STIMA DI MODELLI DI SOPRAVVIVENZA NON PARAMETRICI

USCITE PER MORTE E PER ALTRA CAUSA

Con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ supponiamo di avere osservato n_x individui e di disporre di dati individuali esatti riassunti, per ogni individuo i che contribuisce alla osservazione per tale classe di età, dal vettore delle durate

$$(r_i, s_i, t_i, k_i,) \qquad\qquad i = 1, \ldots, n_x$$

essendo

$x + r_i$ l'età di ingresso in osservazione nella classe di età $]x, x+1]$ con $0 \le r_i < 1$

$x + s_i$ l'età di uscita pianificata dalla osservazione per la classe di età $]x, x+1]$ con $0 < s_i \le 1$

$x + t_i$ l'età di uscita per morte se $\theta_i = x + t_i$, altrimenti $t_i = 0$

$x + k_i$ l'età esatta di uscita per altra causa se $\phi_i = x + k_i$, altrimenti $k_i = 0$

<u>Nota</u>: il riferimento può essere sia l'anno di vita, sia l'anno di polizza (o l'anno di calendario).

Modello di sopravvivenza a due cause di eliminazione: morte ed altra causa

Sia una collettività di individui soggetta a due cause di eliminazione:

d morte

w altra causa

Sia

T_x durata di permanenza nella collettività per un individuo presente nella collettività all'età x

$$T_x = \min\left(T_x^{(d)}, T_x^{(w)}\right)$$

essendo

$T_x^{(d)}$ durata di permanenza nella collettività finché non si ha l'uscita per morte, per un individuo presente nella collettività all'età x

$T_x^{(w)}$ durata di permanenza nella collettività finché non si ha l'uscita per altra causa, per un individuo presente nella collettività all'età x

Ipotesi: **uscite non informative**

$$\mu^{(d)}(t) = a\mu^{(d)}(t) \qquad t \geq 0$$

$$\mu^{(w)}(t) = a\mu^{(w)}(t) \qquad t \geq 0$$

essendo

$$\mu^{(d)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x^{(d)} \leq t + \Delta t \middle| T_x^{(d)} > t\right)}{\Delta t}$$

$$\mu^{(w)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x^{(w)} \leq t + \Delta t \middle| T_x^{(w)} > t\right)}{\Delta t}$$

le intensità marginali di eliminazione e

$$a\mu^{(d)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x \leq t + \Delta t, C = 1 \middle| T_x > t\right)}{\Delta t}$$

$$a\mu^{(w)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x \leq t + \Delta t, C = 2 \middle| T_x > t\right)}{\Delta t}$$

le intensità di uscita per le varie cause, dove $C = 1$ denota l'evento "uscita per morte" e $C = 2$ denota l'evento uscita per altra causa

In ipotesi di uscite non informative sussiste inoltre la **relazione di Karup**

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = {}_t p_x'^{(d)} \, {}_t p_x'^{(w)} $$

essendo

$$ {}_t p_x'^{(d)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(d)}(x+u)du \right) \qquad {}_t p_x'^{(w)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(w)}(x+u)du \right) $$

${}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)}$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età x sia presente all'età $x+t$

${}_t q_x^{(\tau)} = P(T_x \le t)$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età x esca dalla collettività entro l'età $x+t$ per una qualsiasi causa

Si ottengono allora le seguenti espressioni per le probabilità di uscita per morte e, rispettivamente, per altra causa

$$ {}_{s-r}q_{x+r}^{(d)} = P\left(T_{x+r} \leq s-r, C=1\right) = \int_r^s f_{T,C}(u-r,1)du = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}^{(\tau)} \cdot a\mu^{(d)}(x+u)du $$

$$ = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}^{\prime(d)} \cdot {}_{u-r}p_{x+r}^{\prime(w)} \cdot \mu^{(d)}(x+u)du $$

$$ {}_{s-r}q_{x+r}^{(w)} = P\left(T_{x+r} \leq s-r, C=2\right) = \int_r^s f_{T,C}(u-r,2)du = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}^{(\tau)} \cdot a\mu^{(w)}(x+u)du $$

$$ = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}^{\prime(d)} \cdot {}_{u-r}p_{x+r}^{\prime(w)} \cdot \mu^{(w)}(x+u)du $$

Ed è inoltre

$$ {}_{s-r}q_{x+r}^{(\tau)} = {}_{s-r}q_{x+r}^{(d)} + {}_{s-r}q_{x+r}^{(w)} $$

Stima con il metodo dei momenti

n_x individui osservati in relazione alla classe di età $]x, x+1]$

$$(r_i, s_i, t_i, k_i,) \qquad i = 1, \ldots, n_x$$

Si definiscono i n.a.

D_x n.a. dei decessi nella classe di età $]x, x+1]$

W_x n.a. delle uscite per altra causa nella classe di età $]x, x+1]$

Siano

d_x il numero dei decessi osservati nella classe di età $]x, x+1]$;

w_x il numero di uscite per altra causa osservate nella classe di età $]x, x+1]$;

Si ha

$$E(D_x) = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(d)} \qquad E(W_x) = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(w)}$$

dove ${}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(d)}$ e ${}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(w)}$ sono le probabilità di uscita per morte e per altra causa

Le equazioni dei momenti sono allora

$$\begin{cases} E(D_x) = d_x \\ E(W_x) = w_x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(d)} = d_x \\ \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(w)} = w_x \end{cases}$$

Nelle ipotesi

$${}_{s-r} q_{x+r}^{(d)} = (s-r)\, q_x^{(d)} \qquad {}_{s-r} q_{x+r}^{(w)} = (s-r)\, q_x^{(w)}$$

si ottengono le seguenti stime:

$$\hat{q}_x^{(d)} = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i)} \qquad \hat{q}_x^{(w)} = \frac{w_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i)}$$

delle probabilità di uscita, rispettivamente, per morte e per altra causa

Se però l'obiettivo è stimare una tavola di mortalità, tenendo conto che sulla collettività agiscono due cause di uscita, si devono stimare le probabilità assolute

$${}_t p_x'^{(d)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(d)}(x+u)\,du \right) \qquad {}_t p_x'^{(w)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(w)}(x+u)\,du \right)$$

Nell'ipotesi di uscite non informative le equazioni dei momenti sono

$$\begin{cases} E(D_x) = d_x \\ E(W_x) = w_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(d)} = d_x \\ \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(w)} = w_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_x} \int_{r_i}^{s_i} {}_{u-r_i} p_{x+r_i}^{\prime(d)} \cdot {}_{u-r_i} p_{x+r_i}^{\prime(w)} \cdot \mu^{(d)}(x+u) du = d_x \\ \sum_{i=1}^{n_x} \int_{r_i}^{s_i} {}_{u-r_i} p_{x+r_i}^{\prime(d)} \cdot {}_{u-r_i} p_{x+r_i}^{\prime(w)} \cdot \mu^{(w)}(x+u) du = w_x \end{cases}$$

A) Nell'ipotesi di distribuzione uniforme per le probabilità assolute di uscita per morte e, rispettivamente, per altra causa si ha

$$ {}_{u-r_i} p_{x+r_i}^{\prime(d)} = \frac{1 - u\, q_x^{\prime(d)}}{1 - r_i\, q_x^{\prime(d)}} \qquad \mu^{(d)}(x+u) = \frac{q_x^{\prime(d)}}{1 - u\, q_x^{\prime(d)}}$$

$$ {}_{u-r_i} p_{x+r_i}^{\prime(w)} = \frac{1 - u\, q_x^{\prime(w)}}{1 - r_i\, q_x^{\prime(w)}} \qquad \mu^{(w)}(x+u) = \frac{q_x^{\prime(w)}}{1 - u\, q_x^{\prime(w)}}$$

Le equazioni dei momenti diventano

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_x} \frac{q_x'^{(d)}\left[(s_i - r_i) - \dfrac{\left(s_i^2 - r_i^2\right)}{2} q_x'^{(w)}\right]}{\left(1 - r_i\, q_x'^{(d)}\right)\left(1 - r_i\, q_x'^{(w)}\right)} = d_x \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n_x} \frac{q_x'^{(w)}\left[(s_i - r_i) - \dfrac{\left(s_i^2 - r_i^2\right)}{2} q_x'^{(d)}\right]}{\left(1 - r_i\, q_x'^{(d)}\right)\left(1 - r_i\, q_x'^{(w)}\right)} = w_x \end{cases}$$

Il sistema può essere risolto per via numerica ottenendo le stime

$$\hat{q}_x'^{(d)} \qquad \hat{q}_x'^{(w)}$$

Nel caso particolare $r_i = 0$ e $s_i = 1$ per ogni i , le equazioni dei momenti diventano

$$\begin{cases} n_x \; q_x'^{(d)} \left[1 - \dfrac{1}{2} q_x'^{(w)} \right] = d_x \\ n_x \; q_x'^{(w)} \left[1 - \dfrac{1}{2} q_x'^{(d)} \right] = w_x \end{cases}$$

Il sistema può essere risolto in forma chiusa ottenendo le stime

$$\hat{q}_x'^{(d)} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 2 n_x d_x}}{n_x} \qquad \text{con} \qquad b = n_x + \frac{d_x}{2} - \frac{w_x}{2}$$

$$\hat{q}_x'^{(w)} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 2 n_x w_x}}{n_x} \qquad \text{con} \qquad b = n_x - \frac{d_x}{2} + \frac{w_x}{2}$$

B) Nell’ipotesi di <u>intensità di uscita per morte e per altra causa costanti</u> si ha

$$\mu^{(d)}(x+u)=\mu_x^{(d)} \qquad {}_{u-r_i}p'^{(d)}_{x+r_i} = \exp\left[-\mu_x^{(d)}(u-r_i)\right]$$

$$\mu^{(w)}(x+u)=\mu_x^{(w)} \qquad {}_{u-r_i}p'^{(w)}_{x+r_i} = \exp\left[-\mu_x^{(w)}(u-r_i)\right]$$

Le equazioni dei momenti diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_x^{(d)}}{\mu_x^{(d)}+\mu_x^{(w)}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_x} \left(1-\exp\left[-(s_i-r_i)\left(\mu_x^{(d)}+\mu_x^{(w)}\right)\right]\right) = d_x \\ \dfrac{\mu_x^{(w)}}{\mu_x^{(d)}+\mu_x^{(w)}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_x} \left(1-\exp\left[-(s_i-r_i)\left(\mu_x^{(d)}+\mu_x^{(w)}\right)\right]\right) = w_x \end{cases}$$

Il sistema può essere risolto per via numerica ottenendo le stime

$$\hat{\mu}_x^{(d)} \qquad \hat{\mu}_x^{(w)}$$

Nel caso particolare $r_i = 0$ e $s_i = 1$ per ogni i , le equazioni dei momenti diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_x^{(d)}}{\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}} \left(1 - \exp\left[-\left(\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}\right)\right]\right) n_x = d_x \\ \dfrac{\mu_x^{(w)}}{\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}} \left(1 - \exp\left[-\left(\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}\right)\right]\right) n_x = w_x \end{cases}$$

Il sistema può essere risolto in forma chiusa ottenendo le stime

$$\hat{\mu}_x^{(d)} = -\log\left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x}\right)^{\frac{d_x}{d_x + w_x}} \qquad \hat{\mu}_x^{(w)} = -\log\left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x}\right)^{\frac{w_x}{d_x + w_x}}$$

Da queste si ottengono le stime

$$\hat{q}_x'^{(d)} = 1 - \hat{p}_x'^{(d)} = 1 - \left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x}\right)^{\frac{d_x}{d_x + w_x}} \qquad \hat{q}_x'^{(w)} = 1 - \hat{p}_x'^{(w)} = 1 - \left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x}\right)^{\frac{w_x}{d_x + w_x}}$$