

Elettronica per le telecomunicazioni

AA 2014 - 2015

Parametri S

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

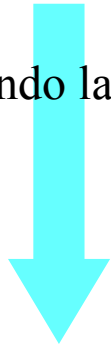
Notazioni e definizioni

Nelle equazioni già studiate per le linee

$$V(x) = A e^{-j\beta x} + B e^{j\beta x}$$

Introducendo la notazione

$$V^+(x) = A e^{-j\beta x} \quad V^-(x) = B e^{j\beta x}$$



$$V(x) = V^+(x) + V^-(x)$$

$$I(x) = \frac{A}{Z_0} e^{-j\beta x} - \frac{B}{Z_0} e^{j\beta x}$$

$$\Gamma(d) = \frac{B e^{-j\beta x}}{A e^{j\beta x}}$$



$$I(x) = I^+(x) - I^-(x) = \frac{V^+}{Z_0}(x) - \frac{V^-}{Z_0}(x)$$



$$\Gamma(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)}$$

Le notazioni normalizzate

$$v(x) = \frac{V(x)}{\sqrt{Z_0}}$$

Onda normalizzata di tensione

$$i(x) = I(x)\sqrt{Z_0}$$

Onda normalizzata di corrente

$$a(x) = \frac{V^+(x)}{\sqrt{Z_0}}$$

Intensità d'onda incidente normalizzata

$$b(x) = \frac{V^-(x)}{\sqrt{Z_0}}$$

Intensità d'onda riflessa normalizzata

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x)$$



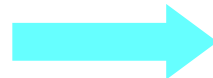
$$v(x) = a(x) + b(x)$$

$$I(x) = I^+(x) - I^-(x) = \frac{V^+}{Z_0}(x) - \frac{V^-}{Z_0}(x)$$



$$i(x) = a(x) - b(x)$$

$$\Gamma(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)}$$



$$b(x) = \Gamma(x) \bullet a(x)$$

$$i(x) = a(x) - b(x) \quad \Rightarrow \quad b(x) = a(x) - i(x)$$

$$v(x) = a(x) + b(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) = v(x) - a(x) + i(x) \quad \Rightarrow \quad 2a(x) = v(x) + i(x)$$

$$a(x) = \frac{1}{2} [v(x) + i(x)]$$

$$v(x) = \frac{V(x)}{\sqrt{Z_0}}$$

$$i(x) = I(x)\sqrt{Z_0}$$

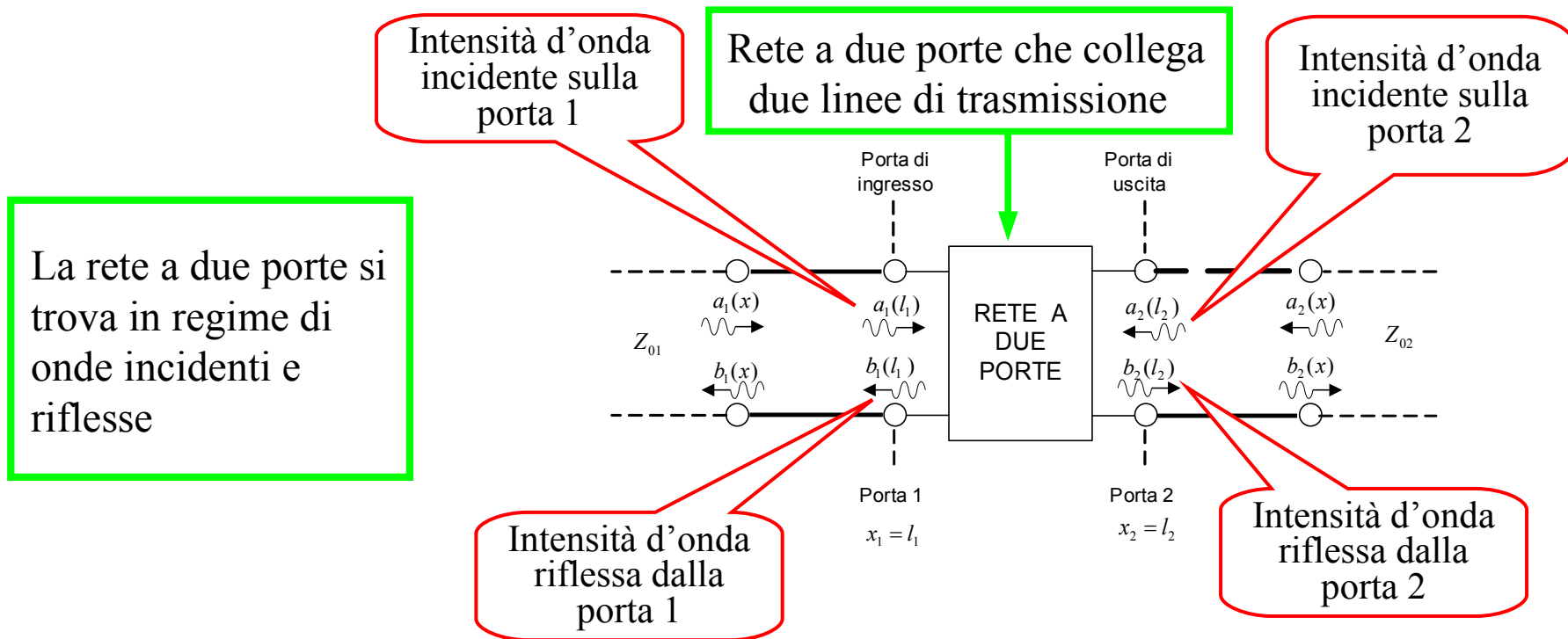
$$a(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{V(x)}{\sqrt{Z_0}} + I(x)\sqrt{Z_0} \right]$$

$$\Rightarrow a(x) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} [V(x) + I(x)Z_0]$$

Con lo stesso metodo si ricava

$$b(x) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} [V(x) - I(x)Z_0]$$

La rete a due porte, la matrice di diffusione



$$b(x) = \Gamma(x) \bullet a(x)$$



$$b_1(l_1) = S_{11}a_1(l_1) + S_{12}a_2(l_2)$$

$$b_2(l_2) = S_{21}a_1(l_1) + S_{22}a_2(l_2)$$

La rete a due porte, la matrice di diffusione

Rappresenta il contributo **all'onda riflessa** $b_1(l_1)$
provocata dall'onda incidente $a_1(l_1)$ **sulla porta 1.**

$$b_1(l_1) = S_{11}a_1(l_1) + S_{12}a_2(l_2)$$

Rappresenta il contributo **all'onda riflessa** $b_1(l_1)$
provocata dall'onda incidente $a_2(l_2)$ **sulla porta 2.**

Rappresenta il contributo **all'onda riflessa** $b_2(l_2)$
provocata dall'onda incidente $a_2(l_2)$ **sulla porta 2.**

$$b_2(l_2) = S_{21}a_1(l_1) + S_{22}a_2(l_2)$$

Rappresenta il contributo **all'onda riflessa** $b_2(l_2)$
provocata dall'onda incidente $a_1(l_1)$ **sulla porta 1.**

La matrice di diffusione, i parametri S

$$b_1(l_1) = S_{11}a_1(l_1) + S_{12}a_2(l_2) \quad b_2(l_2) = S_{21}a_1(l_1) + S_{22}a_2(l_2)$$



$$\begin{bmatrix} b_1(l_1) \\ b_2(l_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(l_1) \\ a_2(l_2) \end{bmatrix}$$

Questi parametri, che rappresentano i coefficienti di riflessione e di trasmissione, vengono chiamati *parametri di diffusione* (Scattering parameters = S parameters) della rete a due porte

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Matrice di diffusione

Nota: Fin qui non c'è un verso definito della rete/matrice

La matrice di diffusione, i parametri S

$$\begin{aligned} b_1(l_1) &= S_{11}a_1(l_1) + S_{12}a_2(l_2) \\ b_2(l_2) &= S_{21}a_1(l_1) + S_{22}a_2(l_2) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} b_1(l_1) \\ b_2(l_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(l_1) \\ a_2(l_2) \end{bmatrix}$$



$$S_{11} = \left. \frac{b_1(l_1)}{a_1(l_1)} \right|_{a_2(l_2)=0}$$

Coefficiente di **riflessione di ingresso** con la porta 2 terminata correttamente

$$S_{21} = \left. \frac{b_2(l_2)}{a_1(l_1)} \right|_{a_2(l_2)=0}$$

Coefficiente di **trasmissione in avanti** con la porta 2 terminata correttamente

$$S_{22} = \left. \frac{b_2(l_2)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0}$$

Coefficiente di **riflessione di uscita** con la porta 1 terminata correttamente

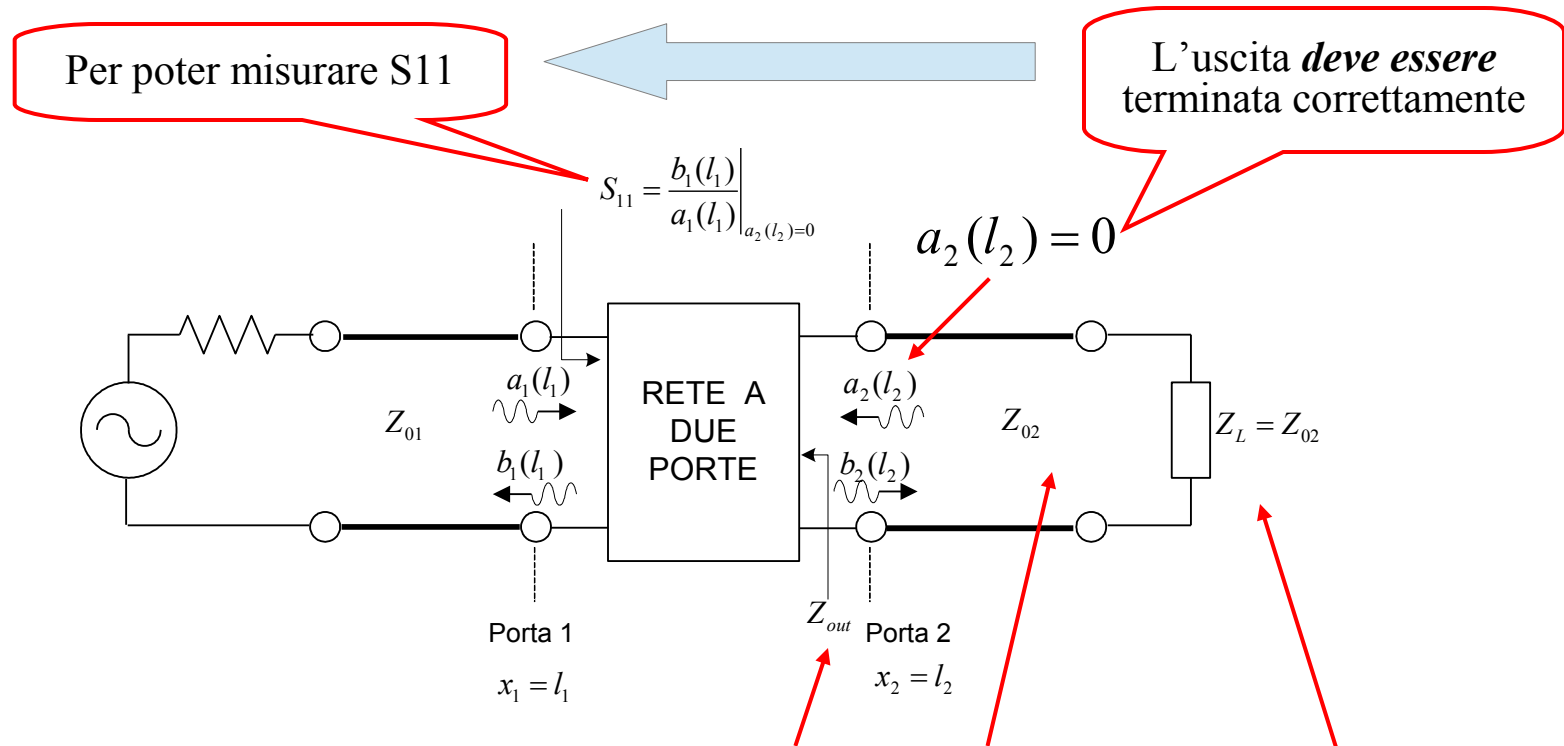
$$S_{12} = \left. \frac{b_1(l_1)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0}$$

Coefficiente di **trasmissione inverso** con la porta 1 terminata correttamente

Nota: Qui le due porte diventano ingresso e uscita

I parametri S, la misura

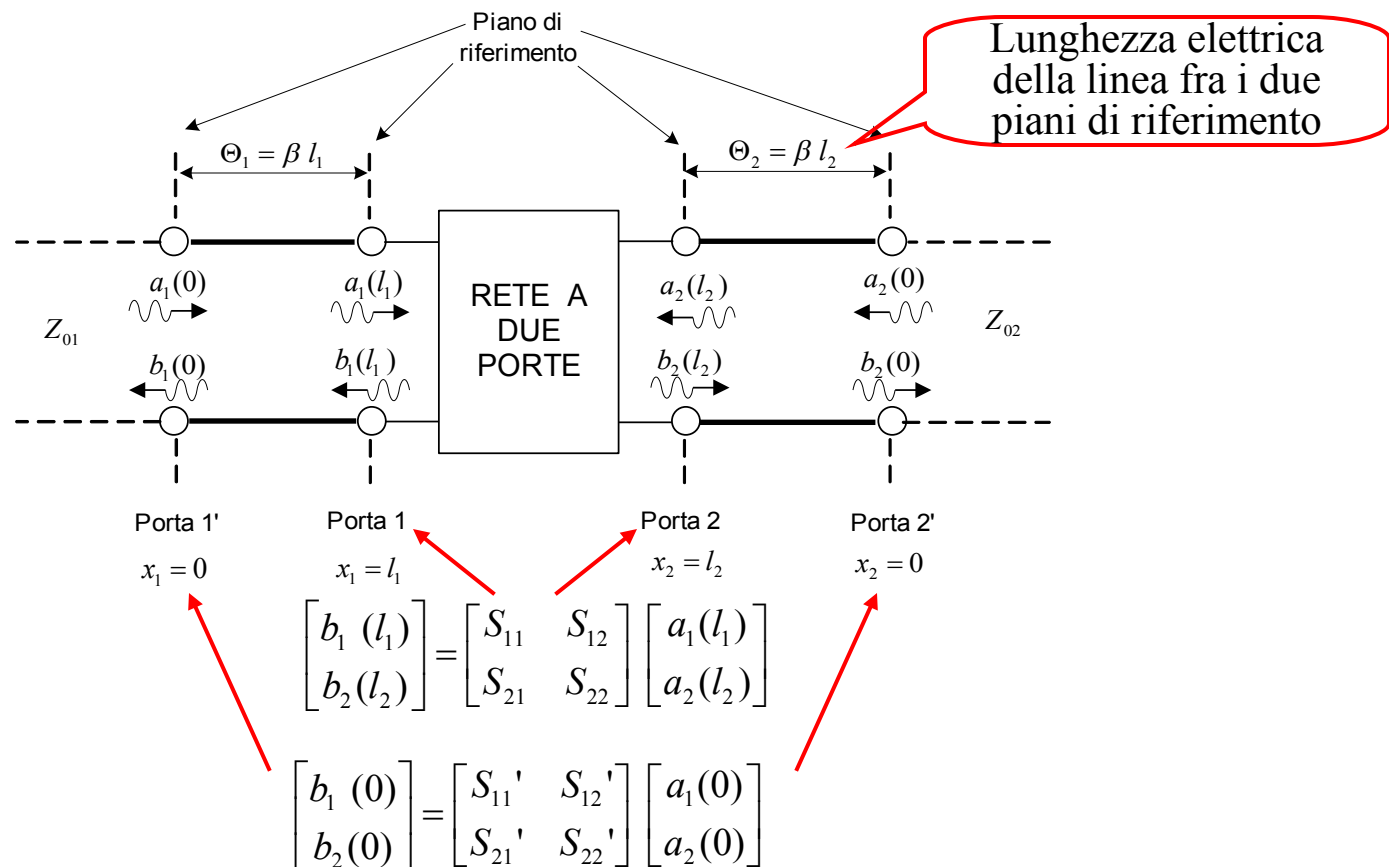
Il vantaggio nell'uso dei parametri S è che essi sono facilmente misurabili in condizioni di un opportuno **adattamento di impedenza**



Non è necessario che esista la condizione $Z_{out} = Z_{02}$ è sufficiente $Z_L = Z_{02}$

I parametri S, il piano di riferimento

Per fare la misura dei parametri S di un dispositivo (una rete a due porte) è necessario collegare la rete a una **linea di trasmissione**. Siccome i parametri S si basano sulla misura di onde che variano lungo la linea bisogna definire in che punto della linea viene fatta la misura. Questa posizione viene chiamata **piano di riferimento**.



I parametri S, il piano di riferimento

$$\begin{bmatrix} b_1(l_1) \\ b_2(l_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(l_1) \\ a_2(l_2) \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} b_1(l_1) = b_1(0) e^{j\Theta_1} \\ a_1(l_1) = a_1(0) e^{-j\Theta_1} \\ b_2(l_2) = b_2(0) e^{j\Theta_2} \\ a_2(l_2) = a_2(0) e^{-j\Theta_2} \end{cases}$$

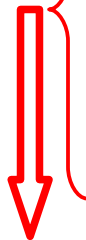
$e^{\pm j\Theta}$



$$\begin{bmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} e^{-j2\Theta_1} & S_{12} e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} \\ S_{21} e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} & S_{22} e^{-j2\Theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} b_1(0) \\ b_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} e^{-j2\Theta_1} & S_{12} e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} \\ S_{21} e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} & S_{22} e^{-j2\Theta_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} e^{j2\Theta_1} & S'_{12} e^{j(\Theta_1+\Theta_2)} \\ S'_{21} e^{j(\Theta_1+\Theta_2)} & S'_{22} e^{j2\Theta_2} \end{bmatrix}$$

Tiene conto della differenza di fase fra i due piani di riferimento

Linee prive di perdite !!!

Mettono in relazione i due piani di riferimento. E' dunque possibile ricavare i parametri S di una rete a 2 porte misurandoli ad una certa distanza dalle porte.

Le tensioni e le correnti lungo la linea

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x)$$

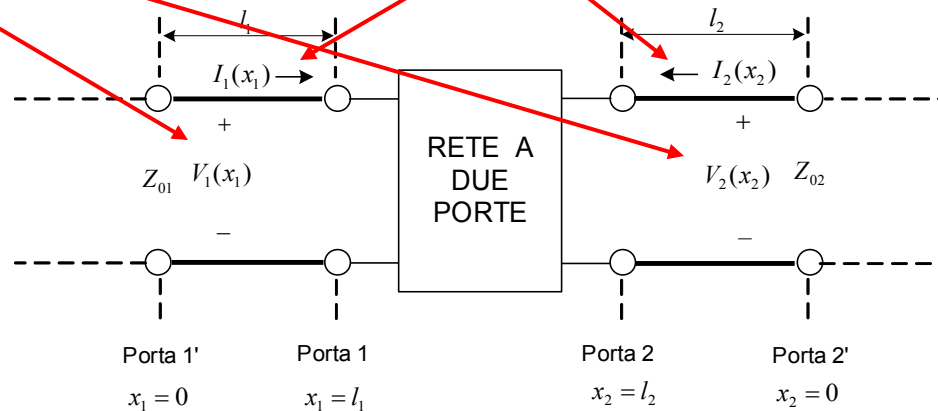
$$I(x) = \frac{V^+}{Z_0}(x) - \frac{V^-}{Z_0}(x)$$

$$V_i(x_i) = V_i^+(x_i) + V_i^-(x_i)$$

$$I_i(x_i) = I_i^+(x_i) - I_i^-(x_i) = \frac{V_i^+}{Z_{0_i}}(x_i) - \frac{V_i^-}{Z_{0_i}}(x_i)$$

1 o 2

Valore massimo



Per segnali sinusoidali

Per segnali sinusoidali

$$V_{i_rms}(x_i) = V_{i_rms}^+(x_i) + V_{i_rms}^-(x_i) \quad I_{i_rms}(x_i) = I_{i_rms}^+(x_i) - I_{i_rms}^-(x_i) = \frac{V_{i_rms}^+}{Z_{0i}}(x_i) - \frac{V_{i_rms}^-}{Z_{0i}}(x_i)$$

$$V_{i_rms}(x_i) = \frac{V_i(x_i)}{\sqrt{2}}$$

$$V_{i_rms}^+(x_i) = \frac{V_i^+(x_i)}{\sqrt{2}}$$

$$V_{i_rms}^-(x_i) = \frac{V_i^-(x_i)}{\sqrt{2}}$$

In condizioni di linee **senza perdite** e impedenza caratteristica **reale**

Le tensioni e le correnti lungo la linea

Usando le notazioni normalizzate

$$v_i(x_i) = \frac{V_i(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}}$$

$$i_i(x_i) = I_i(x_i) \sqrt{Z_{0i}}$$

$$a_i(x_i) = \frac{V_i^+(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} = I_i^+(x_i) \sqrt{Z_{0i}}$$

$$b_i(x_i) = \frac{V_i^-(x_i)}{\sqrt{Z_{0i}}} = I_i^-(x_i) \sqrt{Z_{0i}}$$

$$V_i(x_i) = V_i^+(x_i) + V_i^-(x_i)$$



$$v_i(x_i) = a_i(x_i) + b_i(x_i)$$

$$I_i(x_i) = I_i^+(x_i) - I_i^-(x_i) = \frac{V_i^+}{Z_{0_i}}(x_i) - \frac{V_i^-}{Z_{0_i}}(x_i)$$



$$i_i(x_i) = a_i(x_i) - b_i(x_i)$$



$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i)]$$

$$b_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) - Z_{0i} I_i(x_i)]$$

Intensità d'onda
incidente sulla porta
i esima

Intensità d'onda
riflessa dalla porta *i*
esima

Impedenza
caratteristica della
linea di
trasmissione

La potenza delle onde incidenti e riflesse

La potenza media associata **all'onda incidente** sulla porta *i esima*, può essere espressa da

$$P_i^+(0) = \text{Re} \left[V_{i_rms}^+(0) (I_{i_rms}^+(0))^* \right] \quad \Rightarrow \quad P_i^+(0) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[V_i^+(0) (I_i^+(0))^* \right]$$

$$P_i^+(0) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[V_i^+(0) \left(\frac{V_i^+(0)}{Z_{0i}} \right)^* \right] \quad \Rightarrow \quad P_i^+(0) = \frac{1}{2} \frac{|V_i^+(0)|^2}{Z_{0i}}$$

$$P_i^+(0) = \frac{1}{2} |a_i(0)|^2 = |a_{i_rms}(0)|^2$$

Similmente la potenza media riflessa

$$P_i^-(0) = \text{Re} \left[V_{i_rms}^-(0) (I_{i_rms}^-(0))^* \right] \quad \Rightarrow \quad P_i^-(0) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[V_i^-(0) (I_i^-(0))^* \right]$$

$$P_i^-(0) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[V_i^-(0) \left(\frac{V_i^-(0)}{Z_{0i}} \right)^* \right] \quad \Rightarrow \quad P_i^-(0) = \frac{1}{2} \frac{|V_i^-(0)|^2}{Z_{0i}}$$

$$P_i^-(0) = \frac{1}{2} |b_i(0)|^2 = |b_{i_rms}(0)|^2$$

La potenza delle onde incidenti e riflesse

Si considera la linea priva di perdite

$$P_i^+(0) = P_i^+(l_i)$$



$$\frac{1}{2}|a_i(0)|^2 = \frac{1}{2}|a_i(x_i)|^2$$

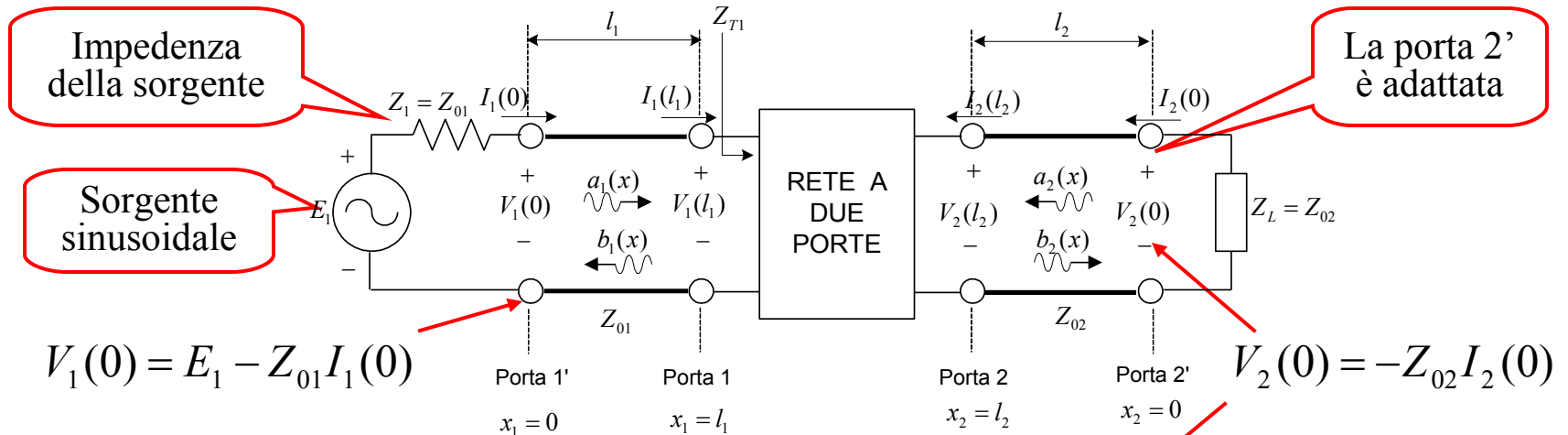
$$P_i^-(0) = P_i^-(l_i)$$



$$\frac{1}{2}|b_i(0)|^2 = \frac{1}{2}|b_i(x_i)|^2$$

In quanto si ha la stessa potenza
in qualsiasi punto della linea.

La porta di ingresso pilotata con una sorgente sinusoidale



$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i)] \quad \Rightarrow \quad a_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}} [V_2(0) + Z_{02} I_2(0)]$$

$$a_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}} [-Z_{02} I_2(0) + Z_{02} I_2(0)] = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2(0) = 0$$

$$a_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [V_1(0) + Z_{01} I_1(0)] \quad a_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [(E_1 - Z_{01} I_1(0)) + Z_{01} I_1(0)] \quad a_1(0) = \frac{E_1}{2\sqrt{Z_{01}}}$$

$$P_i^+(0) = \frac{1}{2} |a_i(0)|^2 = |a_{i_rms}(0)|^2 \quad \Rightarrow \quad P_1^+(0) = \frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{01}}$$

$|a_1(0)|^2 = \frac{|E_1|^2}{4Z_{01}}$

La porta di ingresso pilotata con una sorgente sinusoidale, la potenza disponibile

$$P_1^+(0) = \frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{01}}$$

Il significato di questa espressione è che la potenza dell'onda incidente rappresenta la potenza disponibile dalla sorgente E_1 con impedenza interna

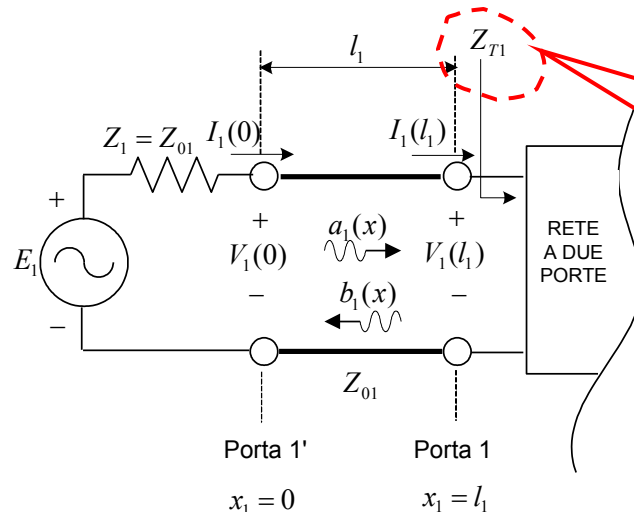
$$Z_1 = Z_{01}$$

Viene definita come potenza disponibile dalla sorgente ed essendo la linea priva di perdite

$$P_{AVS} = \frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{2} |a_1(l_1)|^2$$

Potenza disponibile alla porta 1

(AVS = Available from the Source)



La potenza **disponibile** alla porta 1 non dipende dall'impedenza di ingresso della porta


Se si verifica la condizione $Z_1 \neq Z_{01}$




~~$$P_1^+(0) = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{01}}$$~~

$$\frac{1}{2} |a_1(0)|^2 \neq \frac{1}{2} |a_1(l_1)|^2$$


$$P_1^+(0) = \frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{01}} = \frac{E_1 E_1^*}{8 Z_{01}} \leftarrow E_1 = V_1(0) + Z_{01} I_1(0)$$



$$\frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{E_1 E_1^*}{8 Z_{01}} = \frac{[V_1(0) + Z_{01} I_1(0)][V_1(0) + Z_{01} I_1(0)]^*}{8 Z_{01}}$$

$$\frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{8 Z_{01}} \left[|V_1(0)|^2 + Z_{01} I_1(0) V_1^*(0) + Z_{01} I_1^*(0) V_1(0) + Z_{01}^2 |I_1(0)|^2 \right]$$


$$b_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) - Z_{0i} I_i(x_i)] \rightarrow b_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [V_1(0) - Z_{01} I_1(0)]$$



$$\frac{1}{2} |b_1(0)|^2 = \frac{1}{8 Z_{01}} \left[|V_1(0)|^2 - Z_{01} I_1(0) V_1^*(0) - Z_{01} I_1^*(0) V_1(0) + Z_{01}^2 |I_1(0)|^2 \right]$$

$$\frac{1}{2}|a_1(0)|^2 = \frac{1}{8Z_{01}} \left[|V_1(0)|^2 + Z_{01}I_1(0)V_1^*(0) + Z_{01}I_1^*(0)V_1(0) + Z_{01}^2|I_1(0)|^2 \right]$$

$$\frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{8Z_{01}} \left[|V_1(0)|^2 - Z_{01}I_1(0)V_1^*(0) - Z_{01}I_1^*(0)V_1(0) + Z_{01}^2|I_1(0)|^2 \right]$$

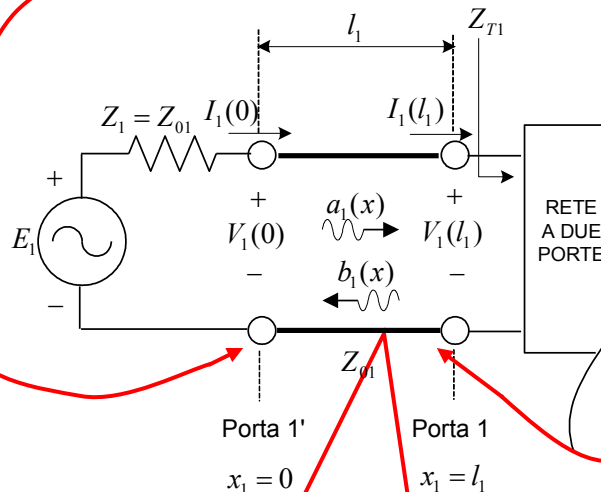
Sottraendo la
seconda dalla
prima

$$\frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{4} \left[I_1(0)V_1^*(0) + I_1^*(0)V_1(0) \right]$$

$$\frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{2} \text{Re} \left[I_1(0)V_1^*(0) \right]$$

Potenza
complessa

Potenza
fornita alla
porta 1'



Potenza
fornita alla
porta 1

Linea priva di perdite

$$\frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{2}\text{Re}[I_1(0)V_1^*(0)] \quad \Rightarrow \quad P_1(0) = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2$$

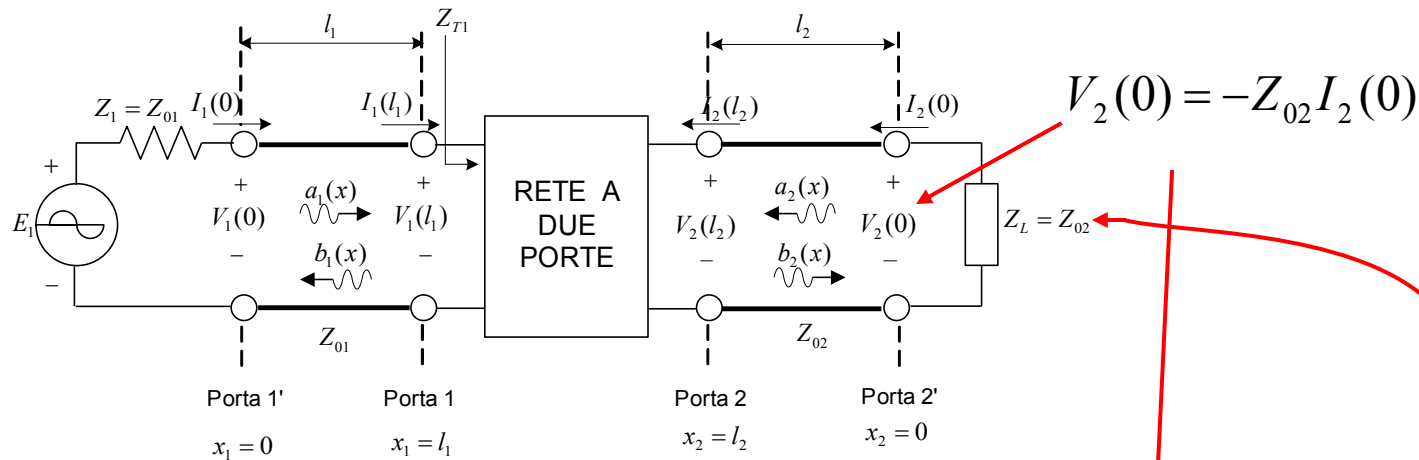
$$\frac{1}{2}|b_1(0)|^2 = \frac{1}{2}|a_1(0)|^2 - P_1(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}|b_1(0)|^2 &= P_{AVS} - P_1(0) \\ \frac{1}{2}|b_1(l_1)|^2 &= P_{AVS} - P_1(l_1) \end{aligned}$$

Potenza riflessa dalla porta 1
Linea priva di perdite

Potenza netta fornita alla porta 1

$$P_1(0) = P_1(l_1) = P_{AVS} - \frac{1}{2}|b_1(0)|^2$$

La potenza fornita al carico



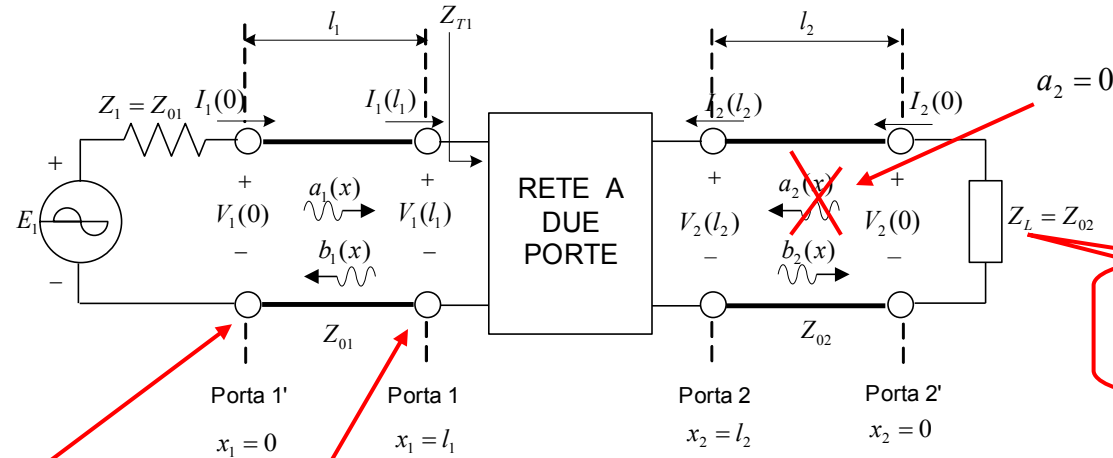
$$b_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) - Z_{0i} I_i(x_i)] \quad \Rightarrow \quad b_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}} [V_2(0) - Z_{02} I_2(0)]$$

$$b_2(0) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}} [-Z_{02} I_2(0) - Z_{02} I_2(0)] \quad \Rightarrow \quad b_2(0) = -\sqrt{Z_{02}} I_2(0)$$

$$\frac{1}{2} |b_2(0)|^2 = \frac{1}{2} |I_2(0)|^2 Z_{02} \quad \Rightarrow \quad P_2(0) = \frac{1}{2} |b_2(0)|^2$$

Potenza
fornita al
carico

Il calcolo dei parametri S, S₁₁



$$S_{11} = \left. \frac{b_1(l_1)}{a_1(l_1)} \right|_{a_2(l_2)=0} = \left. \frac{V_1^-(l_1)}{V_1^+(l_1)} \right|_{V_2^+(l_2)=0}$$

$$S_{11} = \frac{Z_{T1} - Z_{01}}{Z_{T1} + Z_{01}}$$

$$S'_{11} \rightarrow \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} e^{-j2\Theta_1} & S_{12} e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} \\ S_{21} e^{-j(\Theta_1+\Theta_2)} & S_{22} e^{-j2\Theta_2} \end{bmatrix} \rightarrow S'_{11} = S_{11} e^{-j2\Theta_1}$$

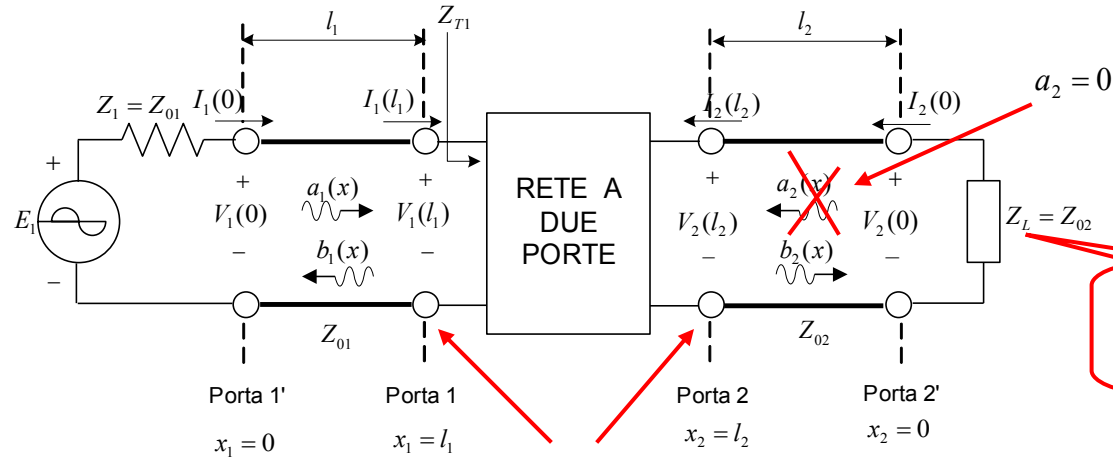
$$\frac{1}{2} |b_1(0)|^2 = P_{AVS} - P_1(0)$$

$$|S_{11}|^2 = \left. \frac{|b_1(l_1)|^2}{|a_1(l_1)|^2} \right|_{a_2(l_2)=0} \rightarrow |S_{11}|^2 = \frac{P_{AVS} - P_1(l_1)}{P_{AVS}} \Leftrightarrow P_1(l_1) = P_1(0) = P_{AVS} (1 - |S_{11}|^2)$$

$$P_{AVS} = \frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{2} |a_1(l_1)|^2$$

Se $|S_{11}| > 1 \dots$

Il calcolo dei parametri S, S_{21}



Il carico è adattato

Notazione normalizzate

$$b_i(x_i) = I_i^-(x_i) \sqrt{Z_{0i}}$$

$$a_i(x_i) = I_i^+(x_i) \sqrt{Z_{0i}}$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2(l_2)}{a_1(l_1)} \right|_{a_2(l_2)=0}$$

$$S_{21} = \left. \frac{\sqrt{Z_{02}} I_2^-(l_2)}{\sqrt{Z_{01}} I_1^+(l_1)} \right|_{I_2^+(l_2)=0}$$

$$S_{21} = \left. \frac{-\sqrt{Z_{02}} I_2(l_2)}{\sqrt{Z_{01}} I_1^+(l_1)} \right|_{I_2^+(l_2)=0}$$

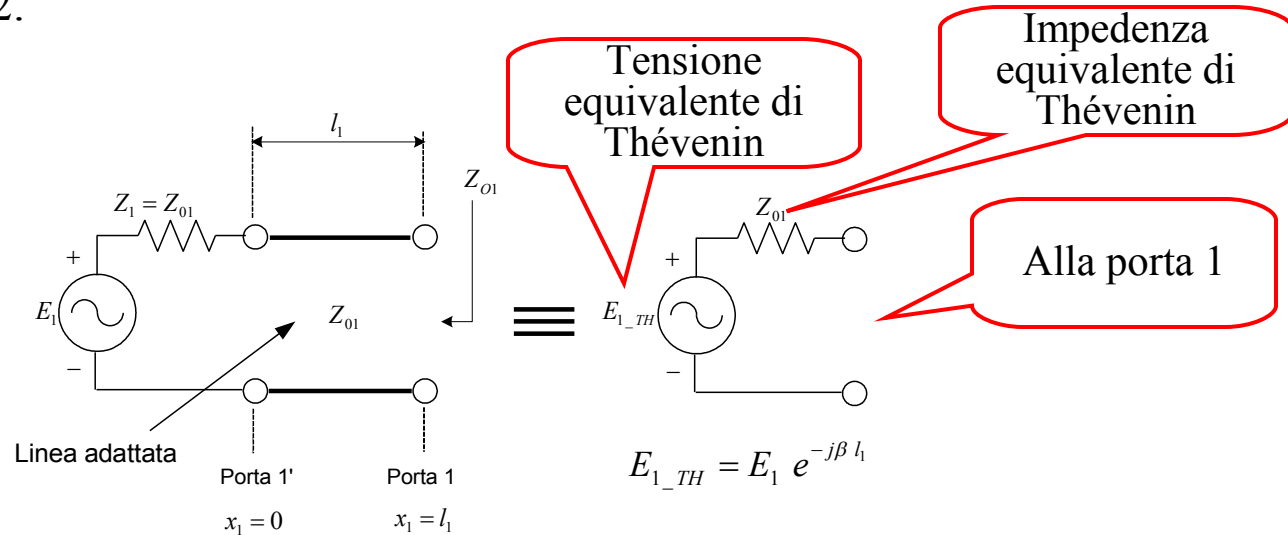
$$I_2(l_2) = I_2^+(l_2) - I_2^-(l_2)$$

$$I_2^+(l_2) = 0$$

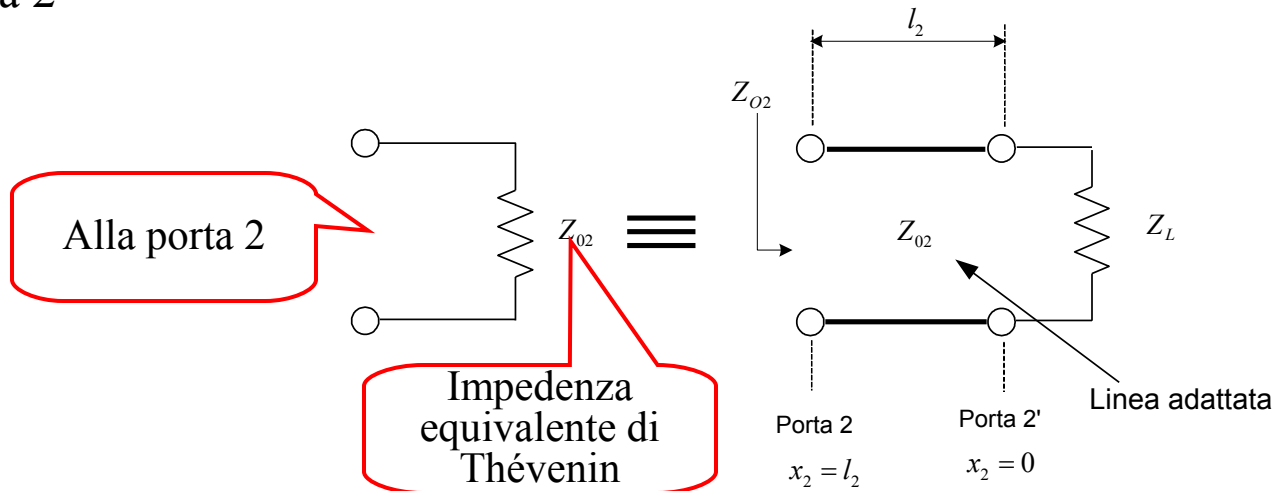
$$I_2(l_2) = -I_2^-(l_2)$$

Non è pratico ricavare S_{21} dai valore di corrente, si può ricavare in un modo più semplice, per farlo si modificherà il modello applicando il teorema di Thevenin alle porte 1 e 2.

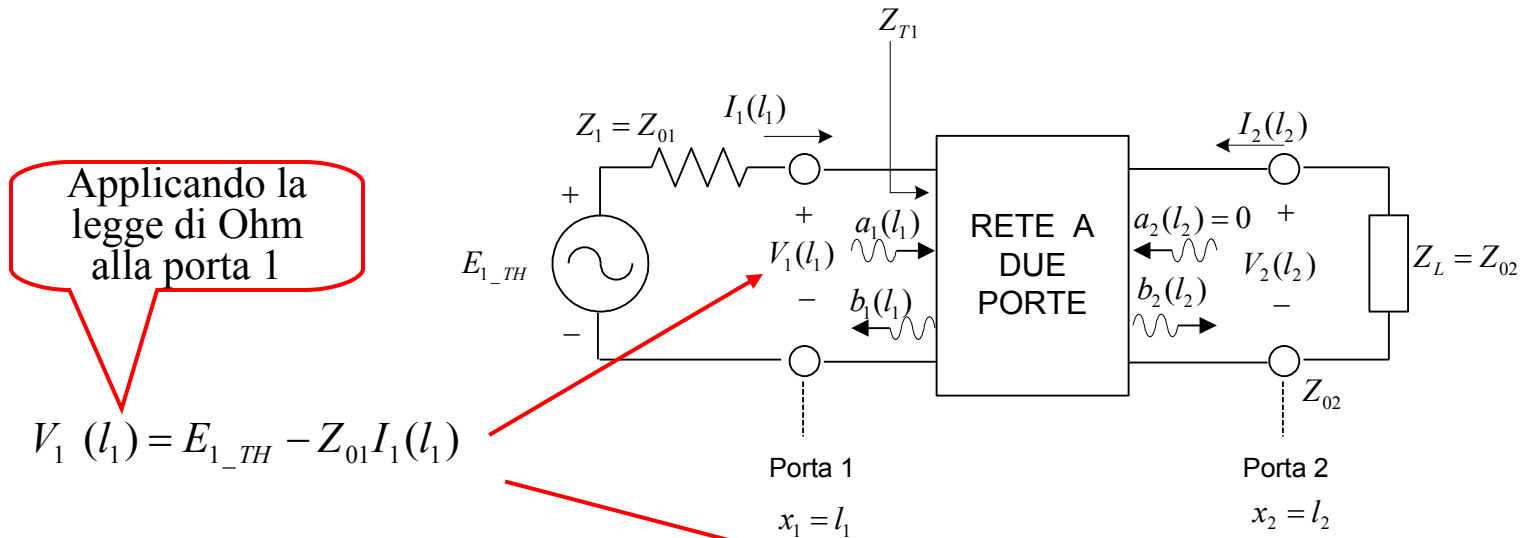
Porta 1



Porta 2



La rete equivalente di Thevenin



$$V_1(l_1) = E_{1_TH} - Z_{01} I_1(l_1)$$

$$a_i(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{0i}}} [V_i(x_i) + Z_{0i} I_i(x_i)]$$

$$a_1(l_1) = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}}} [V_1(l_1) + Z_{01} I_1(l_1)]$$

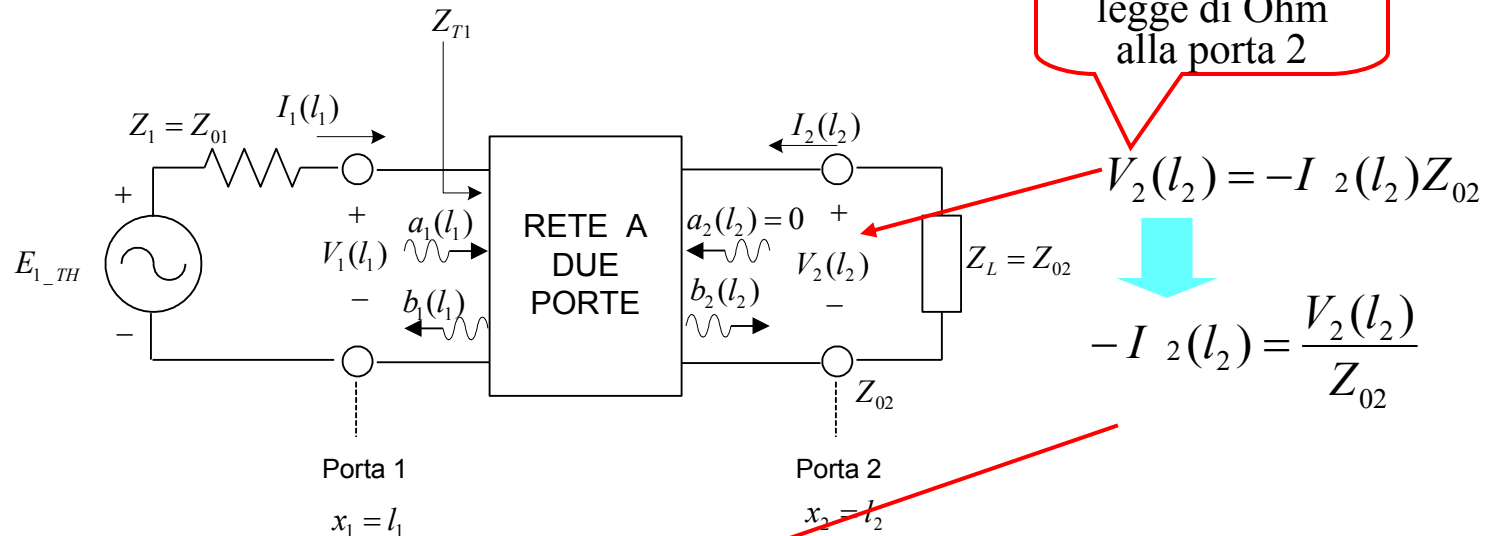
$$a_1(l_1) = \sqrt{Z_{01}} I^+_1(l_1)$$

Per definizione

$$I^+_1(l_1) = \frac{1}{2Z_{01}} [V_1(l_1) + Z_{01} I_1(l_1)]$$

$$I^+_1(l_1) = \frac{E_{1_TH}}{2Z_{01}}$$

La rete equivalente di Thevenin



$$I_1^+(l_1) = \frac{E_{1_TH}}{2Z_{01}} \quad S_{21} = \left. \frac{-\sqrt{Z_{02}}I_2(l_2)}{\sqrt{Z_{01}}I_1^+(l_1)} \right|_{I_2^+(l_2)=0} \quad \Rightarrow \quad S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} \frac{V_2(l_2)}{E_{1_TH}}$$

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} \frac{V_2(l_2)}{E_{1_TH}} \rightarrow |S_{21}|^2$$

$$|S_{21}|^2 = \frac{4Z_{01}}{Z_{02}} \frac{|V_2(l_2)|^2}{|E_{1_TH}|^2} = \frac{\frac{1}{2} \frac{|V_2(l_2)|^2}{Z_{02}}}{\frac{1}{8} \frac{|E_{1_TH}|^2}{Z_{01}}}$$

P_L , potenza fornita al carico Z_{02}

$$P_i^+(0) = \frac{1}{2} \frac{|V_i^+(0)|^2}{Z_{0i}}$$

$$P_1^+(0) = \frac{1}{2} |a_1(0)|^2 = \frac{1}{8} \frac{|E_1|^2}{Z_{01}}$$

P_{AVS} , potenza disponibile dalla sorgente E_{1_TH}

$$|S_{21}|^2 = \frac{P_L}{P_{AVS}} \rightarrow |S_{21}|^2 = G_T$$

Guadagno di trasduzione

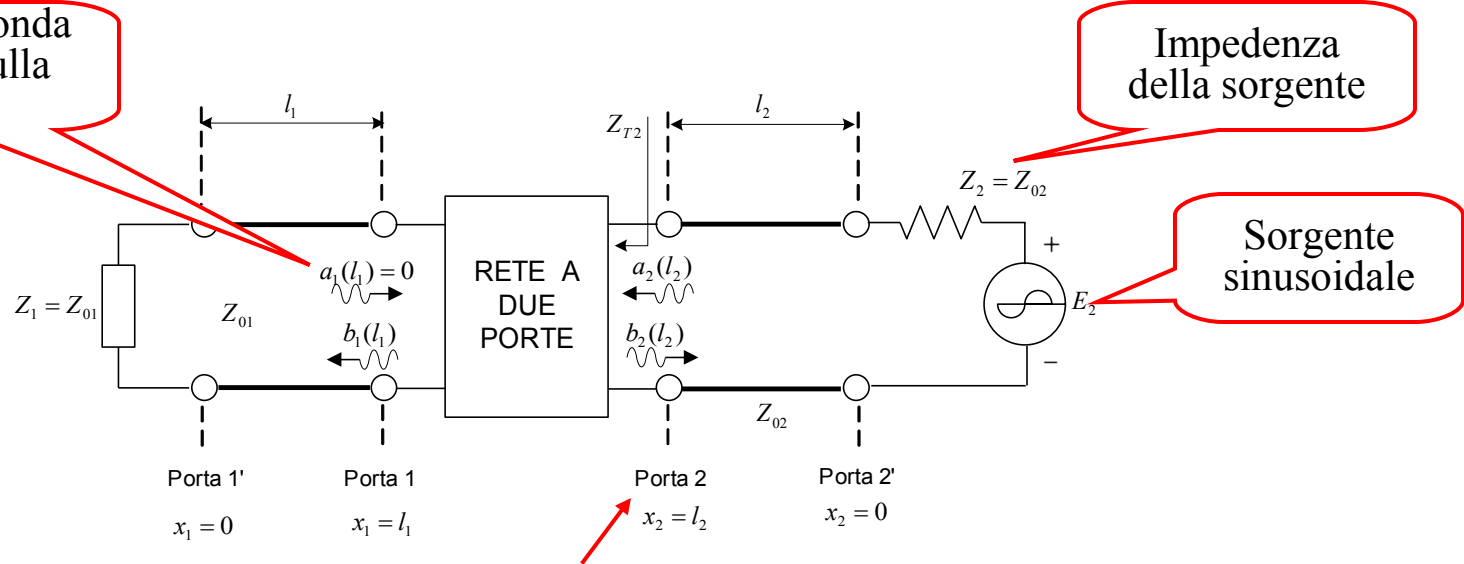
Guadagno di trasduzione nella condizione $Z_1 = Z_2 = Z_0$

Se $Z_1 = Z_2 = Z_0$

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} \frac{V_2(l_2)}{E_{1_TH}} \rightarrow S_{21} = \frac{V_2(l_2)}{\frac{E_{1_TH}}{2}}$$

$$G_T = |S_{21}|^2 = \left| \frac{V_2(l_2)}{\frac{E_{1_TH}}{2}} \right|^2$$

Il calcolo dei parametri S, S_{22} e S_{12}



$$S_{22} = \left. \frac{b_2(l_2)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0} \rightarrow S_{22} = \frac{Z_{T2} - Z_{02}}{Z_{T2} + Z_{02}}$$

S_{12} si ottiene rifacendo l'analisi per la porta 2 come per la porta 1

$$S_{12} = \left. \frac{b_1(l_2)}{a_2(l_2)} \right|_{a_1(l_1)=0} \rightarrow S_{12} = \frac{2\sqrt{Z_{02}}V_1(l_1)}{\sqrt{Z_{01}}E_{2_TH}}$$

Coefficiente di trasmissione inverso

$$|S_{22}|^2$$

Rappresenta il rapporto della potenza riflessa dalla porta 2 con la potenza disponibile alla porta 2. Se la potenza riflessa sarà maggiore di quella disponibile alla porta 2 si avrà una condizione di oscillazione.

$$|S_{22}|^2 > 1$$

$$S_{12} = \frac{2\sqrt{Z_{02}}V_1(l_1)}{\sqrt{Z_{01}}E_{2_TH}}$$



$$|S_{12}|^2$$



$$|S_{12}|^2 = \frac{\frac{1}{2} \frac{|V_1(l_1)|^2}{Z_{01}}}{\frac{|E_{2_TH}|^2}{8Z_{02}}}$$

Guadagno (di
potenza) di
trasduzione inverso