L'equazione 30 può essere manipolata ulteriormente per ricavare S_{21} in un modo più semplice. Per raggiungere questo risultato si sostituirà alla rete di figura 5 una rete equivalente come quella in figura 6.

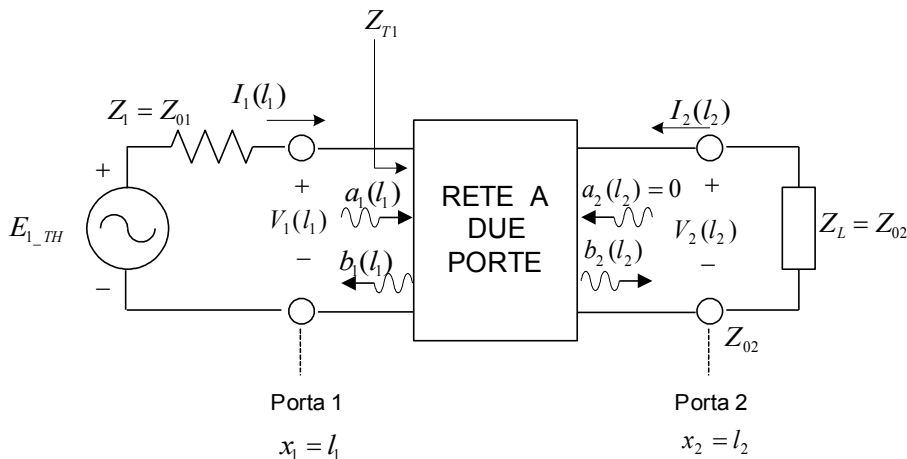


Figura 6

Linee di trasmissione e parametri S

La rete equivalente è stata ottenuta applicando il teorema di Thévenin in modo da avere delle tensioni equivalenti di Thévenin alle porte 1 e 2.

Alla porta 1 la tensione equivalente di Thévenin è la E_{1_TH} . La resistenza di Thévenin è Z_{01} , che si ricava ponendo $E_1 = 0$, cioè quella della linea.

La tensione di Thévenin sarà data dalla

$$E_{1_TH} = E_1 e^{-j\beta l_1}$$

Alla porta adattata di uscita, porta 2, la resistenza equivalente di Thévenin sarà Z_{02} .

Tendendo conto che per definizione la relazione fra $a_1(l_1)$ e $I_1^+(l_1)$ è data dalla

$$a_1(l_1) = \sqrt{Z_{01}} I_1^+(l_1)$$

che sostituita nella 17

$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i)] \quad (17)$$

e riscritta per la porta 1 e per la posizione l_1

$$a_1(l_1) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [V_1(l_1) + Z_{01} I_1(l_1)]$$

si avrà

$$I_1^+(l_1) = \frac{1}{2Z_{01}} [V_1(l_1) + Z_{01} I_1(l_1)] \quad (31)$$

Osservando il circuito equivalente di figura 6 si nota che

$$V_1(l_1) = E_{1_TH} - Z_{01} I_1(l_1) \quad (32)$$

Sostituendo questa espressione nella 31 si ottiene

$$I_1^+(l_1) = \frac{E_{1_TH}}{2Z_{01}} \quad (33)$$

Applicando alla porta 2 la legge di Ohm si ottiene

$$-I_2(l_2) = \frac{V_2(l_2)}{Z_{02}} \quad (34)$$

Sostituendo la 33 nella 30 si ottiene una espressione per S_{21}

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} \frac{V_2(l_2)}{E_{1_TH}} \quad (35)$$

Il significato fisico di questa espressione è che S_{21} rappresenta il coefficiente di trasmissione diretta dalla porta 1 alla porta 2. Per ricavare S_{21} sul piano di riferimento secondario si usano le espressioni 13 e 14

$|S_{21}|^2$ può essere ricavata dalla 35

Linee di trasmissione e parametri S

$$|S_{21}|^2 = \frac{4Z_{01}}{Z_{02}} \frac{|V_2(l_2)|^2}{|E_{1_TH}|^2} = \frac{\frac{1}{2} \frac{|V_2(l_2)|^2}{Z_{02}}}{\frac{1}{8} \frac{|E_{1_TH}|^2}{Z_{01}}}$$

dove il numeratore è simile alla 19 ed il denominatore alla 23

$|S_{21}|^2$ rappresenta il rapporto fra la potenza fornita al carico Z_{02} , P_L e la potenza disponibile dalla sorgente E_{1_TH} , che è P_{AVS} .

Il guadagno di trasduzione

Il rapporto $\frac{P_L}{P_{AVS}}$ viene chiamato **guadagno di trasduzione**, G_T ,

$$G_T = |S_{21}|^2 \quad (36)$$

Se $Z_1 = Z_2 = Z_0$ dalla 35 si ha

$$S_{21} = \frac{V_2(l_2)}{\frac{E_{1_TH}}{2}}$$

e il guadagno di traduzione diventa

$$G_T = |S_{21}|^2 = \left| \frac{V_2(l_2)}{\frac{E_{1_TH}}{2}} \right|^2$$

----- S22 e S12 -----

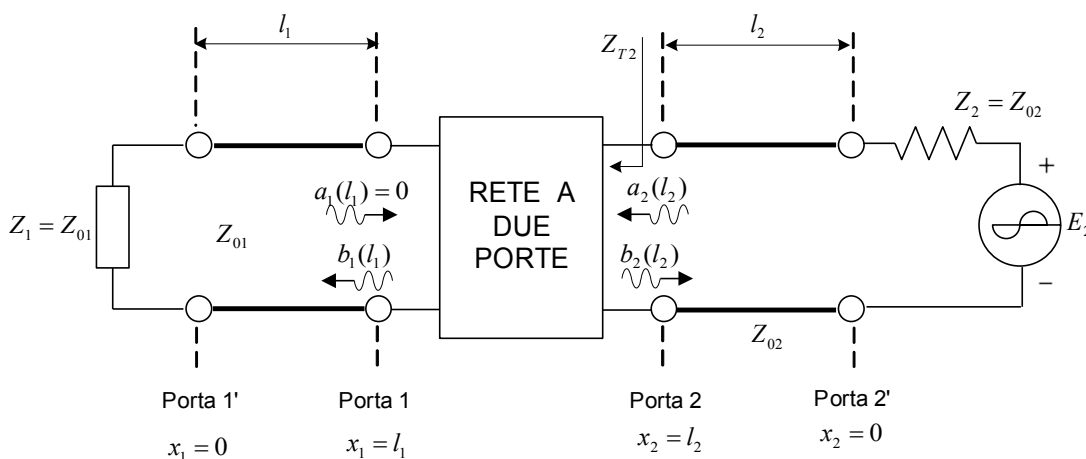


Figura 7

Se si analizza una rete come quella di figura 7, in cui il pilotaggio sinusoidale viene applicato alla porta 2' ed è rappresentato dal fasore E_2 con impedenza della sorgente $Z_2 = Z_{02}$ e la porta 1' è adattata, $Z_1 = Z_{01}$, si ricava che al piano di riferimento primario si ha

Linee di trasmissione e parametri S

$$S_{22} = \left. \frac{b_2(l_2)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0} = \frac{Z_{T2} - Z_{02}}{Z_{T2} + Z_{02}} \quad (37)$$

e

$$S_{12} = \left. \frac{b_1(l_2)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0} = \frac{2\sqrt{Z_{02}}V_1(l_1)}{\sqrt{Z_{01}}E_{2_TH}} \quad (38)$$

dove E_{2_TH} è la tensione equivalente di Thévenin alla porta 2.

L'equazione 37 fa vedere che l' S_{22} è il **coefficiente di riflessione** della porta 2 con la porta 1 terminata sulla impedenza normalizzata $Z_1 = Z_{01}$, condizione in cui si ha $a_1(l_1) = 0$.

L'equazione 38 mostra che l' S_{12} è il **coefficiente di trasmissione inverso** dalla porta 2 alla porta 1.

L'equazione 13 può essere usata per calcolare i parametri S'_{22} e S'_{21} sul piano di riferimento secondario.

La quantità $|S_{22}|^2$ rappresenta il rapporto della potenza riflessa dalla porta 2 con la potenza disponibile alla porta 2. Se $|S_{22}|^2 > 1$ la potenza riflessa sarà maggiore di quella disponibile alla porta 2 si avrà una condizione di oscillazione.

Se si riscrive l'equazione che esprime la quantità $|S_{12}|^2$ appare evidente essa rappresenta il guadagno di traduzione inversa

$$|S_{12}|^2 = \frac{\frac{1}{2} \frac{|V_1(l_1)|^2}{Z_{01}}}{\frac{|E_{2_TH}|^2}{8Z_{02}}}$$

I parametri S di un transistor sono di solito misurati nella condizione $Z_{01} = Z_{02} = Z_0$ e $Z_1 = Z_2$ (Figura 5), in questo caso dice che i parametri sono misurati in un sistema con impedenza Z_0 , di solito 50Ω .

Se un transistor viene usato nella configurazione di figura 5 con una terminazione arbitraria Z_1 e Z_2 , il guadagno G_T non sarà più dato dalla 36.

Riferimenti

Guillermo Gonzalez, Microwave Transistors Amplifiers, (Analysis & Design), Second Edition, Prentice Hall.

\$\$

Linee di trasmissione e parametri S

Esercizi sui parametri S

Esercizio 1

Calcolare il parametri S di una impedenza Z connessa in serie ad una linea di impedenza Z_0

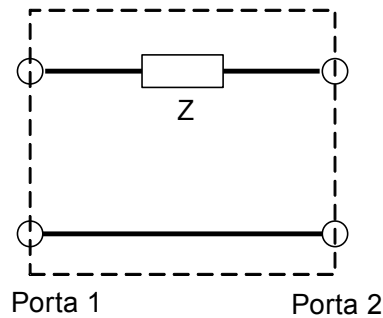


Figura 1

Soluzione

L' impedenza Z può essere considerata come una rete a due porte connessa in serie ad una linea di impedenza Z_0

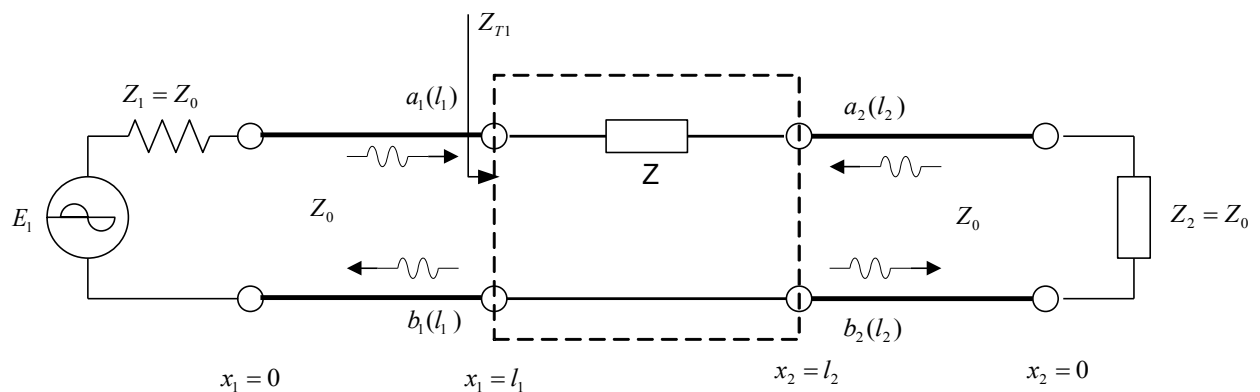


Figura 2

Il circuito equivalente di Thevenin sarà

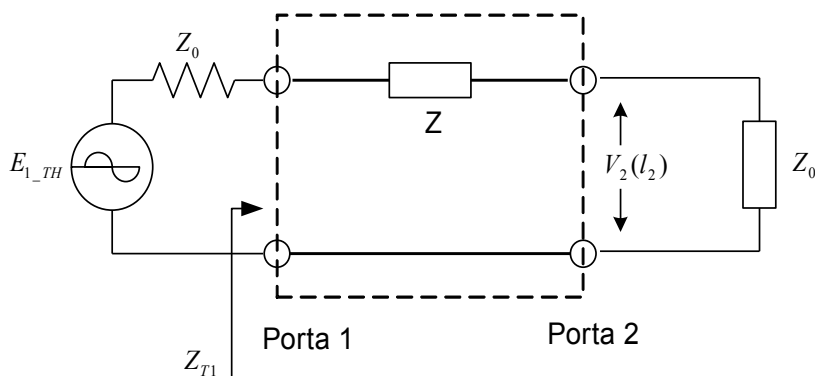


Figura 3

I parametri di riferimento si calcolano sul piano di riferimento definito dalle porte 1 e 2.

Linee di trasmissione e parametri S

Calcolo di S_{11}

$$S_{11} = \left. \frac{b_1(l_1)}{a_1(l_1)} \right|_{a_2(l_2)=0} \quad \Rightarrow \quad S_{11} = \frac{Z_{T1} - Z_{01}}{Z_{T1} + Z_{01}}$$

Dalla figura 3 si vede che $Z_{T1} = Z + Z_0$ e $Z_{01} = Z_0$ per cui si ha

$$S_{11} = \frac{(Z + Z_0) - Z_0}{(Z + Z_0) + Z_0} \quad \Rightarrow \quad S_{11} = \frac{Z}{Z + 2Z_0}$$

Calcolo di S_{21}

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} \frac{V_2(l_2)}{E_{1_TH}} \quad \Rightarrow \quad S_{21} = \frac{2 V_2(l_2)}{E_{1_TH}}$$

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_0$$

Applicando il principio del partitore di tensione $V_2(l_2) = \frac{E_{1_TH}}{2Z_0 + Z} Z_0$ da cui

$$S_{21} = \frac{2}{E_{1_TH}} \cdot \frac{E_{1_TH}}{2Z_0 + Z} Z_0 \quad \Rightarrow \quad S_{21} = \frac{2Z_0}{2Z_0 + Z}$$

La rete è simmetrica per cui si avrà che $S_{11}=S_{22}$ e $S_{21} = S_{12}$

Se l'impedenza $Z = j100 \, \Omega$ e $Z_0 = 50 \, \Omega$ si avrà:

$$S_{11} = \frac{Z}{Z + 2Z_0} = \frac{j100}{j100 + 2 \cdot 50}$$

$$S_{11} = \frac{j100}{j100 + 2 \cdot 50} \cdot \frac{100 - j100}{100 - j100} = \frac{10^4 + j10^4}{10^4 + 10^4} = (0,5 + j0,5)$$

$$S_{11} = 0,707 \angle 45^\circ$$

$$S_{21} = \frac{100}{100 + j100} \cdot \frac{100 - j100}{100 - j100} = \frac{10^4 - j10^4}{10^4 + 10^4} = (0,5 - j0,5)$$

$$S_{21} = \frac{2Z_0}{2Z_0 + Z} = \frac{100}{100 + j100}$$

$$S_{11} = 0,707 \angle -45^\circ$$

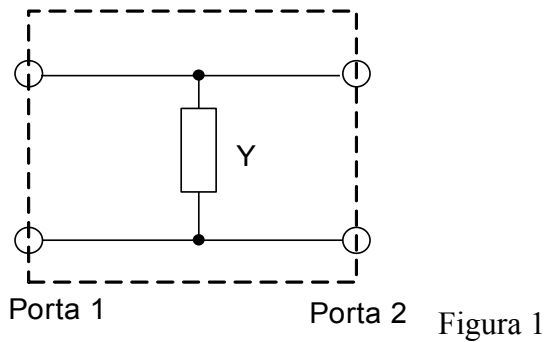
La matrice S sarà

$$[S_{11}] = \begin{bmatrix} 0,707 \angle 45^\circ & 0,707 \angle -45^\circ \\ 0,707 \angle -45^\circ & 0,707 \angle 45^\circ \end{bmatrix}$$

Linee di trasmissione e parametri S

Esercizio 2

Calcolare il parametri S di una ammettenza Y connessa in una linea di impedenza Z_0 .



Soluzione

L' ammettenza Y può essere considerata come una rete a due porte inserita in una linea di impedenza Z_0 .

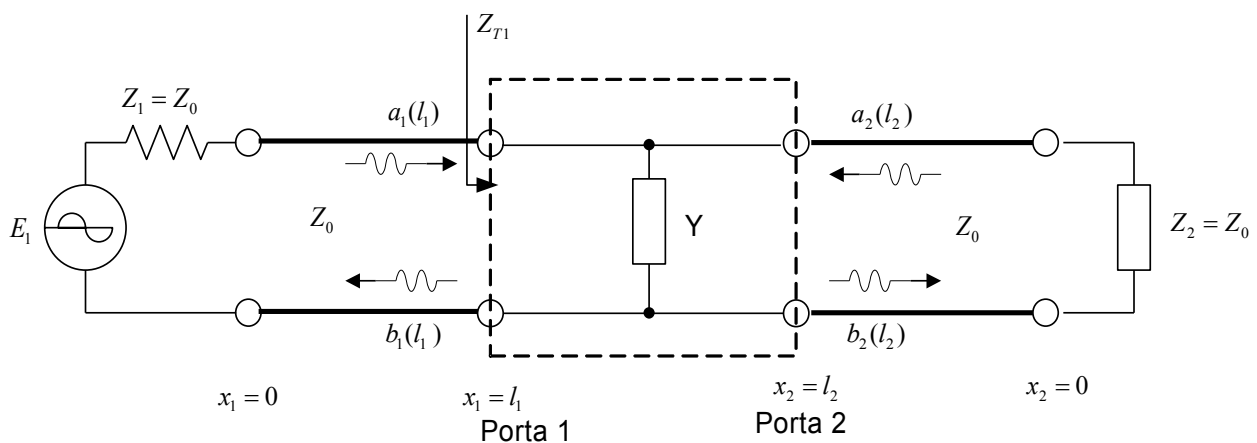


Figura 2

Il circuito equivalente di Thevenin

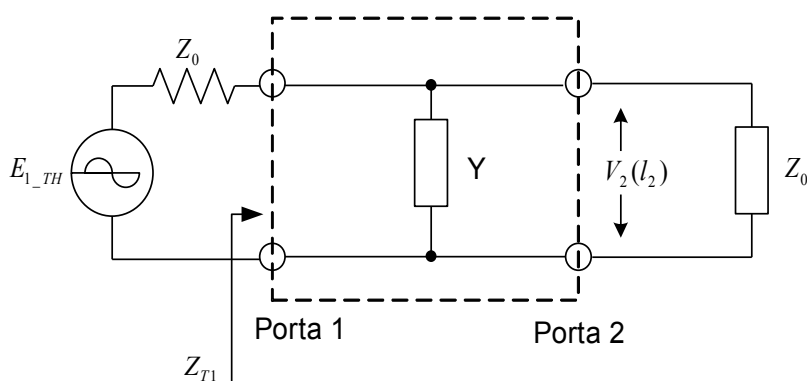


Figura 3

L'impedenza di ingresso Z_{T1} sarà data da $Z_{T1} = Z_0 // \frac{1}{Y}$

Linee di trasmissione e parametri S

$$Z_{T1} = \frac{\frac{1}{Y} \cdot Z_0}{\frac{1}{Y} + Z_0} = \frac{Z_0}{1 + Z_0 Y}$$

Calcolo di S_{11}

S_{11} coincide con il coefficiente di riflessione Γ

$$\Gamma = S_{11} = \frac{Z_{T1} - Z_0}{Z_{T1} + Z_0} = \frac{\frac{Z_0}{1 + Z_0 Y} - Z_0}{\frac{Z_0}{1 + Z_0 Y} + Z_0} = \frac{Z_0 - Z_0 - YZ_0^2}{Z_0 + Z_0 + YZ_0^2} = \frac{-YZ_0^2}{2Z_0 + YZ_0^2} = \frac{-YZ_0}{2 + YZ_0}$$

$$S_{11} = \frac{-YZ_0}{2 + YZ_0}$$

Dal circuito equivalente (Figura 3) si calcola $V_2(l_2)$ con la relazione del partitore di tensione

$$V_2(l_2) = \frac{E_{1_TH}}{Z_0 + Z_{T1}} Z_{T1}$$

$$V_2(l_2) = \frac{E_{1_TH} \cdot \frac{Z_0}{1 + YZ_0}}{Z_0 + \frac{Z_0}{1 + YZ_0}} = \frac{E_{1_TH} \cdot Z_0}{2Z_0 + YZ_0^2} = \frac{E_{1_TH}}{2 + YZ_0} \quad V_2(l_2) = \frac{E_{1_TH}}{2 + YZ_0}$$

$$S_{21} = \frac{2V_2(l_2)}{E_{1_TH}} = \frac{2 \frac{E_{1_TH}}{2 + YZ_0}}{E_{1_TH}} = \frac{2}{2 + YZ_0} \quad S_{21} = \frac{2}{2 + YZ_0}$$

La rete a due porte è simmetrica e quindi $S_{21} = S_{12}$ e $S_{11} = S_{22}$

Se l'ammittenza è una resistenza da 100 Ohm $Y = \frac{1}{100} = 10 \text{ mS}$ e se il sistema ha $Z_0 = 50 \text{ Ohm}$ si ha

$$S_{11} = \frac{-YZ_0}{2 + YZ_0} = \frac{-10 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{2 + 10 \cdot 10^{-3} \cdot 50} = \frac{-0,5}{2,5} = -\frac{1}{5} \quad S_{11} = -\frac{1}{5}$$

$$S_{21} = \frac{2}{2 + 10 \cdot 10^{-3} \cdot 50} = \frac{4}{5} \quad S_{21} = \frac{4}{5}$$

La matrice S sarà

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Linee di trasmissione e parametri S

Esercizio 3

Calcolare i parametri S di uno stub in corto circuito inserito in un sistema di impedenza Z_0 .

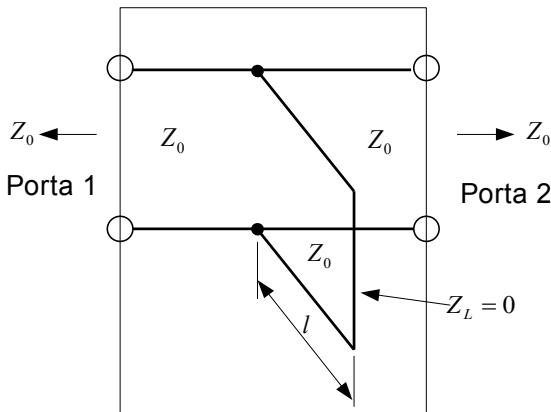


Figura 1

Soluzione

Si calcola l'impedenza di ingresso dello stub,

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad \text{lo stub è in corto, quindi } Z_L = 0$$

$$Z_{in_CC} = Z_0 \frac{jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_0 \tan \beta l} = jZ_0 \tan \beta l \quad \boxed{Z_{in_CC} = jZ_0 \tan \beta l}$$

$$\boxed{Y_{in_CC} = \frac{1}{Z_{in_CC}} = \frac{1}{jZ_0 \tan \beta l}}$$

Calcolo di $S_{11} = S_{22}$

Da questo punto in poi si può procedere come per l'Esercizio 2, dove si è visto che $S_{11} = \frac{-YZ_0}{2 + YZ_0}$

$$S_{11} = \frac{-Y_{in_CC} Z_0}{2 + Y_{in_CC} Z_0} = \frac{-\frac{1}{jZ_0 \tan \beta l} Z_0}{2 + \frac{1}{jZ_0 \tan \beta l} Z_0} = \frac{-\frac{1}{j \tan \beta l}}{2 + \frac{1}{j \tan \beta l}} = \frac{-\frac{1}{j \tan \beta l}}{\frac{2j \tan \beta l + 1}{j \tan \beta l}} = \frac{-1}{2j \tan \beta l + 1}$$

$$\boxed{S_{11} = \frac{-1}{2j \tan \beta l + 1}}$$

Il sistema è simmetrico e quindi $S_{11} = S_{22}$

Calcolo di $S_{12} = S_{21}$

Dall'esercizio 2 si è visto che $S_{21} = \frac{2}{2 + YZ_0}$

$$S_{21} = \frac{2}{2 + Y_{in_CC} Z_0} = \frac{2}{2 + \frac{1}{jZ_0 \tan \beta l} Z_0} = \frac{2}{2 + \frac{1}{j \tan \beta l}} = \frac{2}{2 - j \cot \beta l} \quad \boxed{S_{21} = \frac{2}{2 - j \cot \beta l}}$$

Linee di trasmissione e parametri S

Si calcolano i parametri S di uno stub di lunghezza $\frac{\lambda}{4}$ di impedenza caratteristica $Z_0 = 50\Omega$ e chiuso su una impedenza di carico $Z_L = 50\Omega$.

Si calcola l'impedenza di ingresso dello stub,

$$Z_{in-\lambda/4} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = \frac{50^2}{50} = 50\Omega$$

L'impedenza di ingresso dello stub può essere vista come una impedenza in // inserita in un sistema di impedenza Z_0 , in pratica si presenta come una rete a 2 porte.

$$Z_{T1} = Z_{in-\lambda/4} = 50\Omega$$

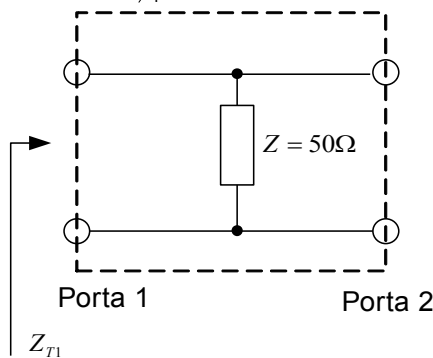


Figura 2

Dall'esercizio 2 possiamo riportare $Z_{T1} = \frac{\frac{1}{Y} \cdot Z_0}{\frac{1}{Y} + Z_0}$

$$Z_{T1} = \frac{\frac{1}{Y} \cdot Z_0}{\frac{1}{Y} + Z_0} = \frac{ZZ_0}{Z + Z_0} = \frac{50 \cdot 50}{50 + 50} = 25\Omega \quad Z_{T1} = 25\Omega$$

$$S_{11} = \Gamma = \frac{Z_{T1} - Z_0}{Z_{T1} + Z_0} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3} \quad \boxed{S_{11} = -\frac{1}{3}}$$

Dall'esercizio 2 $S_{21} = \frac{2}{2 + YZ_0}$

$$S_{21} = \frac{2}{2 + YZ_0} = \frac{2}{2 + \frac{50}{50}} = \frac{2}{3} \quad \boxed{S_{21} = \frac{2}{3}}$$

La matrice S

$$\boxed{[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}$$

Linee di trasmissione e parametri S

Esercizio 4

Nella rete a due porte in figura

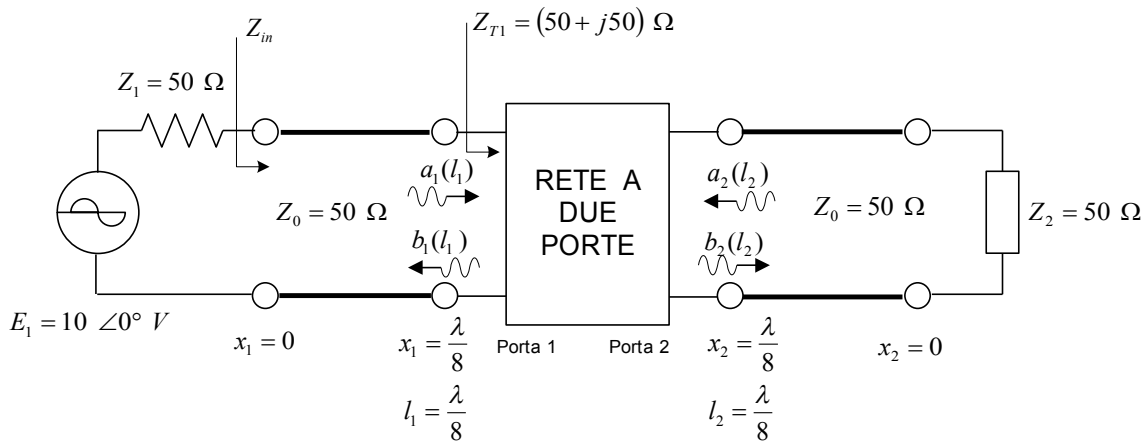


Figura 1

calcolare:

- $Z_{in}(0)$,
- $a_1(0)$, $b_1(0)$, $a_1(\frac{\lambda}{8})$, $b_1(\frac{\lambda}{8})$ e $a_2(0)$,
- $V_1(0)$, $V_1(\frac{\lambda}{8})$, $I_1(0)$, $I_1(\frac{\lambda}{8})$,
- calcolare la potenza di ingresso e di uscita a $x_1 = 0$ e $x_1 = \frac{\lambda}{8}$,
- calcolare S_{11} a $x_1 = 0$ e a $x_1 = \frac{\lambda}{8}$
- VSWR di ingresso e di uscita,
- calcolare la potenza fornita al carico Z_2 se i parametri S sono i seguenti e sono misurati sul piano di riferimento primario $x_1 = x_2 = \frac{\lambda}{8}$,

$$S_{11} = 0,447 \angle 63,4^\circ$$

$$S_{12} = 0,001 \angle 40^\circ$$

$$S_{21} = 5 \angle 135^\circ$$

$$S_{22} = 0,6 \angle 40^\circ$$

Soluzione

- Calcolo di $Z_{in}(0)$

Si tratta di trovare l'impedenza di ingresso di una linea di trasmissione lunga $\frac{\lambda}{8}$ e chiusa su di un carico $Z_L = Z_{T1} = (50 + j50) \Omega$

Linee di trasmissione e parametri S

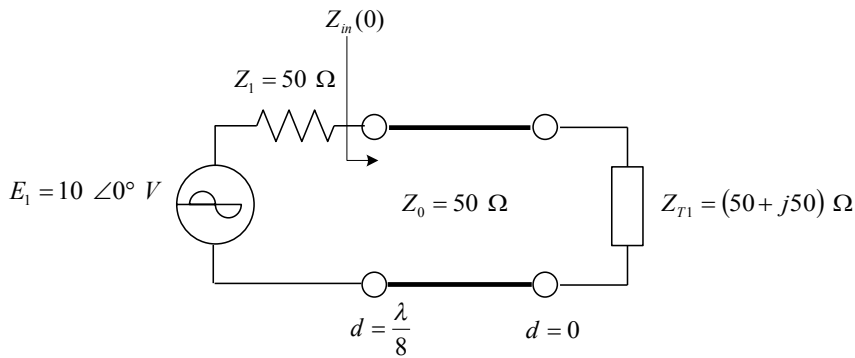


Figura 2

$$Z_{in}(0) = Z_{in}(d) \Big|_{d=\frac{\lambda}{8}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d}$$

$$d = \frac{\lambda}{8} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Theta = \beta d \quad \Theta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ (lunghezza elettrica)}$$

$$Z_{in}(0) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} = 50 \frac{(50 + j50) + j50 \tan 45^\circ}{50 + j(50 + j50) \tan 45^\circ} = 50 \frac{50 + j50 + j50}{50 + j50 - j50}$$

e moltiplicando sopra e sotto per $-j$ si ha

$$Z_{in}(0) = (100 - j50) \Omega$$

b) Calcolo di $a_1(0)$, $b_1(0)$, $a_1(\frac{\lambda}{8})$, $b_1(\frac{\lambda}{8})$ e $a_2(0)$

Si calcola per prima $a_1(0)$, cioè l'intensità d'onda incidente all'ingresso della linea

$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i)] \quad \text{in questo caso } a_i(x_i) = a_1(0) \quad a_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} [V_1(0) + Z_0 I_1(0)]$$

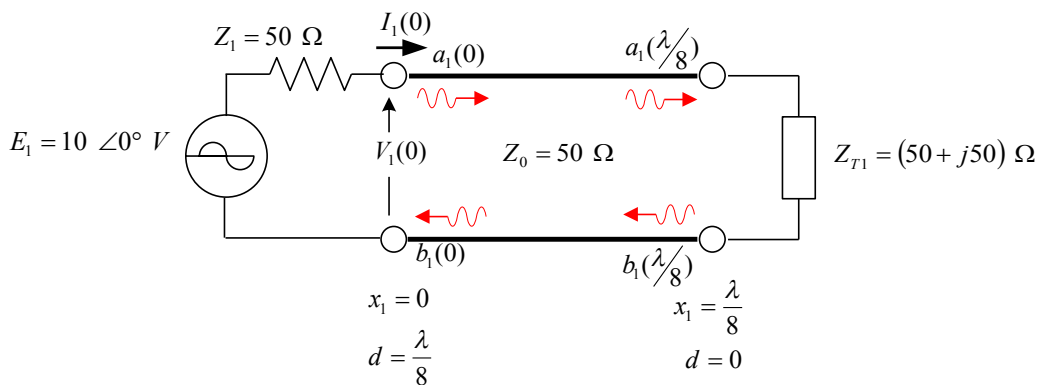


Figura 3

$$V_1(0) = (E_1 - Z_s I_1(0)) \text{ V}$$

$$V_1(0) = (10 \angle 0^\circ - 50 I_1(0)) \text{ V}$$

$$a_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} [10 \angle 0^\circ - 50 I_1(0) + 50 I_1(0)]$$

$$a_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{50}} 10 \angle 0^\circ = \frac{10}{2\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{100}}{2\sqrt{50}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Linee di trasmissione e parametri S

$$a_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{alla porta 1'}$$

sul piano di riferimento primario, porta 1', l'intensità d'onda sarà

$$a_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = a_1(0)e^{-j\Theta}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad l = \frac{\lambda}{8} \quad \Theta = \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$a_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = a_1(0)e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Si calcola l'onda riflessa dalla porta 1' sul piano di riferimento a $x_1 = 0$.

Dalla teoria ci è noto che

$$b_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) - Z_{0i}I_i(x_i)] \quad \text{per } x_1 = 0 \text{ si ha}$$

$$b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [V_1(0) - Z_{01}I_1(0)]$$

$$V_1(0) = (E_1 - Z_S I_1(0)) \vee$$

$$b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [E_1 - Z_S I_1(0) - Z_{01}I_1(0)] \quad Z_{01} = Z_S = Z_0 = 50 \, \Omega$$

$$b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{50}} [10\angle 0^\circ - 50I_1(0) - 50I_1(0)]$$

$$b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{50}} [10 - 100I_1(0)]$$

La corrente $I_1(0)$ è data da

$$I_1(0) = \frac{E_1}{Z_S + Z_{in}(0)} = \frac{10}{50 + 100 - j50} = \frac{10}{150 - j50} = \frac{10}{158\angle -18^\circ} = 0,063\angle 18^\circ$$

$$I_1(0) = 0,063\angle 18^\circ \, A$$

$$b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{50}} [10 - 100 \cdot 0,063\angle 18^\circ] \quad b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{50}} [10 - 100(0,059 + j0,0199)]$$

$$b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{50}} [10 - 0,059 - j1,99] \quad b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{50}} [4,023 - j1,99] \quad b_1(0) = 0,2845 - j0,14$$

$$b_1(0) = 0,3175\angle -26,347^\circ$$

Si calcola $b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$

$$b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = b_1(0)e^{j\Theta} \quad \Theta = \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad e^{j\Theta} = e^{j\frac{\pi}{4}} = 1\angle 45^\circ$$

$$b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,3175\angle -26,347^\circ \cdot 1\angle 45^\circ$$

Linee di trasmissione e parametri S

$$b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,3175 \angle 18,653^\circ$$

Alla porta 2 la linea è adattata per cui si ha $a_2(0) = 0$

Un modo alternativo di calcolare l'onda riflessa $b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$ è quello di calcolare S_{11} nella posizione

$$x_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) \text{ usando la relazione } S_{11} = \frac{Z_{T1} - Z_{01}}{Z_{T1} + Z_{01}}$$

$$S_{11} = \frac{Z_{T1} - Z_{01}}{Z_{T1} + Z_{01}} = \frac{50 + j50 - 50}{50 + j50 + 50} = \frac{j50}{100 + j50} = \frac{j50(100 - j50)}{100^2 + 50^2}$$

$$S_{11} = 0,2 + j0,4 = 0,4472 \angle 63,43^\circ$$

$$\text{dato che } S_{11} = \frac{b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)}{a_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)}$$

$$b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = S_{11} a_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,4472 \angle 63,43^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

$$b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,316 \angle 18,43^\circ$$

Il risultato è praticamente lo stesso di quello ottenuto con il procedimento precedente.

c) Calcolo di $V_1(0)$, $I_1(0)$, $V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$, $I_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$

Si usa la relazione del partitore di tensione

$$V_1(0) = \frac{E_i Z_s I_1(0)}{Z_s + Z_{in}(0)} = \frac{10(100 - j50)}{50 + 100 - j50} = \frac{10(111,8 \angle -26,56^\circ)}{158,1 \angle -18,43^\circ}$$

$$V_1(0) = \frac{1118 \angle -26,56^\circ}{158,1 \angle -18,43^\circ} = 7,0715 \angle -8,136^\circ \text{ V} \quad V_1(0) = 7,0715 \angle -8,136^\circ \text{ V}$$

La corrente è stata già calcolata al punto b)

$$I_1(0) = 0,063 \angle 18^\circ \text{ A}$$

$V_1(0)$ si può calcolare anche con la relazione $V_1(0) = I_1(0) \cdot Z_{in}(0)$

$$V_1(0) = 0,063 \angle 18^\circ \cdot (100 - j50) = 0,063 \angle 18^\circ \cdot 111,8 \angle -26,56^\circ = 7,0434 \angle -8,56^\circ \text{ V}$$

$$V_1(0) = 7,0434 \angle -8,56^\circ \text{ V}$$

oppure considerando che

Linee di trasmissione e parametri S

$$v_1 = \frac{V_1(0)}{\sqrt{Z_0}} = a_1(0) + b_1(0) \quad \text{da cui} \quad V_1(0) = \sqrt{Z_0} [a_1(0) + b_1(0)]$$

$$a_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b_1(0) = 0,3175 \angle -26,347^\circ$$

$$V_1(0) = \sqrt{Z_0} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + 0,3175 \angle -26,347^\circ \right] = 7,071 [7,071 + (0,2845 - j0,1409)]$$

$$V_1(0) = 7,071 [0,9916 - j0,1409] = 7,071 (1,0016 \angle -8,0872^\circ) = 7,0821 \angle -8,0872^\circ \text{ V}$$

$$V_1(0) = 7,0821 \angle -8,0872^\circ \text{ V}$$

I tre risultati di $V_1(0)$ sono in pratica uguali.

$$\text{Calcolo di } V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$$

$$v_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \frac{V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)}{\sqrt{Z_0}} = a_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) + b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) \quad V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \sqrt{Z_0} [a_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) + b_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)]$$

$$V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \sqrt{50} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ + 0,3175 \angle 18,653^\circ \right] = 0,7071 [0,7071 \angle -45^\circ + 0,3175 \angle 18,653^\circ]$$

$$V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,7071 [(0,5 - j0,5) + (0,3008 + j0,1016)] = 0,7071 [0,8008 - j0,3984]$$

$$V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,7071 [0,8944 \angle -26,45^\circ] = 6,3246 \angle -26,45^\circ \text{ V}$$

$$V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 6,3246 \angle -26,45^\circ \text{ V}$$

$$\text{si calcola } I_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$$

$$I_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \frac{V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)}{Z_{T1}} = \frac{6,3246 \angle -26,45^\circ}{50 + j50} = \frac{6,3246 \angle -26,45^\circ}{70,71 \angle 45^\circ} = 0,0901 \angle -71,45^\circ \text{ A}$$

$$I_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,0901 \angle -71,45^\circ \text{ A}$$

d) Calcolo della potenza di ingresso P_1 a $x_1(0)$ e $x_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$

$$P_1(0) = \frac{1}{2} \text{Re}[V_1(0) \cdot I_1^*(0)]$$

$$P_1(0) = \frac{1}{2} \text{Re}[0,70821 \angle -8,0872^\circ \cdot 0,063 \angle -18^\circ] = \frac{1}{2} \text{Re}[0,4462 \angle -26,087^\circ]$$

$$P_1(0) = \frac{1}{2} \text{Re}[0,4007 - j0,1962] \quad P_1(0) = \frac{1}{2} 0,4007 = 0,2004 \text{ W} \quad P_1(0) = 0,2004 \text{ W}$$

$$P_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \frac{1}{2} \text{Re}[V_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) \cdot I_1^*\left(\frac{\lambda}{8}\right)]$$

$$P_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \frac{1}{2} \text{Re}[6,3246 \angle -26,45^\circ \cdot 0,091 \angle 71,45^\circ] = \frac{1}{2} \text{Re}(0,5755 \angle 45^\circ) = \frac{1}{2} \text{Re}(0,4069 + j0,4069)$$

Linee di trasmissione e parametri S

$$P_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \frac{1}{2} 0,4069 = 0,2035 \text{ W} \quad P_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = 0,2035 \text{ W}$$

Essendo la linea priva di perdite si ha $P_1(0) = P_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$

Un modo alternativo per il calcolo di $P_1(0)$ e $P_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$ è quello di calcolare la potenza disponibile della sorgente

$$P_{AVS} = \frac{1}{2} [a_1(0)]^2 \quad a_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_{AVS} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ W} \quad P_{AVS} = 0,25 \text{ W}$$

Si può ricalcolare $P_1(0)$

$$P_1(0) = P_1\left(\frac{\lambda}{8}\right) = P_{AVS} (1 - |S_{11}|^2)$$

$$P_1(0) = P_{AVS} (1 - |S_{11}|^2) = 0,25 (1 - 0,4472^2) = 0,2 \text{ W} \quad P_1(0) = 0,2 \text{ W}$$

e) Calcolo di S_{11} a $x_1(0)$

S_{11} alla posizione $x_1\left(\frac{\lambda}{8}\right)$ è stato già calcolato al punto b)

$$S'_{11} = \frac{Z_{in}(0) - Z_0}{Z_{in}(0) + Z_0} = \frac{(100 - j50) - 50}{(100 - j50) + 50} = \frac{50 - j50}{150 - j50} = \frac{70,71 \angle -45^\circ}{158,11 \angle -18,43^\circ} = 0,4438 \angle -26,57^\circ$$

$$S'_{11} = 0,4438 \angle -26,57^\circ$$

Dalla matrice S

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} e^{j2\Theta_1} & S'_{12} e^{j(\Theta_1 + \Theta_2)} \\ S'_{21} e^{j(\Theta_1 + \Theta_2)} & S'_{22} e^{j2\Theta_2} \end{bmatrix}$$

si ha

$$S_{11} = S'_{11} e^{j2\Theta_1} \quad \text{dove} \quad \Theta_1 = \beta \cdot l \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad l = \frac{\lambda}{8} \quad \Theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$S_{11} = S'_{11} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$S_{11} = (0,4438 \angle -26,57^\circ) (1 \angle 90^\circ) = 0,4438 \angle 63,43^\circ \quad S_{11} = 0,4438 \angle 63,43^\circ$$

il valore precedentemente calcolato (paragrafo b) era $S_{11} = 0,4472 \angle 63,43^\circ$.

f) Calcolo del coefficiente VSWR di ingresso e di uscita.

Uscita

La linea di uscita è adattata perciò il coefficiente sarà unitario. Non essendoci riflessione si ha

$$VSWR = \frac{|V_{(d)}|_{\max}}{|V_{(d)}|_{\min}} = 1$$

Linee di trasmissione e parametri S

Ingresso

All'ingresso il coefficiente di onde stazionarie è associato a S_{11} e Z_{T1}

$$VSWR = \frac{1 + |S_{11}|}{1 - |S_{11}|} = \frac{1 + 0,4472}{1 - 0,4472} = 2,6179 \quad \boxed{VSWR = 2,6179}$$

g) Calcolo della potenza fornita al carico $P_2(0)$

Essendo l'uscita adattata $Z_2 = Z_{02} = 50 \, \Omega$ si avrà $a_2(0) = a_2(\lambda/8) = 0$ quindi

$$b_2(\lambda/8) = S_{21} \cdot a_1(\lambda/8) + \underbrace{S_{22} \cdot a_2(\lambda/8)}_{=0} \quad b_2(\lambda/8) = S_{21} \cdot a_1(\lambda/8)$$

$$S_{21} = 5 \angle 135^\circ \quad a_1(\lambda/8) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

$$b_2(\lambda/8) = 5 \angle 135^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 3,5355 \angle 90^\circ$$

$$b_2(0) = b_2(\lambda/8) e^{-j\frac{\pi}{4}} = 3,5355 \angle 90^\circ \cdot 1 \angle -45^\circ = 3,5355 \angle 45^\circ$$

$$P_2(0) = \frac{1}{2} |b_2(0)|^2 = \frac{1}{2} 3,5355^2 = 6,25 \, W \quad \boxed{P_2(0) = 6,25 \, W}$$