

Stima con il metodo della massima verosimiglianza

Con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ per scrivere la verosimiglianza delle osservazioni

$$(r_i, s_i, t_i, k_i,) \quad i = 1, \dots, n_x$$

definiamo, per ogni $i = 1, 2, \dots, n_x$, i.n.a.

$T^{(i)}$ durata aleatoria di permanenza dell'individuo i nella collettività tra le età $]x, x+1]$

Nota: $T^{(i)}$ ha determinazioni $]r_i, s_i]$

Indicato con $T_{x+r_i}^{(i)}$ la durata di permanenza nella collettività per l' i -esimo individuo presente all'età $x + r_i$ si ha

$$T^{(i)} = \min\left(T_{x+r_i}^{(i)} + r_i, s_i\right)$$

Se l'individuo i è presente nella collettività all'età di uscita pianificata:

$$T^{(i)} = s_i \quad P(T^{(i)} = s_i) = {}_{s_i - r_i} p_{x+r_i}^{(\tau)} = {}_{s_i - r_i} p_{x+r_i}^{'(d)} \cdot {}_{s_i - r_i} p_{x+r_i}^{'(w)}$$

Se l'individuo i esce per morte all'età esatta $x + t_i$:

$$T^{(i)} = t_i \quad f_{T,C}(t_i - r_i, 1) = {}_{t_i - r_i} p_{x+r_i}^{(\tau)} \cdot \mu^{(d)}(x + t_i) = {}_{t_i - r_i} p_{x+r_i}^{'(d)} \cdot {}_{t_i - r_i} p_{x+r_i}^{'(w)} \cdot \mu^{(d)}(x + t_i)$$

Se l'individuo i esce per altra causa all'età esatta $x + k_i$:

$$T^{(i)} = k_i \quad f_{T,C}(k_i - r_i, 2) = {}_{k_i - r_i} p_{x+r_i}^{(\tau)} \cdot \mu^{(w)}(x + k_i) = {}_{k_i - r_i} p_{x+r_i}^{'(d)} \cdot {}_{k_i - r_i} p_{x+r_i}^{'(w)} \cdot \mu^{(w)}(x + k_i)$$

Si definiscono

$$S = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ è in vita all'età } x + s_i\} \quad \text{survival}$$

$$D = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ esce per morte all'età } x + t_i\} \quad \text{death}$$

$$W = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ esce per altra causa all'età } x + k_i\} \quad \text{withdrawal}$$

In ipotesi di indipendenza stocastica dei n.a. $T^{(i)}$ la verosimiglianza delle osservazioni è

$$\begin{aligned}
 L &= \prod_{i \in S} P(T^{(i)} = s_i) \cdot \prod_{i \in D} f_{T,C}(t_i - r_i, 1) \cdot \prod_{i \in W} f_{T,C}(k_i - r_i, 2) \\
 &= \prod_{i \in S} {}_{s_i - r_i} p_{x+r_i}^{(\tau)} \cdot \prod_{i \in D} {}_{t_i - r_i} p_{x+r_i}^{(\tau)} \cdot \mu^{(d)}(x + t_i) \cdot \prod_{i \in W} {}_{k_i - r_i} p_{x+r_i}^{(\tau)} \cdot \mu^{(w)}(x + k_i) \\
 &= \prod_{i \in S} {}_{s_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(d)} \cdot {}_{s_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(w)} \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{i \in D} {}_{t_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(d)} \cdot {}_{t_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(w)} \cdot \mu^{(d)}(x + t_i) \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{i \in W} {}_{k_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(d)} \cdot {}_{k_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(w)} \cdot \mu^{(w)}(x + k_i) \\
 &= \prod_{i \in S} {}_{s_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(d)} \cdot \prod_{i \in D} {}_{t_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(d)} \cdot \mu^{(d)}(x + t_i) \cdot \prod_{i \in W} {}_{k_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(d)} \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{i \in S} {}_{s_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(w)} \cdot \prod_{i \in D} {}_{t_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(w)} \cdot \prod_{i \in W} {}_{k_i - r_i} p'_{x+r_i}^{(w)} \cdot \mu^{(w)}(x + k_i)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$L = L^{(d)} \cdot L^{(w)}$$

con

$$L^{(d)} = \prod_{i \in S} s_i - r_i p'^{(d)}_{x+r_i} \cdot \prod_{i \in D} t_i - r_i p'^{(d)}_{x+r_i} \cdot \mu^{(d)}(x + t_i) \cdot \prod_{i \in W} k_i - r_i p'^{(d)}_{x+r_i}$$

e

$$L^{(w)} = \prod_{i \in S} s_i - r_i p'^{(w)}_{x+r_i} \cdot \prod_{i \in D} t_i - r_i p'^{(w)}_{x+r_i} \cdot \prod_{i \in W} k_i - r_i p'^{(w)}_{x+r_i} \cdot \mu^{(w)}(x + k_i)$$

Quindi per stimare le probabilità assolute $p'^{(d)}_x$ si porrà

$$\max L^{(d)}$$

mentre per stimare le probabilità assolute $p'^{(w)}_x$ si porrà

$$\max L^{(w)}$$

Stima di massima verosimiglianza delle probabilità assolute $p_x'^{(d)}$

$$L^{(d)} = \prod_{i \in S} {}_{s_i - r_i} p_{x+r_i}'^{(d)} \cdot \prod_{i \in D} {}_{t_i - r_i} p_{x+r_i}'^{(d)} \cdot \mu^{(d)}(x + t_i) \cdot \prod_{i \in W} {}_{k_i - r_i} p_{x+r_i}'^{(d)}$$

Si nota che le informazioni sulle uscite per altra causa sono trattate come le informazioni sulla sopravvivenza all'età di uscita pianificata

A) Nell'ipotesi di interpolazione esponenziale $\mu^{(d)}(x + t) = \mu_x^{(d)}$, $0 < t \leq 1$

$${}_{s_i - r_i} p_{x+r_i}'^{(d)} = e^{-\mu_x^{(d)}(s_i - r_i)}$$

la verosimiglianza è

$$\begin{aligned} L^{(d)} &= \prod_{i \in S} e^{-\mu_x^{(d)}(s_i - r_i)} \cdot \prod_{i \in D} \left(e^{-\mu_x^{(d)}(t_i - r_i)} \mu_x^{(d)} \right) \cdot \prod_{i \in W} e^{-\mu_x^{(d)}(k_i - r_i)} \\ &= \exp \left[-\mu_x^{(d)} \left(\sum_{i \in S} (s_i - r_i) + \sum_{i \in D} (t_i - r_i) + \sum_{i \in W} (k_i - r_i) \right) \right] \cdot (\mu_x^{(d)})^{d_x} \end{aligned}$$

dove $d_x = \# D$

Stima di modelli di sopravvivenza non parametrici – uscite per morte e per altra causa

La log-verosimiglianza è allora

$$\log L^{(d)} = \left[-\mu_x^{(d)} \left(\sum_{i \in S} (s_i - r_i) + \sum_{i \in D} (t_i - r_i) + \sum_{i \in W} (k_i - r_i) \right) \right] + d_x \log(\mu_x^{(d)})$$

Risolvendo l'equazione di verosimiglianza si trova

$$\hat{\mu}_x^{(d)} = \frac{d_x}{\sum_{i \in S} (s_i - r_i) + \sum_{i \in D} (t_i - r_i) + \sum_{i \in W} (k_i - r_i)}$$

dove $\sum_{i \in S} (s_i - r_i) + \sum_{i \in D} (t_i - r_i) + \sum_{i \in W} (k_i - r_i)$ è detta **esposizione totale esatta**

Osservazione: l'esposizione totale esatta coincide con il numero centrale degli esposti al rischio secondo l'impostazione attuariale

$$E_x^C = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i) - \sum_{i \in D} (1 - t_i) = \sum_{i \in S} (s_i - r_i) + \sum_{i \in D} (t_i - r_i) + \sum_{i \in W} (k_i - r_i)$$

Quindi la frequenza (grezza) centrale di decesso

$$m_x^o = \frac{\theta_x}{E_x^C}$$

coincide con la stima di massima verosimiglianza

$$\hat{\mu}_x^{(d)}$$

Osservazione

Sia D_x il n.a. dei decessi nella classe di età $]x, x+1]$, in ipotesi di distribuzione di Poisson di parametro $\mu_x^{(d)} E_x^C$ si ha

$$P(D_x = d_x) = \frac{(\mu_x^{(d)} E_x^C)^{d_x}}{d_x!} e^{-\mu_x^{(d)} E_x^C} = \frac{(E_x^C)^{d_x}}{d_x!} e^{-\mu_x^{(d)} E_x^C} (\mu_x^{(d)})^{d_x} \propto L^{(d)}$$

Pertanto ai fini della stima di massima verosimiglianza dell'intensità istantanea di mortalità sono equivalenti le ipotesi esponenziale e di distribuzione di Poisson per il n.a. dei decessi D_x con $E(D_x) = \mu_x E_x^C$

B) Nell'ipotesi di interpolazione lineare

$$s_i - r_i \quad p_{x+r_i}^{(d)} = \frac{1-s_i}{1-r_i} \frac{q_x^{(d)}}{q_x'^{(d)}} \quad \mu^{(d)}(x+t_i) = \frac{q_x^{(d)}}{1-t_i} \frac{q_x'^{(d)}}{q_x^{(d)}}$$

indicato con $d_x = \#D$, la verosimiglianza è

$$\begin{aligned} L^{(d)} &= \prod_{i \in S} \frac{1-s_i}{1-r_i} \frac{q_x^{(d)}}{q_x'^{(d)}} \cdot \prod_{i \in D} \left(\frac{1-t_i}{1-r_i} \frac{q_x^{(d)}}{q_x'^{(d)}} \cdot \frac{q_x^{(d)}}{1-t_i} \frac{q_x'^{(d)}}{q_x^{(d)}} \right) \cdot \prod_{i \in W} \frac{1-k_i}{1-r_i} \frac{q_x^{(d)}}{q_x'^{(d)}} \\ &= \prod_{i \in S \cup D \cup W} \left(1 - r_i q_x'^{(d)} \right)^{-1} \prod_{i \in S} \left(1 - s_i q_x'^{(d)} \right) \prod_{i \in W} \left(1 - k_i q_x'^{(d)} \right) \quad q_x^{d_x} \end{aligned}$$

Dalla log-verosimiglianza

$$\log L^{(d)} = - \sum_{i \in S \cup D \cup W} \log \left(1 - r_i q_x'^{(d)} \right) + \sum_{i \in S} \log \left(1 - s_i q_x'^{(d)} \right) + \sum_{i \in W} \log \left(1 - k_i q_x'^{(d)} \right) + d_x \log \left(q_x^{(d)} \right)$$

si ottiene l'equazione di log-verosimiglianza che può essere risolta per via numerica

$$\sum_{i \in S \cup D \cup W} \frac{r_i}{1 - r_i q_x'^{(d)}} - \sum_{i \in S} \frac{s_i}{1 - s_i q_x'^{(d)}} - \sum_{i \in W} \frac{k_i}{1 - k_i q_x'^{(d)}} + \frac{d_x}{q_x^{(d)}} = 0$$

Stime di massima verosimiglianza per dati raggruppati

Con riferimento alla classe di età $[x, x+1]$ nel caso di dati raggruppati, i dati sono:

n_x numero di individui osservati

d_x numero di decessi osservati

w_x numero di individui usciti per altra causa

Con riferimento all' i -esimo, $i = 1, \dots, n_x$, si definisce il seguente n.a.

$$C^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{se l'individuo } i \text{ esce per morte} \\ 2 & \text{se l'individuo } i \text{ esce per altra causa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(C^{(i)} = 1) = q_x^{(d)}$$

$$P(C^{(i)} = 2) = q_x^{(w)}$$

$$P(C^{(i)} = 0) = 1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)}$$

In ipotesi di indipendenza stocastica dei n.a. $C^{(i)}$ la verosimiglianza delle osservazioni è

$$L = \prod_{i \in D} P(C^{(i)} = 1) \cdot \prod_{i \in W} P(C^{(i)} = 2) \cdot \prod_{i \in S} P(C^{(i)} = 0) = \left(q_x^{(d)}\right)^{d_x} \left(q_x^{(w)}\right)^{w_x} \left(1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)}\right)^{n_x - d_x - w_x}$$

Dalla log-verosimiglianza

$$\log L = d_x \log(q_x^{(d)}) + w_x \log(q_x^{(w)}) + (n_x - d_x - w_x) \log(1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)})$$

si ottiene il sistema di equazioni di verosimiglianza che fornisce le stime delle probabilità di eliminazione per causa di morte e, rispettivamente, per altra causa.

$$\begin{cases} \frac{d_x}{q_x^{(d)}} - \frac{n_x - d_x - w_x}{1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)}} = 0 \\ \frac{w_x}{q_x^{(w)}} - \frac{n_x - d_x - w_x}{1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{q}_x^{(d)} = \frac{d_x}{n_x} \\ \hat{q}_x^{(w)} = \frac{w_x}{n_x} \end{cases}$$

Le stime coincidono con quelle ottenute con il metodo dei momenti nel caso particolare $r_i = 0$ e $s_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n_x$

Se si vogliono stimare le probabilità assolute, si devono formulare le opportune ipotesi.

In ipotesi di uscite non informative si ha

$$q_x^{(d)} = \int_0^1 {}_u p'_x{}^{(d)} \cdot {}_u p'_x{}^{(w)} \cdot \mu^{(d)}(x+u) du$$

$$q_x^{(w)} = \int_0^1 {}_u p'_x{}^{(d)} \cdot {}_u p'_x{}^{(w)} \cdot \mu^{(w)}(x+u) du$$

- A) Nell'ipotesi di distribuzione uniforme per le probabilità assolute di uscita per morte e, rispettivamente, per altra causa si ha

$${}_u p'_x{}^{(d)} = 1 - u q'_x{}^{(d)} \quad \mu^{(d)}(x+u) = \frac{q'_x{}^{(d)}}{1 - u q'_x{}^{(d)}}$$

$${}_u p'_x{}^{(w)} = 1 - u q'_x{}^{(w)} \quad \mu^{(w)}(x+u) = \frac{q'_x{}^{(w)}}{1 - u q'_x{}^{(w)}}$$

e quindi

$$q_x^{(d)} = q'_x{}^{(d)} \left(1 - \frac{1}{2} q'_x{}^{(w)} \right)$$

$$q_x^{(w)} = q'_x{}^{(w)} \left(1 - \frac{1}{2} q'_x{}^{(d)} \right)$$

La log-verosimiglianza diventa allora

$$\begin{aligned}\log L &= d_x \log(q_x^{(d)}) + w_x \log(q_x^{(w)}) + (n_x - d_x - w_x) \log(1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)}) \\ &= d_x \log(q'_x^{(d)}) + d_x \log\left(1 - \frac{1}{2}q'_x^{(w)}\right) + w_x \log(q'_x^{(w)}) + w_x \log\left(1 - \frac{1}{2}q'_x^{(d)}\right) + \\ &\quad + (n_x - d_x - w_x) \log\left(1 - q'_x^{(d)}\left(1 - \frac{1}{2}q'_x^{(w)}\right) - q'_x^{(w)}\left(1 - \frac{1}{2}q'_x^{(d)}\right)\right)\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema di equazioni di verosimiglianza si ottengono le stesse stime ottenute con il metodo dei momenti nel caso particolare $r_i = 0$ e $s_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n_x$.

$$\hat{q}'_x^{(d)} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 2n_x d_x}}{n_x} \quad \text{con} \quad b = n_x + \frac{d_x}{2} - \frac{w_x}{2}$$

$$\hat{q}'_x^{(w)} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 2n_x w_x}}{n_x} \quad \text{con} \quad b = n_x - \frac{d_x}{2} + \frac{w_x}{2}$$

A) Nell'ipotesi di intensità di uscita per morte e per altra causa costanti si ha

$$\mu^{(d)}(x+u) = \mu_x^{(d)} \quad {}_u p_x'^{(d)} = \exp[-\mu_x^{(d)} u]$$

$$\mu^{(w)}(x+u) = \mu_x^{(w)} \quad {}_u p_x'^{(w)} = \exp[-\mu_x^{(w)} u]$$

e quindi

$$q_x^{(d)} = \frac{\mu_x^{(d)}}{\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}} \left(1 - \exp \left[-(\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}) \right] \right) \quad q_x^{(w)} = \frac{\mu_x^{(w)}}{\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}} \left(1 - \exp \left[-(\mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)}) \right] \right)$$

Sostituendo nella log-verosimiglianza

$$\log L = d_x \log(q_x^{(d)}) + w_x \log(q_x^{(w)}) + (n_x - d_x - w_x) \log(1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)})$$

e derivando, si ottiene il sistema di equazioni di verosimiglianza le cui soluzioni coincidono con le stime ottenute con il metodo dei momenti nel caso particolare $r_i = 0$ e $s_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n_x$.

$$\hat{\mu}_x^{(d)} = -\log \left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x} \right)^{\frac{d_x}{d_x + w_x}} \quad \hat{\mu}_x^{(w)} = -\log \left(\frac{n_x - d_x - w_x}{n_x} \right)^{\frac{w_x}{d_x + w_x}}$$