

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

### Introduzione

Se un amplificatore a RF o a microonde viene usato per amplificare segnali piccoli il suo comportamento può essere considerato lineare, esso può essere rappresentato come una rete a due porte caratterizzata tramite i parametri S. (Figura 1)

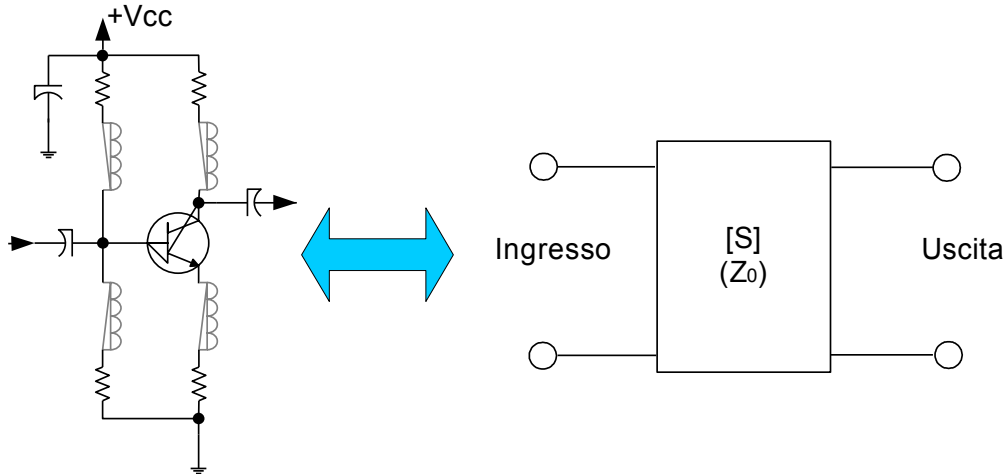


Figura 1

La caratteristica fondamentale di un amplificatore è il **guadagno**, per derivare le espressioni del guadagno la rete a due porte (l'amplificatore) viene connessa in un circuito come quello di Figura 2.

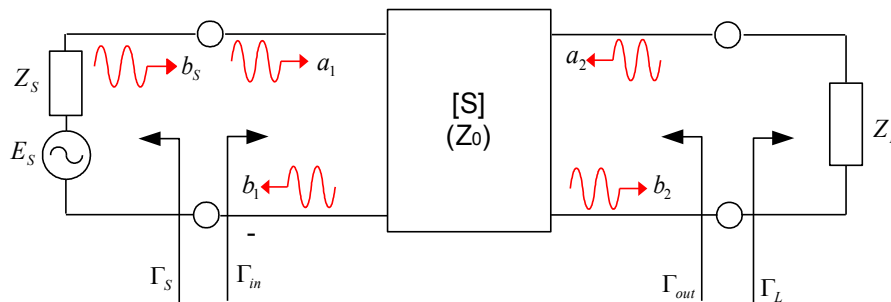


Figura 2

I coefficienti di riflessione della sorgente e del carico sono

$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \quad (1)$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (2)$$

le onde incidenti e riflesse relative alla porta di ingresso ed alla porta di uscita all'uscita dell'amplificatore sono quelle di una rete a due porte inserite in una linea di trasmissione di impedenza caratteristica  $Z_0$  e sono espresse dalle

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \quad (3)$$

e

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad (4)$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

In una rete a due porte come quella di Figura 2 i concetti di coefficiente di riflessione e di onda che si sposta lungo la linea di trasmissione possono essere usati anche se non esiste una linea di trasmissione connessa alla porta 1 ed alla porta 2 della rete.

I coefficienti di riflessione  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_L$  e le onde che si spostano lungo la linea  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  e  $b_2$ , sono rispettivamente i coefficienti di riflessione e le onde che sono presenti quando le porte 1 e 2 sono connesse ad una linea di trasmissione vera e propria. Si può immaginare che questi coefficienti di riflessione e queste onde viaggianti si riferiscono a delle linee di trasmissione, connesse alle porte 1 e 2, di impedenza caratteristica  $Z_0$  e di lunghezza zero.

### Il coefficiente di riflessione della porta di ingresso

Il coefficiente di riflessione di ingresso è dato dal rapporto

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$$

rapporto che può essere calcolato nel seguente modo. Dato che

$$a_2 = \Gamma_L b_2 \quad (5)$$

si può sostituire questa espressione nella 4 e si ha

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}\Gamma_L b_2$$

che risolta per  $b_2$  diventa

$$b_2 = \frac{S_{21}a_1}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad (6)$$

Sostituendo la 5 e la 6 nella 3 si ha

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}\Gamma_L b_2 = S_{11}a_1 + S_{12}\Gamma_L \frac{S_{21}a_1}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$

mettendo in evidenza  $a_1$  e tenendo conto che  $\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$  si ottiene

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{21}S_{12}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad (7)$$

oppure

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{21}S_{12}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} = \frac{S_{11} - S_{11}S_{22}\Gamma_L + S_{21}S_{12}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad \Delta = S_{11}S_{22} + S_{21}S_{12}$$

$$\Gamma_{in} = \frac{S_{11} - \Delta\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad (8)$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

### Il coefficiente di riflessione della porta di uscita

Il coefficiente di riflessione di uscita è definito dalla

$$\Gamma_{out} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{E_S=0}$$

Se  $E_S = 0$  ne consegue che

$$a_1 = \Gamma_S b_1 \quad (9)$$

Sostituendo la 9 nella 3

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 = S_{11}\Gamma_S b_1 + S_{12}a_2$$

che risolta per  $b_1$

$$b_1 = \frac{S_{12}a_2}{1 - S_{11}\Gamma_S} \quad (10)$$

Quindi sostituendo la 9 e la 10 nella 4 si ottiene

$$b_2 = S_{21}\Gamma_S \frac{S_{12}a_2}{1 - S_{11}\Gamma_S} + S_{22}a_2 = \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_S a_2}{1 - S_{11}\Gamma_S} + S_{22}a_2$$

mettendo in evidenza  $a_2$  si ricava  $\Gamma_{out}$

$$\Gamma_{out} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{E_S=0} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_S}{1 - S_{11}\Gamma_S} \quad (11)$$

oppure

$$\begin{aligned} \Gamma_{out} &= S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_S}{1 - S_{11}\Gamma_S} = \frac{S_{22} - S_{22}S_{11}\Gamma_S + S_{12}S_{21}\Gamma_S}{1 - S_{11}\Gamma_S} \\ \Gamma_{out} &= \frac{S_{22} - \Delta\Gamma_S}{1 - S_{11}\Gamma_S} \end{aligned} \quad (12)$$

### Il circuito del generatore e le potenze relative

Prima di proseguire con le considerazioni che portano alla derivazione del guadagno è opportuno studiare il comportamento del circuito del generatore o di una qualsiasi sorgente di potenza connessa alla porta di ingresso della rete a due porte. Se il generatore è connesso ad un carico adattato,  $\Gamma_{in} = 0$ , esso emette un'onda  $b_S$ . Se invece ci trova con una condizione di carico (del generatore) non perfettamente adattato le condizioni sono diverse, come messo in evidenza dalla Figura 3, dove la prima onda incidente è  $b_S$ , questa viene riflessa come  $b_S\Gamma_{in}$ , la quale viene ancora riflessa come  $b_S\Gamma_{in}\Gamma_S$  e così via.

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

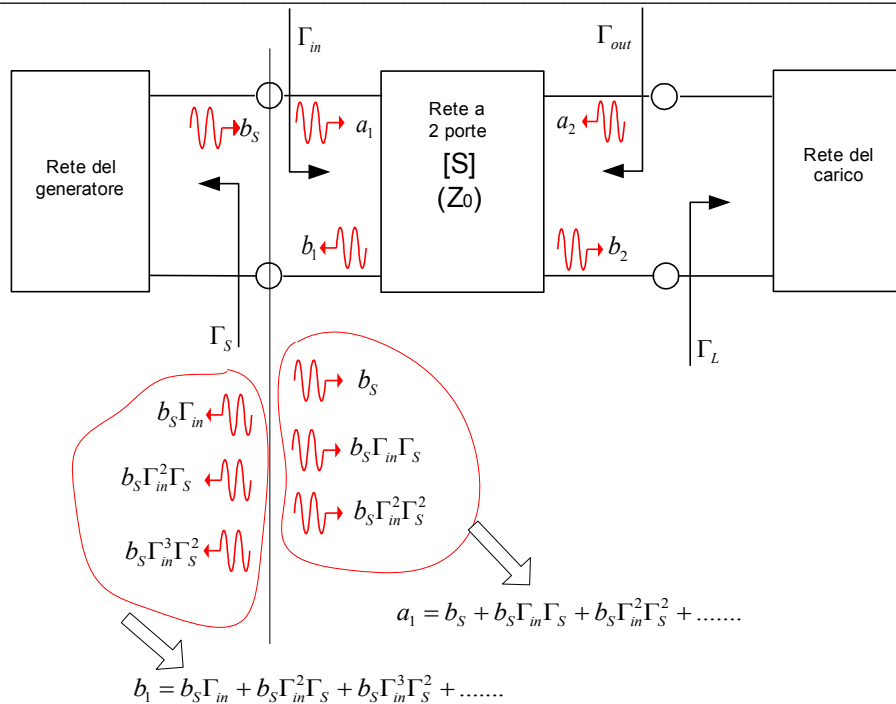


Figura 3

La somma delle onde riflesse e dirette verso il generatore sarà

$$b_1 = b_s \Gamma_{in} + b_s \Gamma_{in}^2 \Gamma_S + b_s \Gamma_{in}^3 \Gamma_S^2 + \dots$$

$$b_1 = b_s \Gamma_{in} \left[ 1 + \Gamma_{in} \Gamma_S + (\Gamma_{in} \Gamma_S)^2 + \dots \right] \quad (13)$$

la funzione relativa alla serie è (Nota 1)

$$b_1 = \frac{b_s \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in} \Gamma_S} \quad (14)$$

considerando che  $\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$  si ha

$$b_1 = \frac{b_s \frac{b_1}{a_1}}{1 - \frac{b_1}{a_1} \Gamma_S} = \frac{b_s b_1}{a_1 - b_1 \Gamma_S} \quad b_1 = \frac{b_s b_1}{a_1 - b_1 \Gamma_S} \quad (15)$$

oppure

$$a_1 = b_s + b_1 \Gamma_S \quad (16)$$

Il significato di questa relazione è che, se non c'è riflessione da parte del generatore, l'onda incidente sulla porta di ingresso,  $a_1$ , del dispositivo a due porte è uguale a all'onda fornita del generatore,  $b_s$ .

Le stesse espressioni si possono ricavare dalla

$$a_1 = b_s + b_s \Gamma_{in} \Gamma_S + b_s \Gamma_{in}^2 \Gamma_S^2 + \dots \quad (17)$$

la funzione relativa alla serie è

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

$$a_1 = \frac{b_s}{1 - \Gamma_{in} \Gamma_s} \quad (18)$$

ponendo  $\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$  si ha

$$a_1 = \frac{b_s}{1 - \Gamma_{in} \Gamma_s} = \frac{b_s}{1 - \frac{b_1}{a_1} \Gamma_s} = \frac{b_s}{\frac{a_1 - b_1 \Gamma_s}{a_1}} = \frac{a_1 b_s}{a_1 - b_1 \Gamma_s} \quad \Rightarrow \quad a_1 = b_s + b_1 \Gamma_s \quad (19)$$

La **potenza fornita alla porta di ingresso** dell'amplificatore (tenendo conto  $\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$ ) è data dalla

$$P_{in} = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2 = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2) \quad (20)$$

Sostituendo la 18 nella 20 si ottiene

$$P_{in} = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2) = \frac{1}{2} \left| \frac{b_s}{1 - \Gamma_s \Gamma_{in}} \right|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2)$$

$$P_{in} = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1 - |\Gamma_{in}|^2}{|1 - \Gamma_s \Gamma_{in}|^2} \quad (21)$$

La **potenza disponibile dalla sorgente** è la potenza che può fornire il generatore, alla porta di ingresso, quando si verifica la condizione  $\Gamma_{in} = \Gamma_s^*$ , sarà uguale alla potenza di ingresso.

Con  $\Gamma_{in} = \Gamma_s^*$  la 21 diventa

$$P_{AVS} = P_{in}|_{\Gamma_{in}=\Gamma_s^*} = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1 - |\Gamma_s^*|^2}{|1 - \Gamma_s \Gamma_s^*|^2} \quad \text{semplificando}$$

$$P_{AVS} = P_{in}|_{\Gamma_{in}=\Gamma_s^*} = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1}{1 - |\Gamma_s|^2} \quad (22)$$

Sostituendo la 22 nella 21

$$P_{in} = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1 - |\Gamma_{in}|^2}{|1 - \Gamma_s \Gamma_{in}|^2} = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{1 - |\Gamma_s|^2} \frac{1 - |\Gamma_{in}|^2}{|1 - \Gamma_s \Gamma_{in}|^2}$$

$$P_{in} = P_{AVS} \frac{(1 - |\Gamma_s|^2)(1 - |\Gamma_{in}|^2)}{|1 - \Gamma_s \Gamma_{in}|^2} \quad (23)$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

L'equazione 23 si può riscrivere

$$P_{in} = P_{AVS} M_S \quad (24)$$

dove

$$M_S = \frac{(1 - |\Gamma_S|^2)(1 - |\Gamma_{in}|^2)}{|1 - \Gamma_S \Gamma_{in}|^2} \quad (25)$$

Il fattore  $M_S$  viene definito come il **fattore di disadattamento della sorgente**. Questo fattore è utile per quantizzare la porzione di  $P_{AVS}$  che viene fornita all'ingresso dello stadio amplificatore.

Da notare che se si verifica la condizione  $\Gamma_{in} = \Gamma_S^*$  si ha

$$M_S = 1$$

ne consegue che

$$P_{in} = P_{AVS}$$

Il circuito del generatore e della porta di ingresso può anche essere descritto come in Figura 4

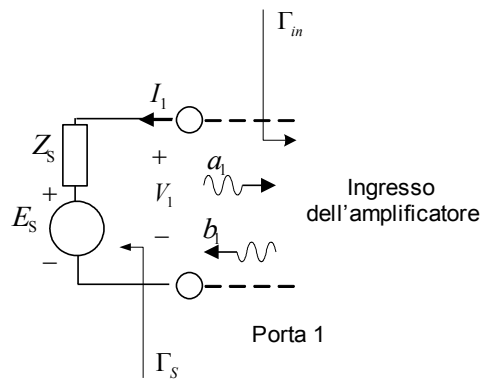


Figura 4

si ha

$$V_1 = E_S + I_1 Z_S \quad (26)$$

che in termini di onde può essere riscritta come segue

$$V_1^+ + V_1^- = E_S + \left( \frac{V_1^+}{Z_0} - \frac{V_1^-}{Z_0} \right) Z_S \quad (26 a)$$

oppure come la 19

$$a_1 = b_s + \Gamma_S b_1 \quad (19)$$

dove

$$a_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}} \quad b_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}} \quad b_s = \frac{E_S \sqrt{Z_0}}{Z_S + Z_0} \quad \Gamma_S = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} \quad (\text{Nota 2})$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

### Il circuito del carico e le potenze relative

La porta di uscita della rete a due porte può essere considerato come un generatore equivalente di Thevenin (Figura 5).

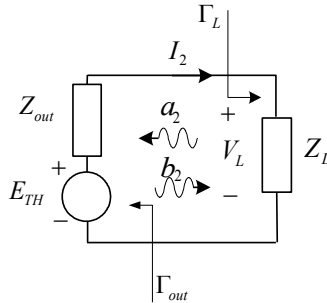


Figura 5

Si possono fare tutte le considerazioni già fatte per il circuito di ingresso. Se il generatore equivalente di Thevenin è connesso ad un carico adattato,  $\Gamma_L = 0$ , esso emette un'onda  $b_{TH}$ , se invece si trova in una situazione di carico non perfettamente adattato, come messo in evidenza dalla Figura 6, si avrà la prima onda incidente,  $b_{TH}$ , che viene riflessa come  $b_{TH}\Gamma_L$ , la quale viene riflessa come  $b_{TH}\Gamma_{out}\Gamma_L$  e così via.

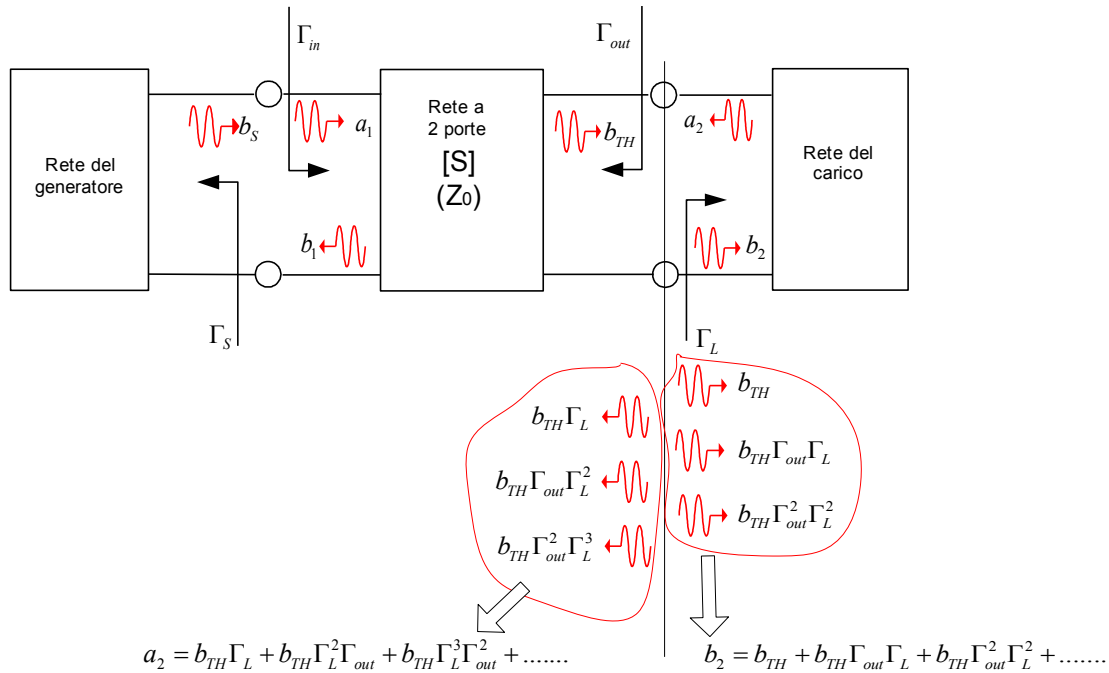


Figura 6

La somma delle onde riflesse e quindi dirette verso il carico sarà

$$b_2 = b_{TH} + b_{TH}\Gamma_{out}\Gamma_L + b_{TH}\Gamma_{out}^2\Gamma_L^2 + \dots \quad (27)$$

la funzione relativa alla serie è

$$b_2 = \frac{b_{TH}}{1 - \Gamma_{out}\Gamma_L} \quad (28)$$

considerando che  $\Gamma_L = \frac{a_2}{b_2}$  si ha anche

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

$$b_2 = \frac{b_{TH}}{1 - \frac{a_2}{b_2} \Gamma_{out}} = \frac{b_{TH}}{\frac{b_2 - a_2 \Gamma_{out}}{b_2}} = \frac{b_2 b_{TH}}{b_2 - a_2 \Gamma_{out}} \Rightarrow b_2 = b_{TH} + a_2 \Gamma_{out} \quad (29)$$

La potenza fornita al carico  $Z_L$  è

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2 = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |\Gamma_L b_2|^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) \quad (30)$$

Sostituendo la 28 nella 30 si ottiene

$$P_L = \frac{1}{2} \left| \frac{b_{TH}}{1 - \Gamma_{out} \Gamma_L} \right|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_{TH}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2} \quad (31)$$

La potenza fornibile dalla rete a due porte al carico,  $P_{AVN}$ , è uguale alla potenza che può essere fornita al carico quando  $\Gamma_L = \Gamma_{out}^*$ .

Con  $\Gamma_L = \Gamma_{out}^*$  la 31 diventa

$$P_{AVN} = P_L|_{\Gamma_L = \Gamma_{out}^*} = \frac{1}{2} |b_{TH}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2} = \frac{1}{2} |b_{TH}|^2 \frac{1 - |\Gamma_{out}^*|^2}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_{out}^*|^2} = \frac{1}{2} |b_{TH}|^2 \frac{1 - |\Gamma_{out}^*|^2}{|1 - |\Gamma_{out}|^2|^2}$$

$$P_{AVN} = \frac{1}{2} |b_{TH}|^2 \frac{1}{1 - |\Gamma_{out}|^2} \quad (32)$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_{TH}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2} = \frac{1}{2} |b_{TH}|^2 \frac{1 - |\Gamma_{out}|^2}{1 - |\Gamma_{out}|^2} \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2}$$

Sostituendo la 32 nella 31 si ottiene una espressione di  $P_L$  in funzione di  $P_{AVN}$

$$P_L = P_{AVN} \frac{(1 - |\Gamma_{out}|^2)(1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2} \quad (33)$$

L'equazione 33 può essere riscritta nella forma

$$P_L = P_{AVN} M_L \quad (34)$$

dove

$$M_L = \frac{(1 - |\Gamma_{out}|^2)(1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2} \quad (35)$$

Da notare la rassomiglianza fra la 35 e la 25.



## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

Il fattore  $M_L$  viene definito come **fattore di disadattamento del carico** e serve per quantizzare la porzione di  $P_{AVN}$  che viene fornita al carico.

Se si verifica la condizione  $\Gamma_L = \Gamma_{out}^*$  si ha che

$$M_L = 1$$

ne consegue che

$$P_L = P_{AVN} .$$

Questa condizione si esprime nella forma

$$P_L = P_{AVN} \Big|_{\Gamma_L = \Gamma_{out}^*}$$

Applicando la legge di Ohm al circuito della Figura 5 si ha

$$V_L = E_{TH} - Z_{out} I_L$$

che in termini di onde può essere riscritta come la 29

$$b_2 = b_{TH} + \Gamma_{out} a_2 \quad (29)$$

dove

$$b_2 = \frac{V_L^-}{\sqrt{Z_0}} \quad a_2 = \frac{V_L^+}{\sqrt{Z_0}} \quad b_{TH} = \frac{E_{TH} \sqrt{Z_0}}{Z_{out} + Z_0} \quad \Gamma_{out} = \frac{Z_{out} - Z_0}{Z_{out} + Z_0}$$

(Nota 2)

**Il guadagno, di potenza  $G_P$ , disponibile  $G_A$ , di trasduzione  $G_T$**

Il guadagno di potenza  $G_P = \frac{P_L}{P_{in}}$  è il rapporto fra la potenza dissipata nel carico  $Z_L$  e la potenza fornita alla porta di ingresso della rete a due porte .

Il guadagno disponibile  $G_A = \frac{P_{AVN}}{P_{AVS}}$  è il rapporto fra la potenza disponibile all'uscita della rete a due porte e la potenza disponibile dal generatore.

Il guadagno di trasduzione  $G_T = \frac{P_L}{P_{AVS}}$  è il rapporto fra la potenza dissipata nel carico  $Z_L$  e la potenza fornibile dal generatore.

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

Il **guadagno di potenza** sarà dato dalla  $G_P = \frac{P_L}{P_{in}}$

Usando la 20 e la 30 il guadagno di potenza  $G_P$  diventa

$$G_P = \frac{P_L}{P_{in}} = \frac{\frac{1}{2}|b_2|^2}{\frac{1}{2}|a_1|^2} \frac{(1-|\Gamma_L|^2)}{(1-|\Gamma_{in}|^2)} \quad (36)$$

Quindi sostituendo la 6  $b_2 = \frac{S_{21}a_1}{1-S_{22}\Gamma_L}$  nella 36 si ottiene

$$G_P = \frac{P_L}{P_{in}} = \frac{\frac{1}{2} \left| \frac{S_{21}a_1}{1-S_{22}\Gamma_L} \right|^2}{\frac{1}{2}|a_1|^2} \frac{(1-|\Gamma_L|^2)}{(1-|\Gamma_{in}|^2)} \quad G_P = \frac{P_L}{P_{in}} = \frac{\frac{1}{2}|a_1|^2|S_{21}|^2(1-|\Gamma_L|^2)}{|1-S_{22}\Gamma_L|^2} \frac{1}{\frac{1}{2}|a_1|^2(1-|\Gamma_{in}|^2)}$$

semplificando

$$G_P = \frac{1}{(1-|\Gamma_{in}|^2)} |S_{21}|^2 \frac{1-|\Gamma_L|^2}{|1-S_{22}\Gamma_L|^2} \quad (37)$$

Il **guadagno totale di trasduzione** sarà da

$$G_T = \frac{P_L}{P_{AVS}} = \frac{P_L}{P_{in}} \frac{P_{in}}{P_{AVS}} = G_P \frac{P_{in}}{P_{AVS}} \quad (38)$$

Il rapporto  $\frac{P_{in}}{P_{AVS}}$  è  $M_S$  (dalla 24) per cui la 38 si può riscrivere

$$G_T = G_P M_S \quad (39)$$

Sostituendo la 25 e la 37 nella 39 si ottiene

$$G_T = \frac{(1-|\Gamma_S|^2)(1-|\Gamma_{in}|^2)}{|1-\Gamma_S\Gamma_{in}|^2} \frac{1}{(1-|\Gamma_{in}|^2)} |S_{21}|^2 \frac{1-|\Gamma_L|^2}{|1-S_{22}\Gamma_L|^2}$$

semplificando

$$G_T = \frac{1-|\Gamma_S|^2}{|1-\Gamma_S\Gamma_{in}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1-|\Gamma_L|^2}{|1-S_{22}\Gamma_L|^2} \quad (40)$$

con alcuni passaggi algebrici si ottiene anche la seguente espressione (Nota 3)

$$G_T = \frac{1-|\Gamma_S|^2}{|1-\Gamma_S S_{11}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1-|\Gamma_L|^2}{|1-\Gamma_{out}\Gamma_L|^2} \quad (40 a)$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

Nel caso ci ritrovi nella **condizione di unilateralità** cioè con  $S_{12} = 0$  si avrà che  $\Gamma_{in} = S_{11}$  e  $\Gamma_{out} = S_{22}$  in queste condizioni il guadagno si definisce come **guadagno di trasduzione unilaterale**,

$$\text{■ } G_{TU} = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - S_{11}\Gamma_S|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_L|^2} \quad (41)$$

Il **guadagno di trasduzione unilaterale massimo** si ha quando  $\Gamma_S = S_{11}^*$  e  $\Gamma_L = S_{22}^*$

$$G_{TU\_max} = \frac{1 - |S_{11}^*|^2}{|1 - S_{11}S_{11}^*|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |S_{22}^*|^2}{|1 - S_{22}S_{22}^*|^2} = \frac{1 - |S_{11}^*|^2}{|1 - |S_{11}^*|^2|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |S_{22}^*|^2}{|1 - |S_{22}^*|^2|^2} = \frac{1}{1 - |S_{11}^*|^2} |S_{21}|^2 \frac{1}{1 - |S_{22}^*|^2}$$

$$G_{TU\_max} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} \quad (42)$$

Un caso speciale del **guadagno di trasduzione** si ha quando, sia la porta di uscita che quella di ingresso, sono terminate con l'impedenza di sistema  $Z_0$ , quindi  $\Gamma_S = 0$  e  $\Gamma_L = 0$ . Il guadagno sarà

$$G_{T\_Z_0} = |S_{21}|^2 \Big|_{\Gamma_L=\Gamma_S=0} \quad (43)$$

Il **guadagno disponibile** può essere espresso dalla

$$G_A = \frac{P_{AVN}}{P_{AVS}} = \frac{P_L}{P_{AVS}} \frac{P_{AVN}}{P_L} = \frac{G_T}{M_L}$$

Quindi usando la 35 e la 40a si può riscrivere l'espressione  $G_A$  nella forma

$$G_A = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_S S_{11}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2} \frac{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2}{(1 - |\Gamma_{out}|^2)(1 - |\Gamma_L|^2)}$$

semplificando

$$G_A = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_S S_{11}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1}{1 - |\Gamma_{out}|^2} \quad (44)$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

Uno stadio amplificatore può essere rappresentato da uno schema a blocchi come in Figura 7.

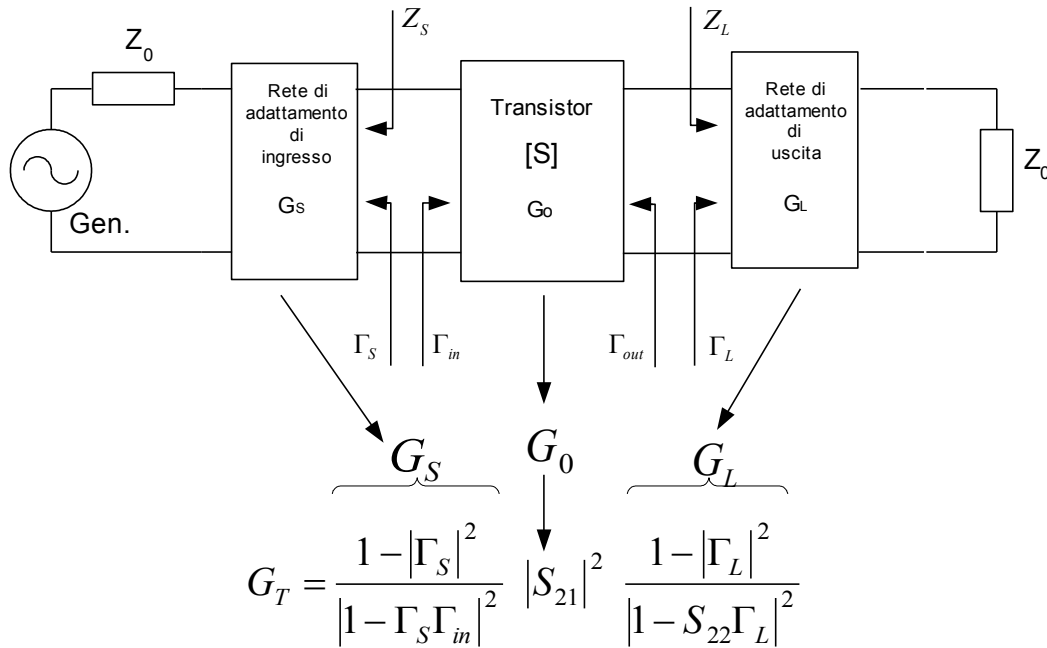


Figura 7

Nello schema a blocchi sono inserite le due reti di adattamento di impedenza di ingresso e di uscita, in modo da trasformare le impedenze di sistema, del generatore e del carico,  $Z_0$ , nelle impedenze  $Z_S$  e  $Z_L$  che la rete a due porte vede.

L'espressione del guadagno più utile è quella del guadagno di trasduzione in quanto tiene conto del disadattamento di ingresso e di uscita. Partendo dalla definizione di guadagno di trasduzione appena derivata si possono definire i guadagni delle reti di adattamento.

La 40 può essere vista come composta da tre termini distinti  $G_T = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_S \Gamma_{in}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22} \Gamma_L|^2}$

- Il primo termine dipende dal parametro  $S_{11}$  del dispositivo attivo e dal coefficiente di riflessione della sorgente  $\Gamma_S$ ,

$$G_S = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_S \Gamma_{in}|^2} \quad (45)$$

- Il secondo termine  $G_0 = |S_{21}|^2$  dipende dal dispositivo attivo,
- Il terzo termine dipende dal parametro del dispositivo attivo  $S_{22}$  e dal coefficiente di riflessione del carico  $\Gamma_L$ .

$$G_L = \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22} \Gamma_L|^2} \quad (46)$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

Il guadagno di trasduzione complessivo sarà

$$G_T = G_S G_0 G_L \quad (47)$$

Può anche essere espresso in dB

$$G_{T\_dB} = G_{S\_dB} + G_{0\_dB} + G_{L\_dB} \quad (47\ a)$$

L'amplificatore può essere quindi rappresentato da **tre differenti blocchi** ciascuno dei quali può rappresentare un guadagno oppure una perdita. I termini  $G_S$  e  $G_L$  rappresentano il guadagno o la perdita provocate dalle reti di adattamento.

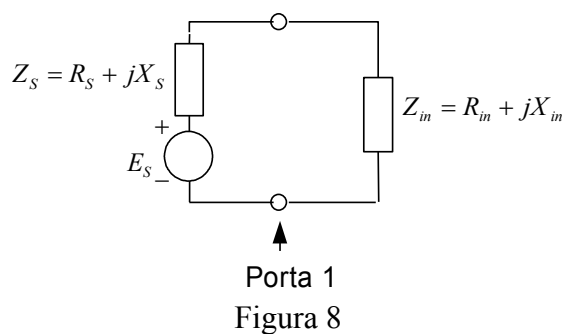
Il termine  $G_S$  indica il grado di adattamento fra  $\Gamma_S$  e  $S_{11}$ . Quantunque  $G_S$  sia un blocco funzionale composto solamente da componenti passivi esso dà comunque un contributo al guadagno, che può essere maggiore di uno. La ragione di questo guadagno sta nel fatto che esiste un disadattamento intrinseco fra  $Z_0$  e  $S_{11}$  e quindi il fatto di ridurre questo disadattamento equivale a realizzare un guadagno.

Similmente il termine  $G_L$  si riferisce alla rete di adattamento di uscita e può essere visto come un guadagno di questo blocco funzionale se riesce a ridurre il disadattamento.

E' interessante approfondire sul significato dei **fattori di disadattamento**  $M_S$  e  $M_L$ .

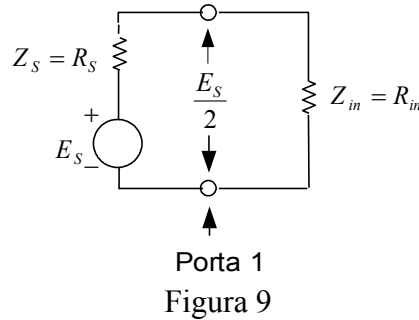
Dalla relazione 24  $P_{in} = P_{AVS} M_S$  si vede che il fattore  $M_S$  mette in relazione la potenza di ingresso,  $P_{in}$ , con la potenza disponibile dalla sorgente,  $P_{AVS}$ .

Se consideriamo il solo circuito di ingresso, composto dal generatore e dall'impedenza delle rete a due porte, si può disegnare un circuito come quello di figura 8.



## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

In condizioni di adattamento il circuito di Figura 8 diventa come quello di Figura 9 dove  $R_S = R_{in}$



Considerando che nel calcolo della potenza si considera il valore efficace della tensione, si avrà che la potenza disponibile da parte del generatore sarà

$$P_{AVS} = \frac{\left| \frac{E_S}{2\sqrt{2}} \right|^2}{R_S} \quad \rightarrow \quad P_{AVS} = \frac{1}{8} \frac{|E_S|^2}{R_S} \quad (48)$$

mentre la potenza di ingresso sarà

$$P_{in} = \frac{1}{2} \left| \frac{E_S}{Z_S + Z_{in}} \right|^2 R_{in} = \frac{1}{8} \frac{|E_S|^2}{R_S} \left( \frac{4 R_S R_{in}}{|Z_S + Z_{in}|^2} \right) = P_{AVS} \underbrace{\left( \frac{4 R_S R_{in}}{|Z_S + Z_{in}|^2} \right)}_{M_S} \quad (49)$$

Da cui

$$M_S = \frac{4 R_S R_{in}}{|Z_S + Z_{in}|^2} \quad (50)$$

Non è evidente, ma la 50 e la 25 sono la stessa espressione, per provarlo si usa l'impedenza normalizzata  $Z_0$

$$Z_S = Z_0 \frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s}$$

La parte reale di  $Z_S$  si può scrivere nel modo seguente

$$R_S = \frac{1}{2} (Z_S + Z_S^*) = \frac{Z_0}{2} \left[ \frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s} + \frac{1 + \Gamma_s^*}{1 - \Gamma_s^*} \right] = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_s|^2}{1 - |\Gamma_s|^2} \quad (51)$$

nello stesso modo si può esprimere la parte reale di  $Z_{in}$  che diventa

$$R_{in} = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_{in}|^2}{1 - |\Gamma_{in}|^2} \quad (52)$$

Sostituendo la 51 e la 52 nella 50 e con alcune manipolazioni si ottiene

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

$$M_S = \frac{4 R_S R_{in}}{|Z_S + Z_{in}|^2} = \frac{(1 - |\Gamma_S|^2)(1 - |\Gamma_{in}|^2)}{|1 - \Gamma_S \Gamma_{in}|^2}$$

Per la porta di uscita si può fare lo stesso ragionamento fatto per quella di ingresso, figura 10 e

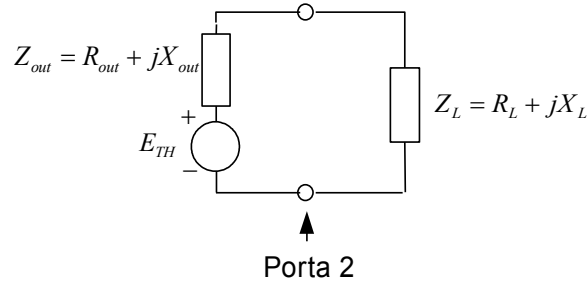


Figura 10

e si ottiene il fattore  $M_L$

$$M_L = \frac{4 R_L R_{out}}{|Z_L + Z_{out}|^2} \quad (53)$$

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

### Note

#### Nota 1

Lo sviluppo in serie della funzione  $\frac{1}{1-x}$  è  $x = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

#### Nota 2

Tenendo conto che in una linea

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x) \quad I(x) = \frac{V^+(x)}{Z_0} - \frac{V^-(x)}{Z_0}$$

la  $V_1 = E_s + I_1 Z_s$  può essere riscritta

$$V_1^+ + V_1^- = E_s + \left( \frac{V_1^+}{Z_0} - \frac{V_1^-}{Z_0} \right) Z_s \quad V_1^+ + V_1^- = E_s + \frac{V_1^+ Z_s - V_1^- Z_s}{Z_0}$$

$$V_1^+ Z_0 + V_1^- Z_0 = E_s Z_0 + V_1^+ Z_s - V_1^- Z_s$$

si mette in evidenza  $V_1^-$

$$V_1^- Z_0 + V_1^- Z_s = E_s Z_0 + V_1^+ Z_s - V_1^+ Z_0 \quad V_1^- (Z_0 + Z_s) = E_s Z_0 + V_1^+ (Z_s - Z_0)$$

$$V_1^- = \frac{E_s Z_0}{(Z_0 + Z_s)} + V_1^+ \frac{(Z_s - Z_0)}{(Z_0 + Z_s)} \quad \text{moltiplicando per } \frac{1}{\sqrt{Z_0}}$$

$$\frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}} = \frac{E_s Z_0}{(Z_0 + Z_s)} \frac{1}{\sqrt{Z_0}} + \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}} \frac{(Z_s - Z_0)}{(Z_0 + Z_s)} \quad \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}} = \frac{E_s Z_0}{(Z_0 + Z_s)} \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt{Z_0}} + \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}} \frac{(Z_s - Z_0)}{(Z_0 + Z_s)}$$

$$\frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}} = \frac{E_s \sqrt{Z_0}}{(Z_0 + Z_s)} + \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}} \frac{(Z_s - Z_0)}{(Z_0 + Z_s)}$$

dove

$$a_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_0}} \quad b_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}} \quad b_s = \frac{E_s \sqrt{Z_0}}{Z_s + Z_0} \quad \Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$$

quindi è equivalente alla 19

$$a_1 = b_s + \Gamma_s b_1$$



## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

---

### Nota 3

Sostituendo la

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad \text{nella 40} \quad G_T = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_S\Gamma_{in}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_L|^2}$$

l'espressione del guadagno di trasduzione può essere riscritta come segue

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_S|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - S_{22}\Gamma_L|^2 \left| 1 - \left( S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \Gamma_S \right) \right|^2} = \frac{(1 - |\Gamma_S|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - S_{22}\Gamma_L|^2 \left| \frac{1 - S_{22}\Gamma_L - S_{11}\Gamma_S(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_L\Gamma_S}{1 - S_{22}\Gamma_L} \right|^2}$$

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_S|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|1 - S_{22}\Gamma_L - S_{11}\Gamma_S(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_L\Gamma_S|^2}$$

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_S|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{22}\Gamma_L)(1 - S_{11}\Gamma_S) - S_{12}S_{21}\Gamma_L\Gamma_S|^2}$$

L'equazione esprime il guadagno in funzione di tutti e quattro i parametri S, dopo alcune manipolazioni sul denominatore si può riscrivere così

$$G_T = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_S\Gamma_{in}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_{out}\Gamma_L|^2}$$

---

### Riferimenti

*Guillermo Gonzalez*, **Microwave Transistor Amplifiers** (Analysis & Design) , Second Edition, Prentice Hall.

*Gorge D. Vendelin, Anthony M. Pavio, Ulrich L. Rohde*; **Microwave Circuit Design** (Using Linear and nonlinear techniques), John Willey & sons.

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

### Appendice:

### Il guadagno di trasduzione unilaterale massimo

#### Problema

Data la funzione complessa

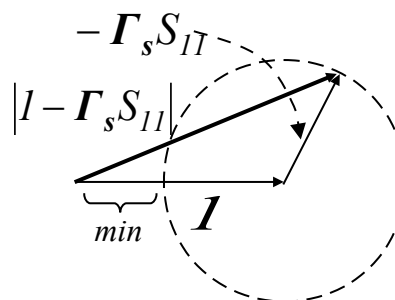
$$G = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - \Gamma_s S_{II}|^2}$$

trovare per quale valore di  $\Gamma_s$  essa è massima.

#### Soluzione

Attenzione:

- $\Gamma_s$  e  $S_{II}$  sono quantità complesse di modulo minore o uguale a 1. Pertanto la soluzione va cercata all'interno della circonferenza di raggio unitario del piano complesso.
- Il numeratore non è influenzato dalla fase di  $\Gamma_s$ . Per ogni valore di  $|\Gamma_s|$ , esiste uno o più valori della sua fase  $\varphi_s$  che rende minimo il denominatore (e quindi rende massimo  $G$ )
- Il denominatore è pari al modulo al quadrato del vettore evidenziato nella seguente figura:



- Esso è minimo quando la fase di  $\Gamma_s$  è pari a quella di  $S_{II}$ , cambiata di segno:  
 $\varphi_s = -\arg(S_{II})$
- Non resta che ottimizzare il modulo di  $\Gamma_s$ .

## Appunti sul guadagno di potenza di un amplificatore RF

---

Tenendo conto che, con la condizione sulla fase, il termine  $\Gamma_s S_{II}$  è reale e positivo ed è pari a  $|\Gamma_s| |S_{II}|$ , la funzione  $G$  diventa:

$$G = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - \Gamma_s S_{II}|^2} = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{(1 - |\Gamma_s| |S_{II}|)^2}$$

Si tratta ora di massimizzarla in funzione di  $|\Gamma_s|$ . Il numeratore della derivata di  $G$  rispetto a  $|\Gamma_s|$  (che bisogna imporre sia uguale a zero) è:

$$-2|\Gamma_s| (1 - |\Gamma_s| |S_{II}|)^2 + 2(1 - |\Gamma_s|^2)(1 - |\Gamma_s| |S_{II}|) |S_{II}|$$

Mettendo in evidenza il termine  $2(1 - |\Gamma_s| |S_{II}|)$ , si ricava:

$$2(1 - |\Gamma_s| |S_{II}|) \left\{ -|\Gamma_s| (1 - |\Gamma_s| |S_{II}|) + (1 - |\Gamma_s|^2) |S_{II}| \right\} = 0$$

Quindi si ottengono le due condizioni:

$$\begin{aligned} 2(1 - |\Gamma_s| |S_{II}|) = 0 &\Rightarrow |\Gamma_s| = \frac{1}{|S_{II}|} \quad \text{impossibile } (|\Gamma_s| > 1) \\ \left\{ -|\Gamma_s| (1 - |\Gamma_s| |S_{II}|) + (1 - |\Gamma_s|^2) |S_{II}| \right\} = 0 \\ &\Rightarrow -|\Gamma_s| + |\Gamma_s|^2 |S_{II}| + |S_{II}| - |\Gamma_s|^2 |S_{II}| = 0 \Rightarrow |\Gamma_s| = |S_{II}| \quad \text{valida} \end{aligned}$$

In conclusione, tenendo conto del risultato già ottenuto per la fase, si ha:  $\Gamma_s = S_{II}^*$ .