MODELLO DI SOPRAVVIVENZA CON PIÙ CAUSE DI ELIMINAZIONE

Sia una collettività di individui soggetta a m cause di eliminazione $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

Si definiscono i n.a.

T_x durata di permanenza nella collettività per un individuo presente nella collettività all'età x

C con determinazioni $1, \ldots, m$, tale che $(C = j) \Leftrightarrow$ "l'individuo esce per la causa α_j"

Si introduce un modello probabilistico per la coppia di n.a. (T_x, C)

Sia

${}_t q_x^{(\alpha_j)} = P(T_x \le t, C = j)$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età x esca dalla collettività per la causa α_j entro l'età $x + t$

${}_t q_x^{(\tau)} = P(T_x \le t)$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età x esca dalla collettività entro l'età $x + t$ per una qualsiasi causa

${}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)}$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età x sia presente all'età $x + t$

Si ha

$$ {}_t q_x^{(\tau)} = P(T_x \le t) = \sum_{j=1}^{m} P(T_x \le t, C = j) = \sum_{j=1}^{m} {}_t q_x^{(\alpha_j)} $$

Si definisce **intensità di eliminazione per una qualunque causa**

$$ \mu^{(\tau)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T_x \le t + \Delta t | T_x > t)}{\Delta t} $$

Si ha

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(\tau)}(x+u) du \right) $$

Si definisce **intensità di eliminazione per la causa** α_j

$$ a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T_x \le t + \Delta t, C = j | T_x > t)}{\Delta t} $$

Si ha

$$ \mu^{(\tau)}(x+t) = \sum_{j=1}^{m} a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) $$

Poiché

$$a\mu^{(\alpha_j)}(x+t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\left(T_x\le t+\Delta t, C=j \middle| T_x>t\right)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)}-{}_t q_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t}\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}}$$

se esiste finito

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)}-{}_t q_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t}$$

e poniamo

$$f_{T,C}(t,j)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)}-{}_t q_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t}$$

la distribuzione congiunta della coppia di n.a. (T_x, C), si ha

$$a\mu^{(\alpha_j)}(x+t)=\frac{f_{T,C}(t,j)}{{}_t p_x^{(\tau)}} \qquad f_{T,C}(t,j)={}_t p_x^{(\tau)}\cdot a\mu^{(\alpha_j)}(x+t)$$

e quindi per la probabilità di eliminazione per la causa α_j

$${}_t q_x^{(\alpha_j)}=P(T_x\le t, C=j)=\int_0^t f_{T,C}(u,j)du=\int_0^t {}_u p_x^{(\tau)}\cdot a\mu^{(\alpha_j)}(x+u)du \quad j=1,\dots,m$$

<u>Osservazione</u>

Disponendo di osservazioni sulla coppia di n.a. (T_x, C) si possono stimare le intensità di eliminazione per le varie cause $a\mu^{(\alpha_j)}(t),\ t \geq 0,\ j = 1, \ldots, m$, e quindi la distribuzione congiunta $f_{T,C}(t, j)\ t \geq 0,\ j = 1, \ldots, m$

Se si è invece interessati a stimare un modello di sopravvivenza in relazione alla mortalità nella collettività osservata, tenendo conto che sono presenti anche altre cause di uscita, occorre introdurre ulteriori ipotesi.

Siano i n.a.

$T_x^{(j)}$ durata di permanenza nella collettività per un individuo di età x fino al verificarsi dell'uscita per la causa α_j

Si ha

$$T_x = \min\left(T_x^{(1)}, \ldots, T_x^{(m)}\right) \quad \text{e} \quad (C = j) \Leftrightarrow \left(T_x = T_x^{(j)}\right)$$

In relazione alle distribuzioni marginali dei n.a. $T_x^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m$ si definisce

Def.: **intensità marginale di eliminazione per la causa α_j**

$$\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x^{(j)} \le t + \Delta t \middle| T_x^{(j)} > t\right)}{\Delta t}$$

Def.: **probabilità assoluta di sopravvivenza** e, rispettivamente, **di eliminazione**

$${}_t p_x'^{(\alpha_j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(\alpha_j)}(x+u)\,du\right) \qquad {}_t q_x'^{(\alpha_j)} = 1 - {}_t p_x'^{(\alpha_j)}$$

<u>Osservazione</u>

Sono dette <u>probabilità relative di eliminazione</u> per le diverse cause

$${}_t q_x^{(\alpha_j)} = P(T_x \le t, C = j) = 1 - {}_t p_x^{(\alpha_j)} = 1 - \exp\left(-\int_0^t a\mu^{(\alpha_j)}(x+u)\,du\right) \qquad j = 1, \ldots, m$$

In generale si ha

$$\mu^{(\alpha_j)}(t) \neq a\mu^{(\alpha_j)}(t) \qquad j = 1, \ldots, m \qquad t \geq 0$$

Nell'ipotesi

$$\mu^{(\alpha_j)}(t) = a\mu^{(\alpha_j)}(t) \qquad j = 1, \ldots, m \qquad t \geq 0$$

sussiste la seguente **relazione di Karup**

$$_t p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_t p_x'^{(\alpha_j)}$$

e si ha allora

$$f_{T,C}(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \left(\prod_{j=1}^{m} {}_t p_x'^{(\alpha_j)} \right) \mu^{(\alpha_j)}(x+t)$$

Si dimostra che se i n.a. $T_x^{(1)}, \ldots, T_x^{(m)}$ sono stocasticamente indipendenti allora

$$\mu_x^{(\alpha_j)}(t) = a\mu_x^{(\alpha_j)}(t) \qquad t \geq 0$$

Nella realtà i n.a. $T_x^{(1)}, \ldots, T_x^{(m)}$ presentano delle relazioni di dipendenza.

Si può allora porre il problema se a partire dai dati osservati, che consentono di stimare la distribuzione congiunta di (T_x, C), si è in grado di stimare pure la distribuzione congiunta di $\left(T_x^{(1)}, \ldots, T_x^{(m)}\right)$

Senza introdurre ipotesi aggiuntive sui legami di dipendenza tra tali n.a., la risposta è negativa.

Sussiste infatti il problema della non identificabilità:

> Esistono diverse distribuzioni congiunte di $\left(T_x^{(1)}, \ldots, T_x^{(m)}\right)$ che danno luogo alla stessa distribuzione congiunta della coppia di n.a. (T_x, C)